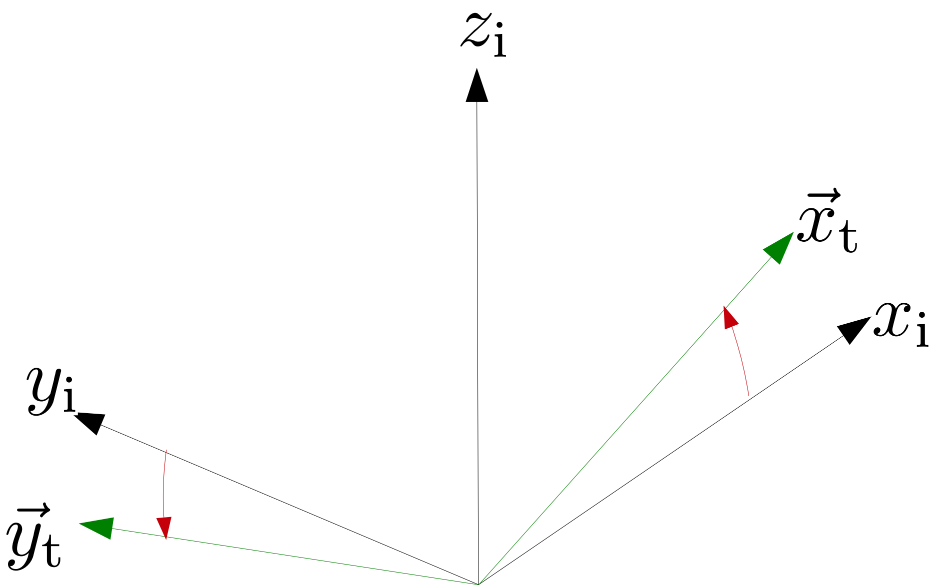
MIF座標系とIOO座標系の変換

真上から見ると，KAGRAのX,Yトンネルは直交している

しかし実際にはトンネルは1/300傾いている

$x_{\rm i}, y_{\rm i}, z_{\rm i}$ ：IOO座標系の軸。原点はBSに取ってある。

$\vec{x}_{\rm t}, \vec{y}_{\rm t}$ ：トンネルの方向を示す単位ベクトル

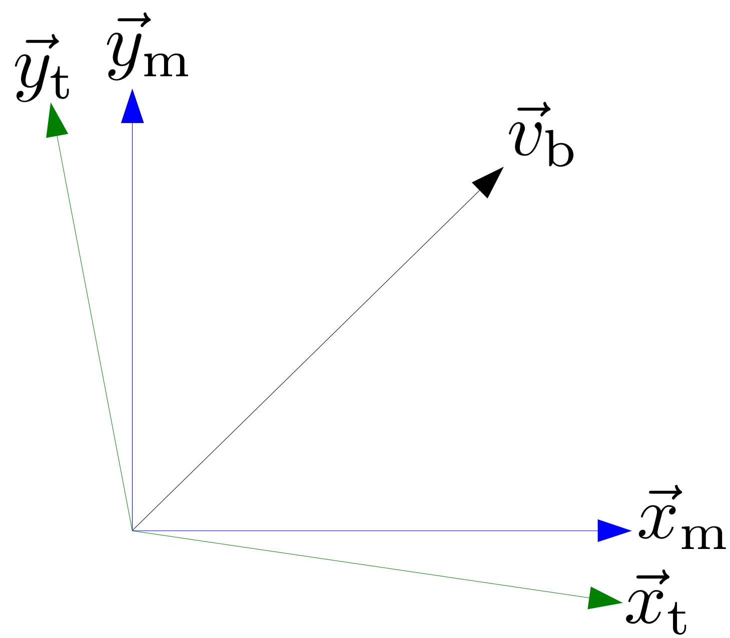


$\vec{x}_{\rm t}$と$\vec{y}_{\rm t}$は直交していない

なす角は90.00064度

$\vec{x}_{\mathrm{t}}$と$\vec{y}_{\mathrm{t}}$が張る平面上に，MIFを構築(MIF平面)

MIF平面を真上から見ると



$\vec{x}_{\mathrm{m}}, \vec{y}_{\mathrm{m}}$: MIF平面上で直交する単位ベクトル。$\vec{x}_{\mathrm{t}}, \vec{y}_{\mathrm{t}}$ と角の二等分線$\vec{v}_{\mathrm{b}}$を共有。
干渉計の腕はこれらのベクトルの延長上に作られる。
これらは，MIF座標系の基底ベクトル(x軸，y軸)
MIF座標系のz軸基底ベクトルは，MIF平面の法線ベクトル

$\vec{x}_\mathrm{m}, \vec{y}_\mathrm{m}$ のIOO座標系における成分を知りたい

$\vec{x}_\mathrm{t} \propto (300, 0, 1)$ $\vec{y}_\mathrm{t} \propto (0, 300, -1)$ は分かっている。

まずは，MIF平面の法線ベクトル($\vec{z}_\mathrm{m}$)を外積 $\vec{x}_\mathrm{t} \times \vec{y}_\mathrm{t}$ から計算する。

$\vec{v}_\mathrm{b}$を$\vec{z}_\mathrm{m}$周りに±45度回転させて, $\vec{x}_\mathrm{m}$と $\vec{y}_\mathrm{m}$ を得ること考える。

$\vec{z}_\mathrm{m}$周りのθ 回転を表すQuaternionは，

$$Q = [\cos(\theta/2), \vec{z}_\mathrm{m} \cdot \sin(\theta/2)]$$

$$Q^{-1} = [\cos(\theta/2), -\vec{z}_\mathrm{m} \cdot \sin(\theta/2)]$$

二等分線 $\vec{v}_\mathrm{b}$ に対応するQuaternion $P = [0, \vec{v}_\mathrm{b}]$ を用いると，

$R = Q \cdot P \cdot Q^{-1}$ のベクトル部を$\theta = \pi/4$ と $\theta = -\pi/4$ の場合について計算すれば, $\vec{x}_\mathrm{m}$ と $\vec{y}_\mathrm{m}$ が得られる。

実際に計算されたMIF座標系の基底ベクトルのIOO座標系における成分表示

$$\vec{x}_{\mathrm{m}} = (9.99994445 \cdot 10^{-1}, 5.55546296 \cdot 10^{-6}, 3.33329630 \cdot 10^{-3})$$
$$\vec{y}_{\mathrm{m}} = (5.55546296 \cdot 10^{-6}, 9.99994445 \cdot 10^{-1}, -3.33329630 \cdot 10^{-3})$$
$$\vec{z}_{\mathrm{m}} = (-0.0033333, 0.0033333, 0.99998889)$$

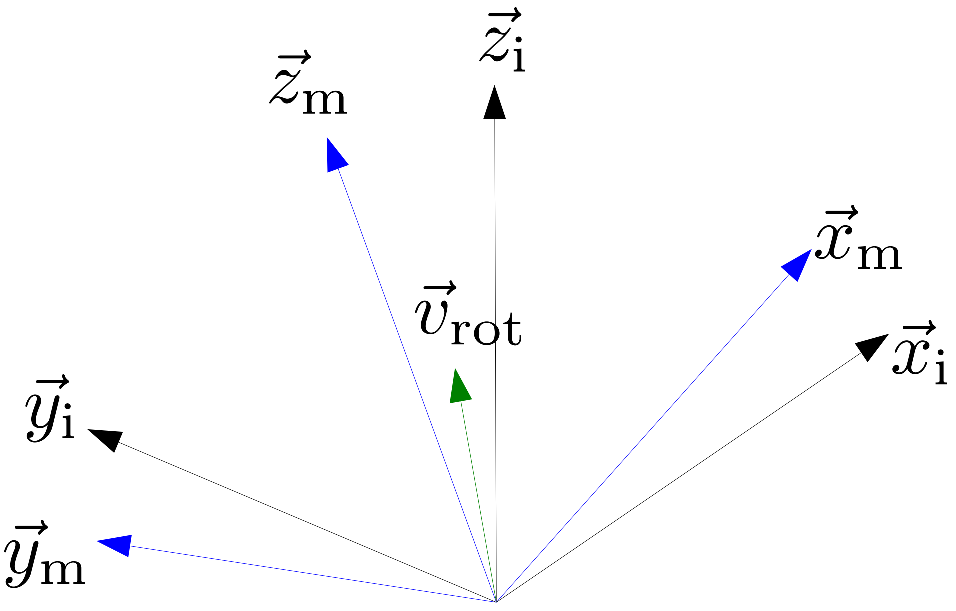
逆にIOO座標系の基底ベクトルをMIF座標系で成分表示すると

$$\vec{x}_{\mathrm{i}} = (9.99994445 \cdot 10^{-1}, 5.55546296 \cdot 10^{-6}, -3.33329630 \cdot 10^{-3})$$
$$\vec{y}_{\mathrm{i}} = (5.55546296 \cdot 10^{-6}, 9.99994445 \cdot 10^{-1}, 3.33329630 \cdot 10^{-3})$$
$$\vec{z}_{\mathrm{i}} = (0.0033333, -0.0033333, 0.99998889)$$

MIF系とIOO系を回転で一致させるには?

$\vec{v}_{\rm rot} = \vec{z}_{\rm m} \times \vec{z}_{\rm i}$ を軸として, $\vec{z}_{\rm m}$ と $\vec{z}_{\rm i}$ がなす角だけ全体を回転させる。

これで, $\vec{z}_{\rm m}$ と $\vec{z}_{\rm i}$ が一致する。後は, $\vec{z}_{\rm i}$ 周りの回転の自由度が残っているように見えるが, 対称性から, x軸, y軸も自動的に一致する。



具体的な $\vec{v}_{\mathrm{rot}}$ 周りの回転操作の計算方法

任意のベクトル $\vec{v}$ MIF系からIOO系へと回転させたい場合，以下の計算をする。

$$\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \vec{z}_{\mathrm{m}} \times \vec{z}_{\mathrm{i}} / (|\vec{z}_{\mathrm{m}}||\vec{z}_{\mathrm{i}}|)$$

$$\theta = \arccos(\vec{z}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{z}_{\mathrm{i}})$$

$$Q = [\cos(\theta/2), \vec{v}_{\mathrm{rot}} \cdot \sin(\theta/2)]$$

$$Q^{-1} = [\cos(\theta/2), -\vec{v}_{\mathrm{rot}} \cdot \sin(\theta/2)]$$

$$P = [0, \vec{v}]$$

$$R = Q \cdot P \cdot Q^{-1}$$

Quaternion R のベクトル部分(第2,3,4成分)が，回転後の $\vec{v}$

(Q,P,R等はQuaternionで，これらの積は，Quaternion積。)