

# MZIを用いた変調システム

## ～現状報告 Oct 23. 2017～

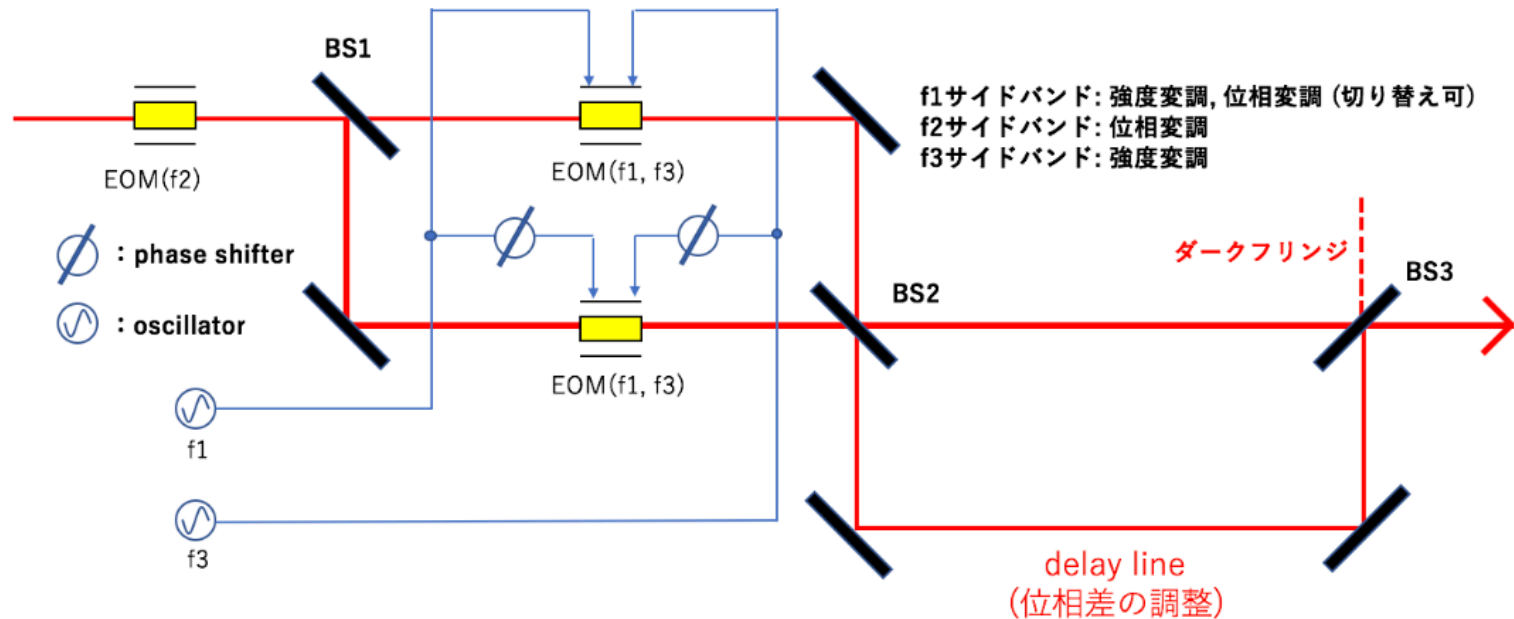
---

KOHEI YAMAMOTO

# 目的

文献[1]で求められている各サイドバンドのAmplitude Noise及びPhase Noiseの要求値をMach-Zehnder干渉計の各パラメータの雑音の要求値に変換する。

delay lineの長さ変動, ミッドフリンジ, Phase Shifterによる位相差...



[1] A. Aso et al. "Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector". Phys.Rev.D 88, 043007(2013)

# Outline

➤ 解析計算とシミュレーションの比較

➤ 各パラメータの雑音に対する要求値

# 解析計算: Output

$$E_{out} = e^{i\Omega t} \left\{ A + me^{i(\omega_m t + \frac{\theta}{2})} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + e^{i\phi} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \right] \right. \\ \left. - me^{-i(\omega_m t + \frac{\theta}{2})} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + e^{-i\phi} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] \right\}$$

$\phi$ : EOM間の位相差

$\theta$ : delay lineで生じるサイドバンド間の位相差

AMとPMに分解



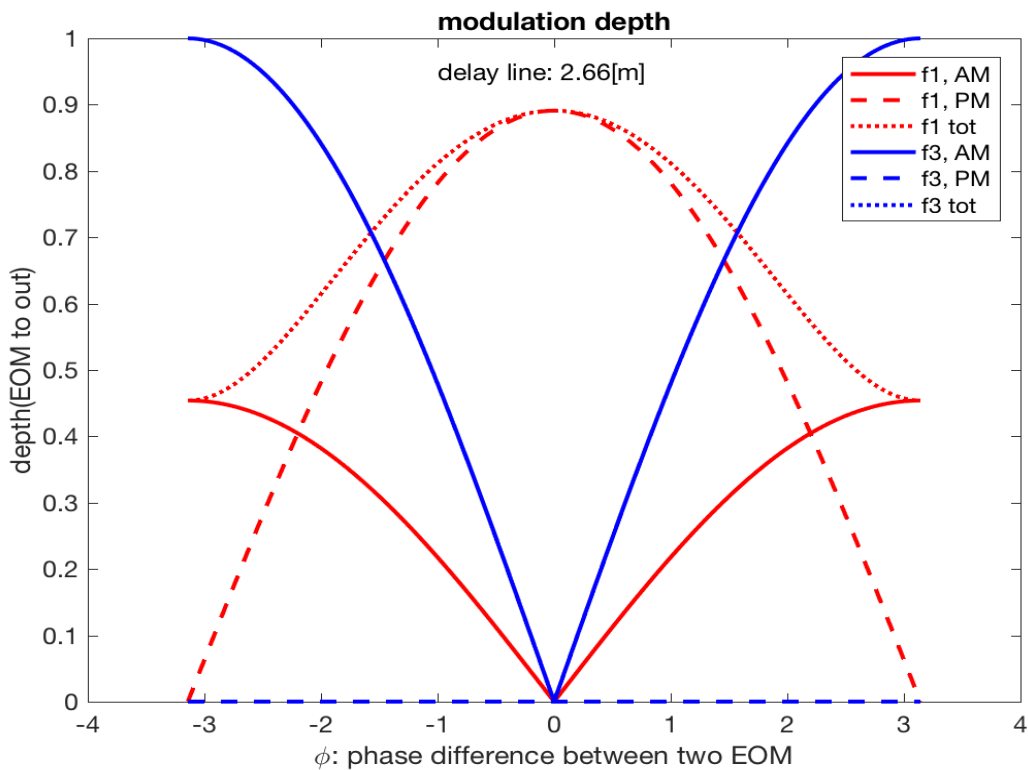
$$[A + C_+ e^{i\omega_m t} + C_- e^{-i\omega_m t}] e^{i\Omega t} \\ = [A + |C_+ + C_-^*| \cos(\omega_m t + \arg(C_+ + C_-^*)) \\ + i|C_+ - C_-^*| \cos(\omega_m t + \arg(-iC_+ + iC_-^*))] e^{i\Omega t}$$

$$E_{out} = e^{i\Omega t} \left\{ A + |2\sqrt{2}m \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)| \cos\left(\omega_m t + \frac{\theta + \phi - \pi}{2}\right) \right. \\ \left. + i|2\sqrt{2}m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| \cos\left(\omega_m t + \frac{\theta + \phi - \pi}{2}\right) \right\}$$

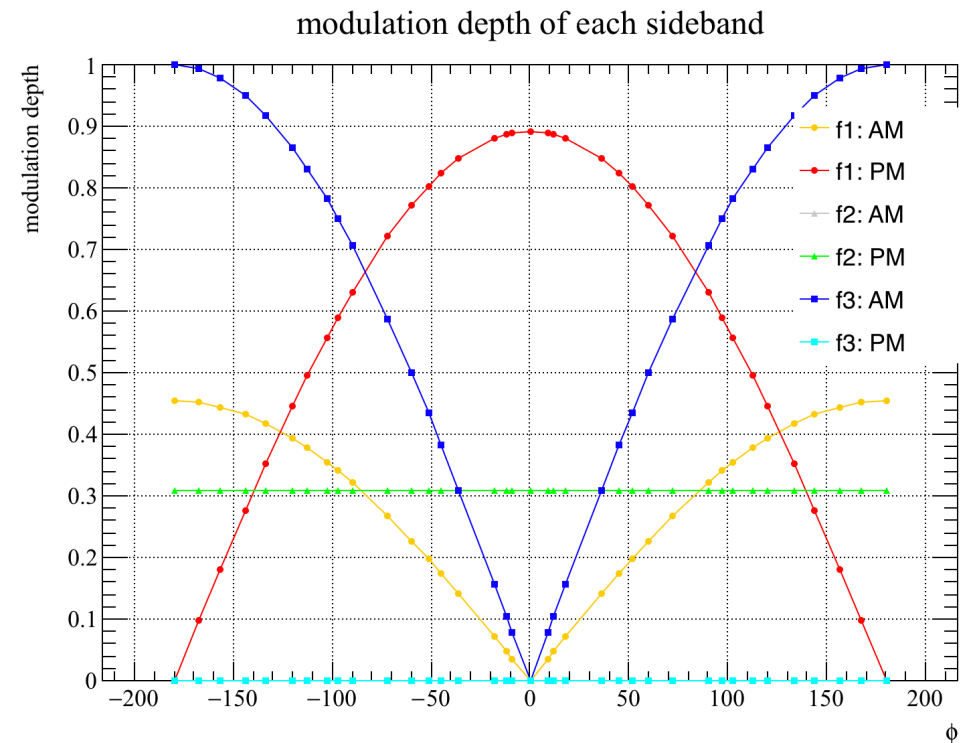
サイドバンドの種類	周波数 ( $\frac{\omega_m}{2\pi}$ )[MHz]	$\theta$ [degree]
f1	16.88	54
f2	45.02	144
f3	56.27	180

# 解析とシミュレーション比較: Modulation Depth

EOM変調直後とoutputで比をとったもの



再現できた



解析結果

$$AM : \frac{|\sqrt{2}m \sin(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2})|/A}{\frac{m}{\frac{1}{\sqrt{2}}A}} = |\sin(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2})|$$

$$PM : \frac{|\sqrt{2}m \cos(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})|/A}{\frac{m}{\frac{1}{\sqrt{2}}A}} = |\cos(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})|$$

シミュレーション結果

\*f2のパワーが常に30%程度まで小さくなっている

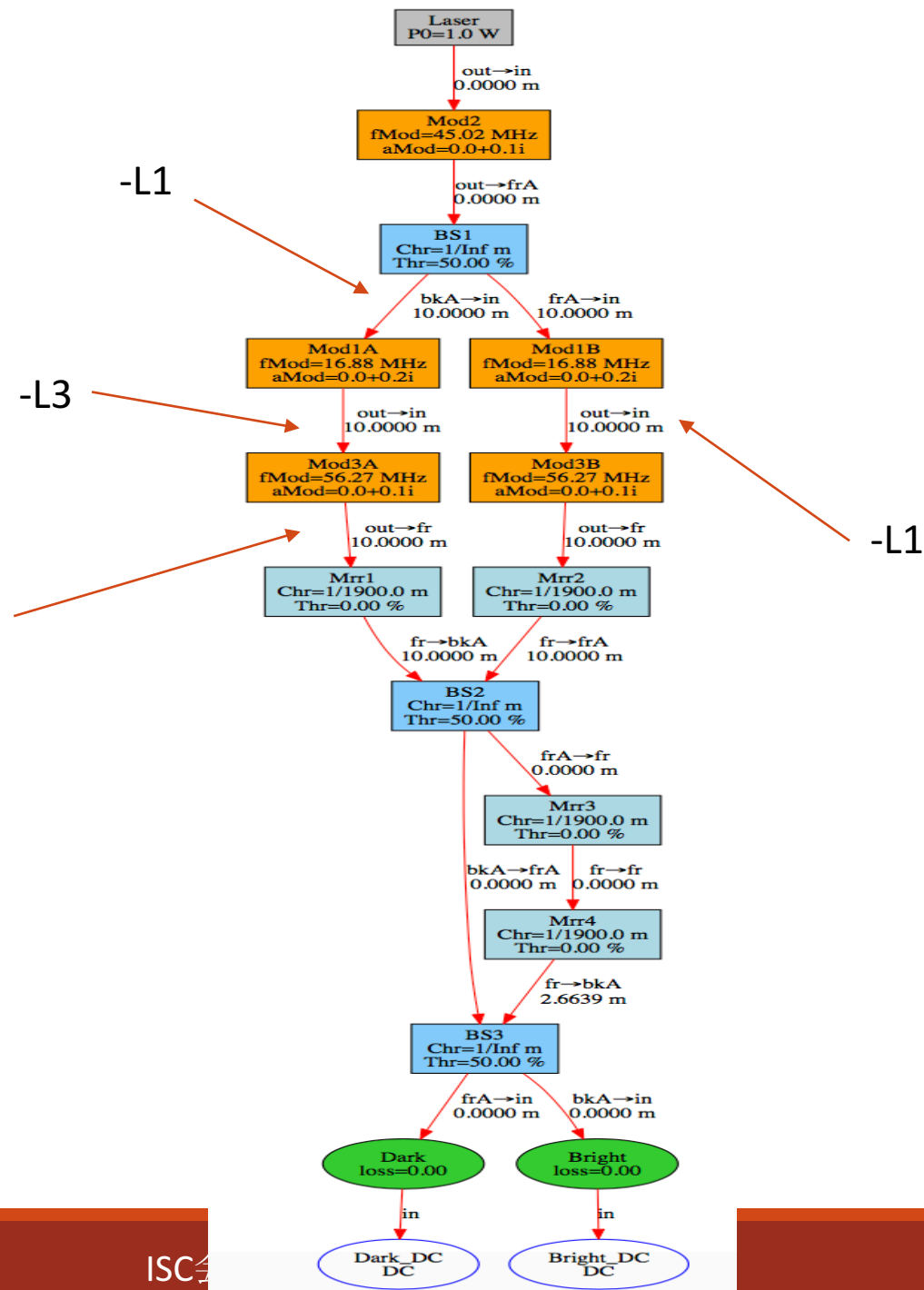
# \*位相差の付け方

Optickleには二つのEOM間に位相差をつける方法が光路長の調整のみ

$f_1, f_3$ の位相差 $\phi$ に対応した長さ $L_1, L_3$ とすると...

\*BS1-BS2間の光路長は等しく保っている。

これにより左側のEOMが右側に対して $\phi$ 遅れることになる



# 解析とシミュレーション比較: Delay line (Amp Noise)

$\theta$ の定義( $l$ はdelay lineの長さ)  $\theta = \omega_m \frac{l}{c}$

Relative Amplitude Noise: Modulation Depthの相対誤差

Amplitude Modulation

$$AM : \frac{|\frac{1}{2} \sin(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\sin(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2})|} = \frac{|\frac{1}{2} \cos(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$$

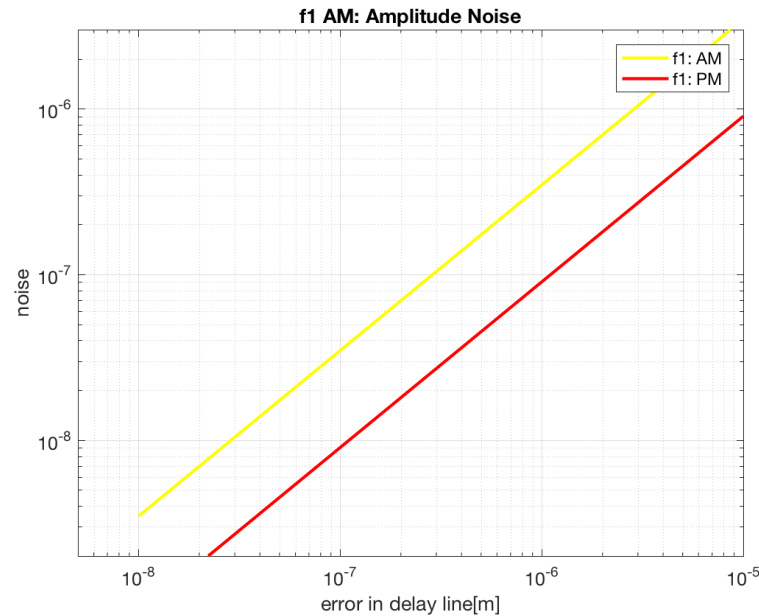
Phase Modulation

$$PM : \frac{|\frac{1}{2} \cos(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\cos(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})|} = \frac{|\frac{1}{2} \sin(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\cos(\frac{\theta}{2})|}$$

位相差 $\phi$ には依存しないらしい

# 解析とシミュレーション比較: Delay line (Amp Noise)

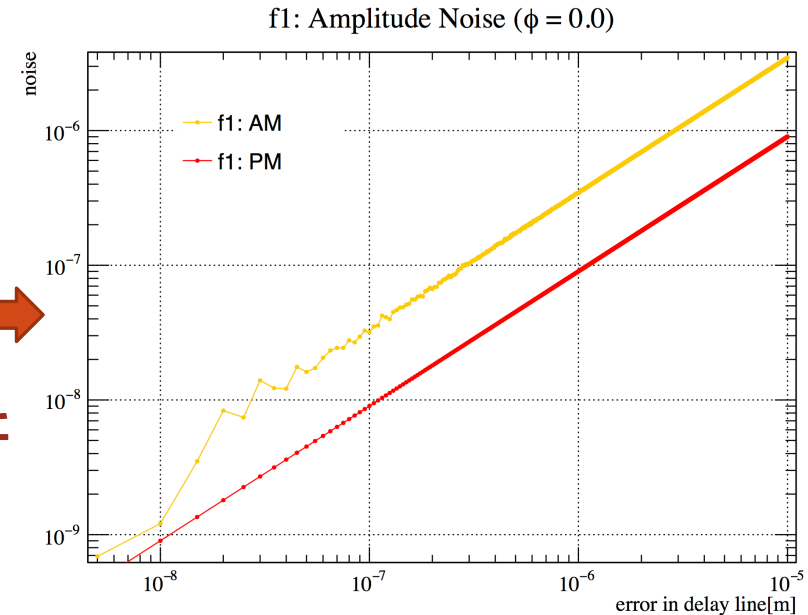
\*EOM間の位相差 $\phi=0.0 \leftrightarrow f1$ はPMのみ



解析結果



再現できた



シミュレーション結果

- \*シミュレーション結果でAMが”揺れている”  
->元々の値が小さいこと(outputのmodulation depthが $O(10^{-8})$ 程度)に起因??
- \*\*位相差 $\phi=180$ にするとPMが”揺れる”
- \*位相差 $\phi=180$ にしても同様のグラフ->解析通り $\phi$ には依存しない



# 解析とシミュレーション比較: Delay line (Phase Noise)

変位誤差の影響

$$e^{i(\Omega t + m \sin(\omega_m t + \phi))} \stackrel{(\phi = \beta \sin \omega_\beta t)}{\simeq} [J_0(m) + J_1(m)e^{i(\omega_m t + \phi)} - J_1(m)e^{-i(\omega_m t + \phi)}] e^{i\Omega t}$$

upperに着目  $J_1(m)e^{i(\omega_m t + \phi)} \simeq J_0(m)[J_0(\beta) + J_1(\beta)e^{i\omega_\beta t} - J_1(\beta)]e^{i\omega_\beta t}$

文献では単位はdBcで定義されているので...

$$\begin{aligned} (PhaseNoise) &= 10 \log_{10} \frac{J_1(\beta)^2}{J_0(\beta)^2} \\ &= 10 \log_{10} \frac{\beta^2}{4} [dBc] \end{aligned}$$

$\beta \leftrightarrow$  (要求値を求めたい誤差)  
の関係により焼き直せる. 例えば...

Delay lineの長さ誤差 $\delta l$ は

$$\begin{aligned} \beta &= k_m \delta l = \frac{2\pi}{\lambda_m} \delta l \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta l} &= \frac{2\pi}{\lambda_m} \end{aligned}$$

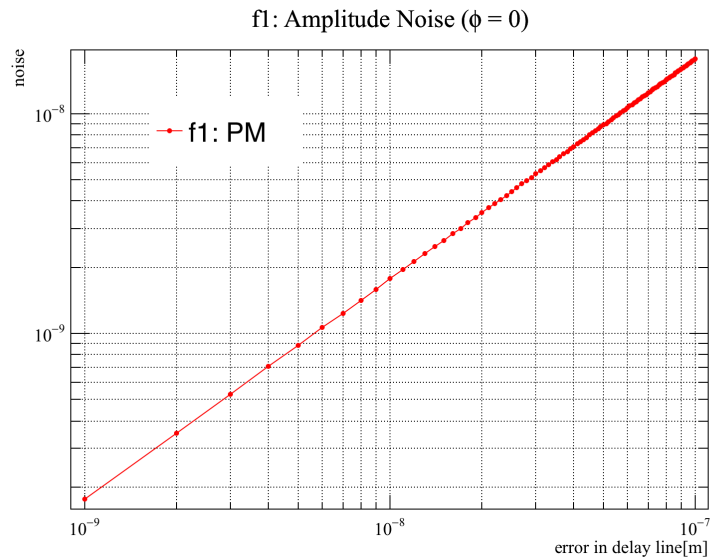
# 解析とシミュレーション比較: Delay line (Phase Noise)

シミュレーション上で $\beta$ とは...

$$\begin{aligned} & [A + C_+ e^{i\omega_m t} + C_- e^{-i\omega_m t}] e^{i\Omega t} \\ &= [A + |C_+ + C_-^*| \cos(\omega_m t + \arg(C_+ + C_-^*)) \\ & \quad + i|C_+ - C_-^*| \cos(\omega_m t - \arg(-iC_+ + iC_-^*))] e^{i\Omega t} \end{aligned}$$

この変動で計算できるだろう...

しかし...



解析計算による傾きの $\frac{1}{2}$ 倍になっている...

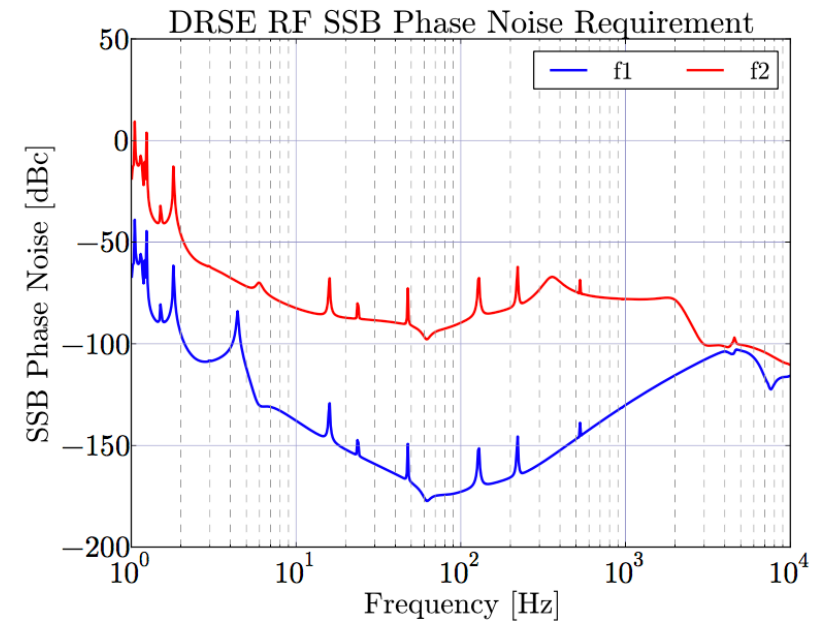
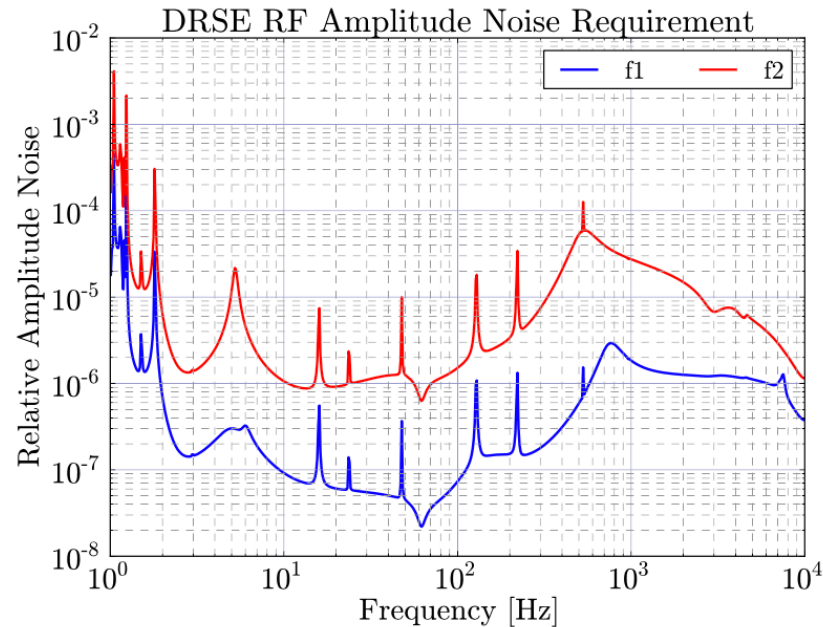
これが合わないと先に進めないので止まってしまっている..

# Outline

- 解析計算とシミュレーションの比較
- **各パラメータの雑音に対する要求値**

# 雑音の要求値

文献のサイドバンドのノイズに対する要求値を欲しいノイズの要求値に変換する



\*文献[1]より引用

[1] A. Aso et al. "Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector". Phys.Rev.D 88, 043007(2013)

# 雑音の要求値: delay lineの長さ変動

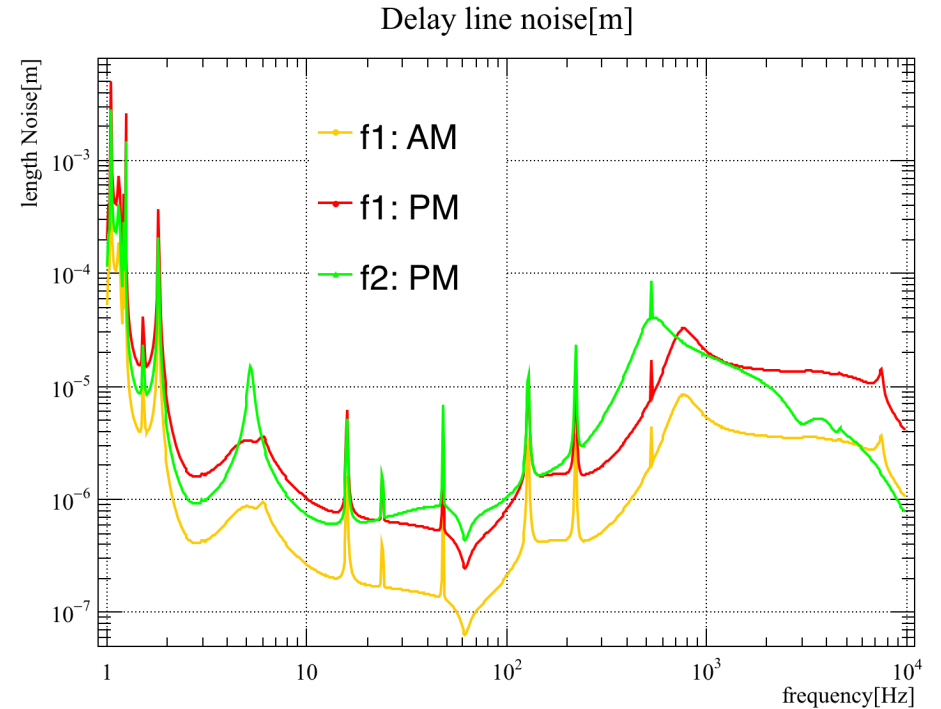
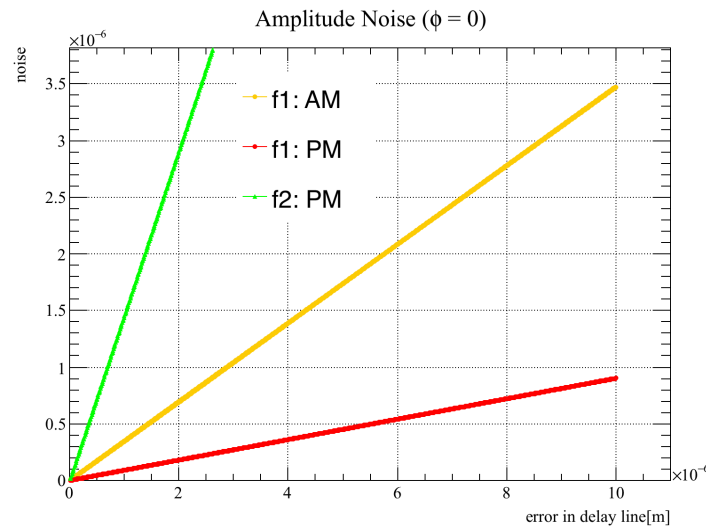
f1: 確認できてるので解析でも, シミュレーションでも

$$AM : \frac{|\frac{1}{2} \sin(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\sin(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2})|} = \frac{|\frac{1}{2} \cos(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$$

$$PM : \frac{|\frac{1}{2} \cos(\frac{\phi}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\cos(\frac{\phi}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})|} = \frac{|\frac{1}{2} \sin(\frac{\theta}{2}) \frac{\omega_m}{c} \delta l|}{|\cos(\frac{\theta}{2})|}$$

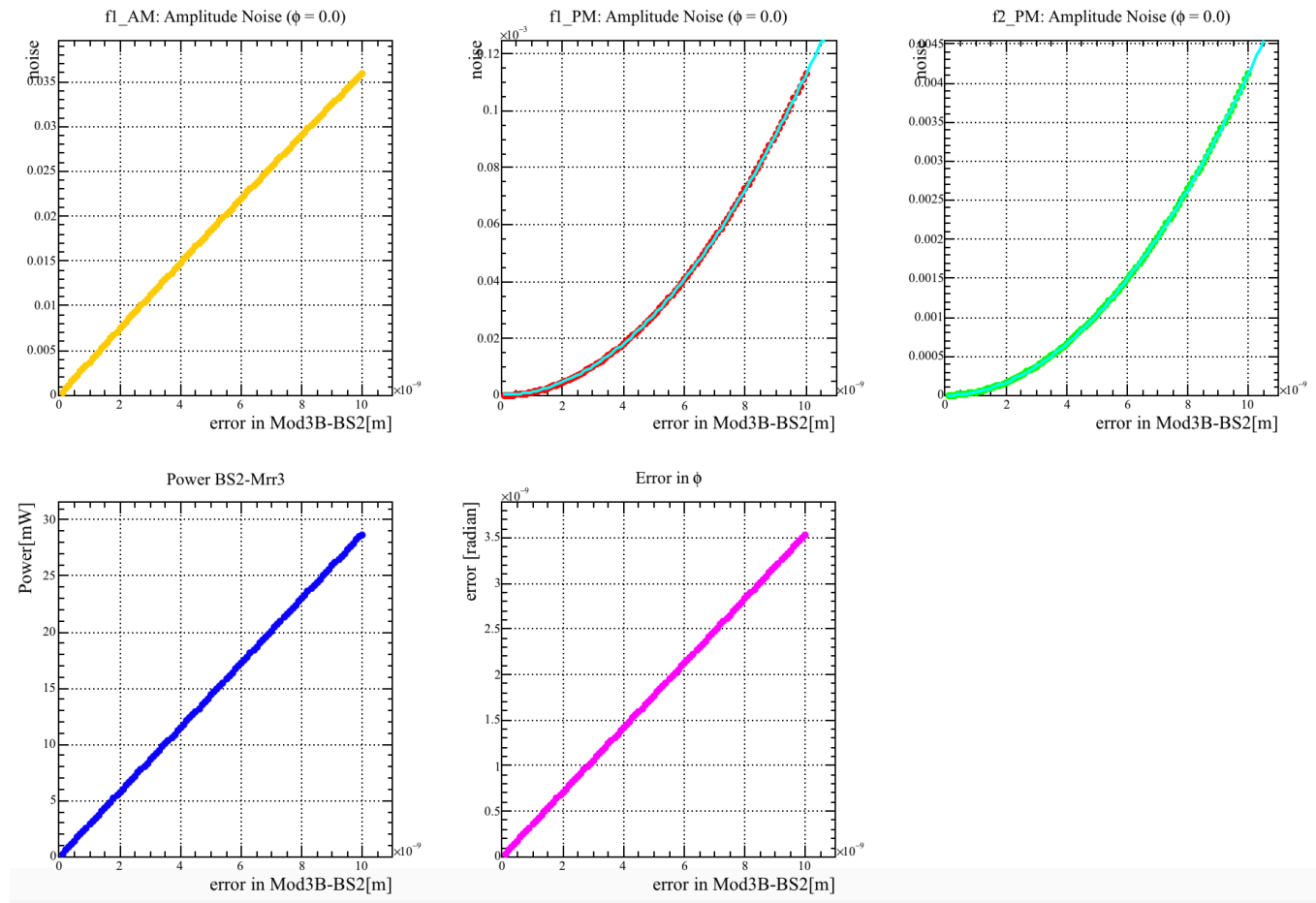
f2: シミュレーション結果から

$$\frac{\delta Amp}{\delta l} \cong 1.4525$$



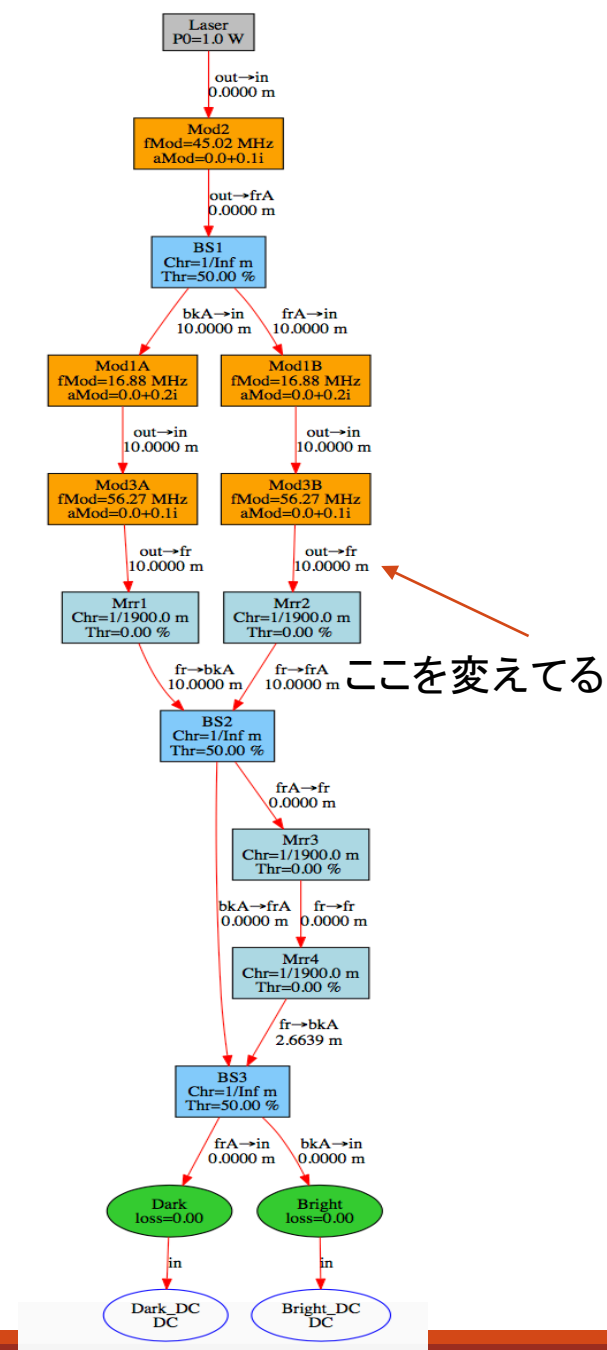
\*f1のAMについては文献の要求値がPMについて求められているので, その正当性は微妙.

# 雑音の要求値: ミッドフリンジ( $\phi = 0$ )



これを見るとPMの変動が長さ変動 $\delta l$ の2次に比例していることがわかる...

$$f1: \delta Amp = 1.07707 \times 10^{12} \times \delta l^2, \quad f2: \delta Amp = 4.12672 \times 10^{13} \times \delta l^2$$



# 雑音の要求値: ミッドFRINGE( $\varphi = 0$ )

正確なミッドFRINGEがわからないため、常に誤差 $\Delta l$ が存在すると仮定し、その周りで(地面振動などにより)時間変動する誤差 $\delta l$ があるとする。

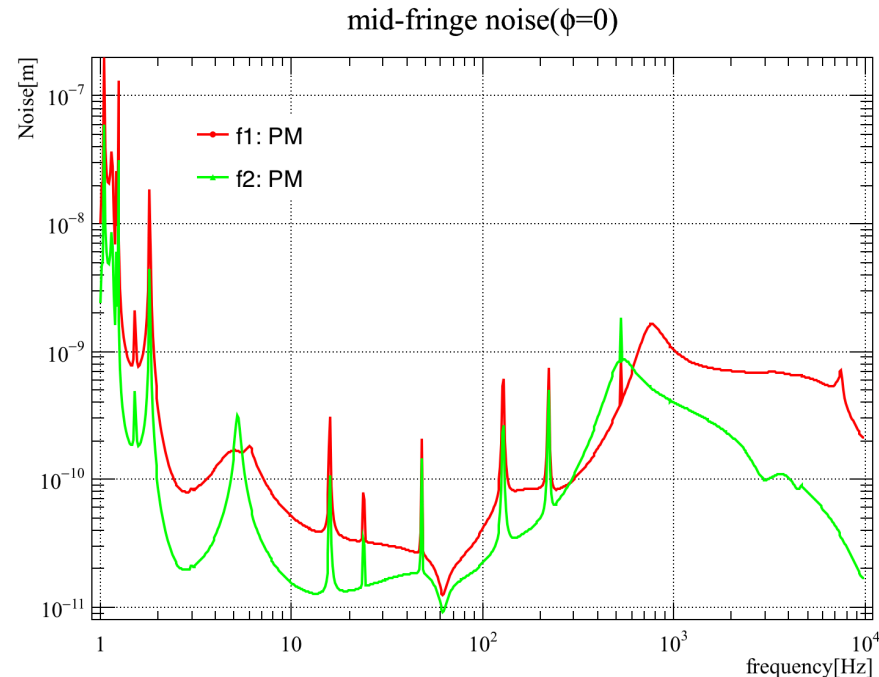
$$\delta Amp \propto \Delta l \times \delta l \longleftarrow \delta l \text{ に対する伝達関数を見積れる!}$$

\* $\Delta l$ はミッドFRINGEにすべきBS直後のパワーのずれが1%(この妥当性が不安)に対応するときの値を用いる。  $\Delta l = 1.659 \times 10^{-9}$  [m]

結局...

$$f1: \frac{\delta l}{\delta Amp} = 5.596 \times 10^{-4}$$

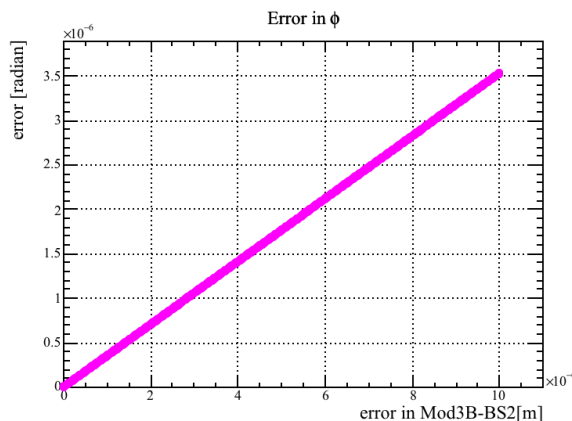
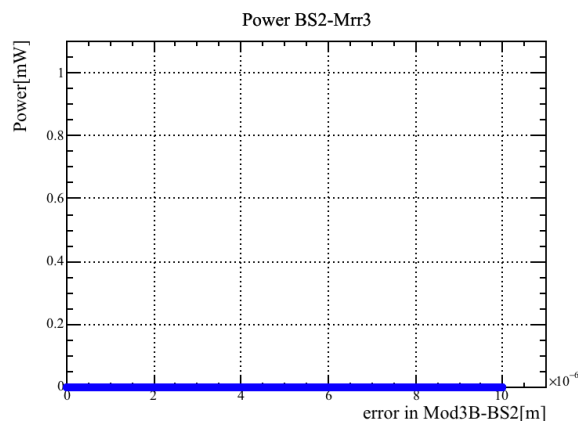
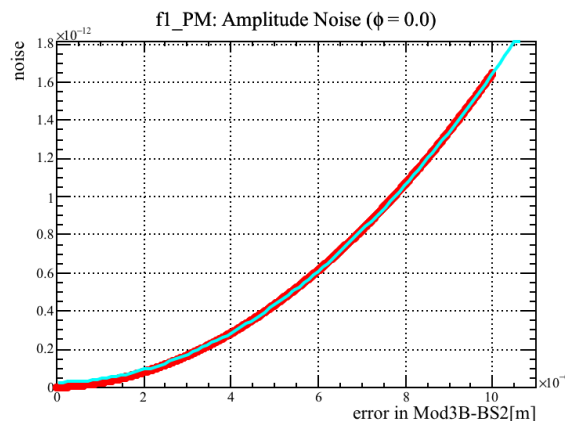
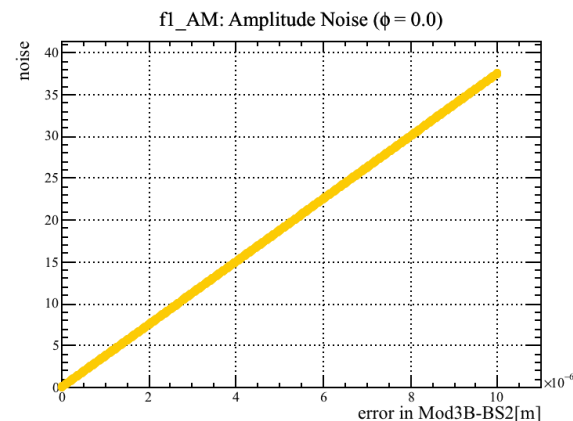
$$f2: \frac{\delta l}{\delta Amp} = 1.461 \times 10^{-5}$$



# 雑音の要求値: 位相差 $\varphi$ ( $\varphi = 0$ )

Optickle上では光路長により調整 ↔ 実際にはPhase Shifterにより調整

→ **Optickleではミッドフリンジを保ちつつ位相差を変えるため"マクロな"長さを変える**



→ 
$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Amp \propto 1.6183 \times 10^{-2} \times \delta l^2 \\ \frac{\delta \phi}{\delta l} = 3.5378 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

→ 
$$\delta Amp \propto 1.2929 \times 10^{-1} \times \delta \phi^2$$

またも2次に比例...



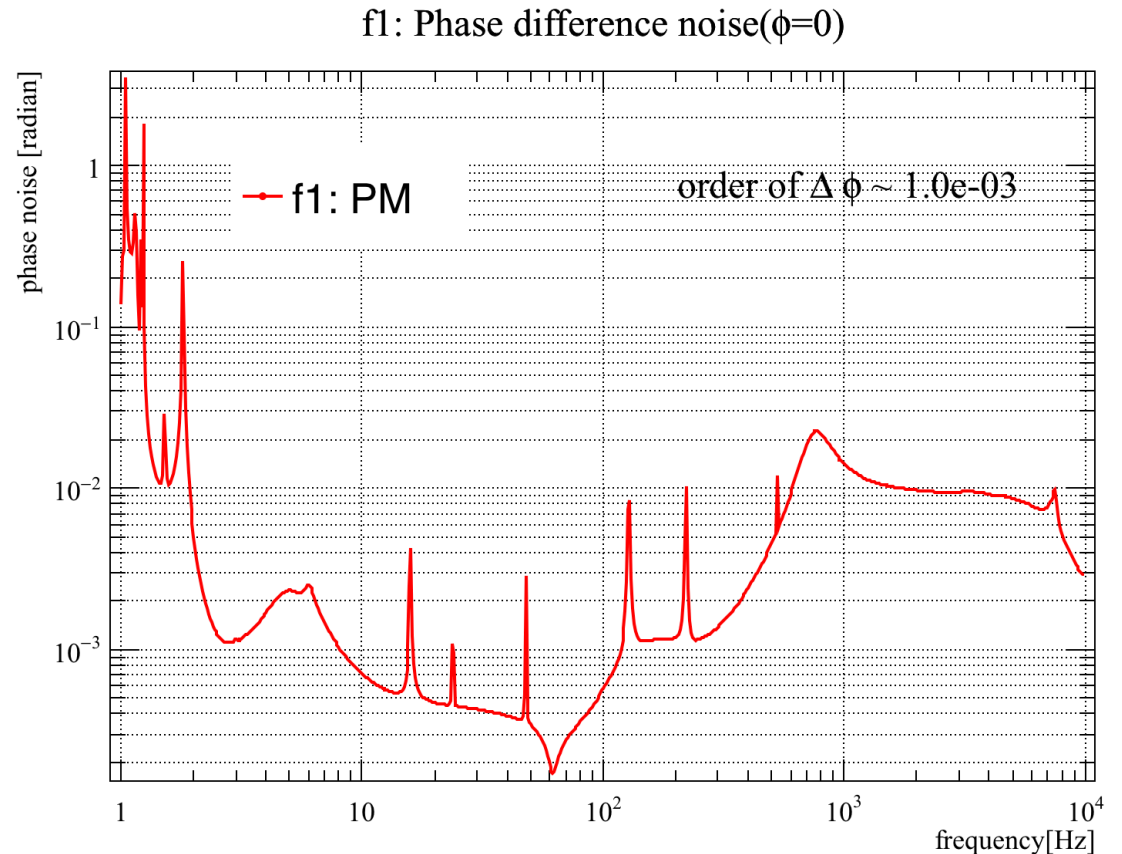
# 雑音の要求値: 位相差 $\varphi$ ( $\varphi = 0$ )

ミッドフリンジの時と同様の仮定を用いるが...

$\Delta\varphi$ のオーダーがよくわからないので...

ミッドフリンジの時に用いた $\Delta l \sim 10^{-9}$   
Carrierレーザーの波長 $\lambda_c \sim 10^{-6}$

$\Delta\varphi \sim \Delta l / \lambda_c$ と仮定して適当に $\Delta\varphi \sim 10^{-3}$ を入れてみた



# Future Work

- **Phase Noiseの関係式の問題を早く解決.**
- **EOMの変換効率の差に対する要求値を出す.**
  - \*setDriveOffset(?)とかでEOMの変調位相をずらしていく？