

bKAGRA phase1 の PRMI とその ASC について

JGW-T1605362-v4

榎本 雄太郎

2016 年 9 月 1 日

1 はじめに

bKAGRA phase1 と呼ばれる phase では、power-recycled Michelson interferometer (PRMI) の運転がオプションとして行われる可能性がある。そこで、本文書では power recycling cavity の安定性や最適な Gouy 位相を実現するための PR 系鏡の位置、またその場合における PRMI を構成する鏡の alignment sensing について述べる。

2 PRMI の安定性と PR2/3 の位置

麻生さんの資料 [1] で議論されているように、PRFPMI のときと同じ位置に鏡を置き単に ITMX/Y を取り除いただけでは PRMI は不安定共振器になってしまう。これは、ITM を取り除くと ITM の基材によるレンズ効果がなくなるからである。ところで、同資料における安定性の議論は ABCD 行列を用いて行われており、特に多数 (> 2) の鏡からなる共振器の安定性の議論には ABCD 行列が有用である [2]。

同資料では、PR2 と PR3 をそれぞれ 1 cm ずつお互いに近づければ PRMI を安定共振器にすることができることが示されている。また、サスペンションの可動域から PR2 と PR3 はそれぞれ 1.20 cm までしか動かすことができない。この拘束条件のもとで最も HOM 間隔が広がるよう、それぞれ 1.20 cm ずつ近づけた場合、round trip Gouy phase ζ_{tot} は

$$\cos \zeta_{\text{tot,PIT}} = 0.8750, \quad (1)$$

$$\cos \zeta_{\text{tot,YAW}} = 0.8958 \quad (2)$$

となる。このとき図 1 のような共振の構造となる。ここで、13 次モードの共振が基本モー

どの共振に重なっているが、十分高次であるために考慮しなくてよいと考えられる。どの

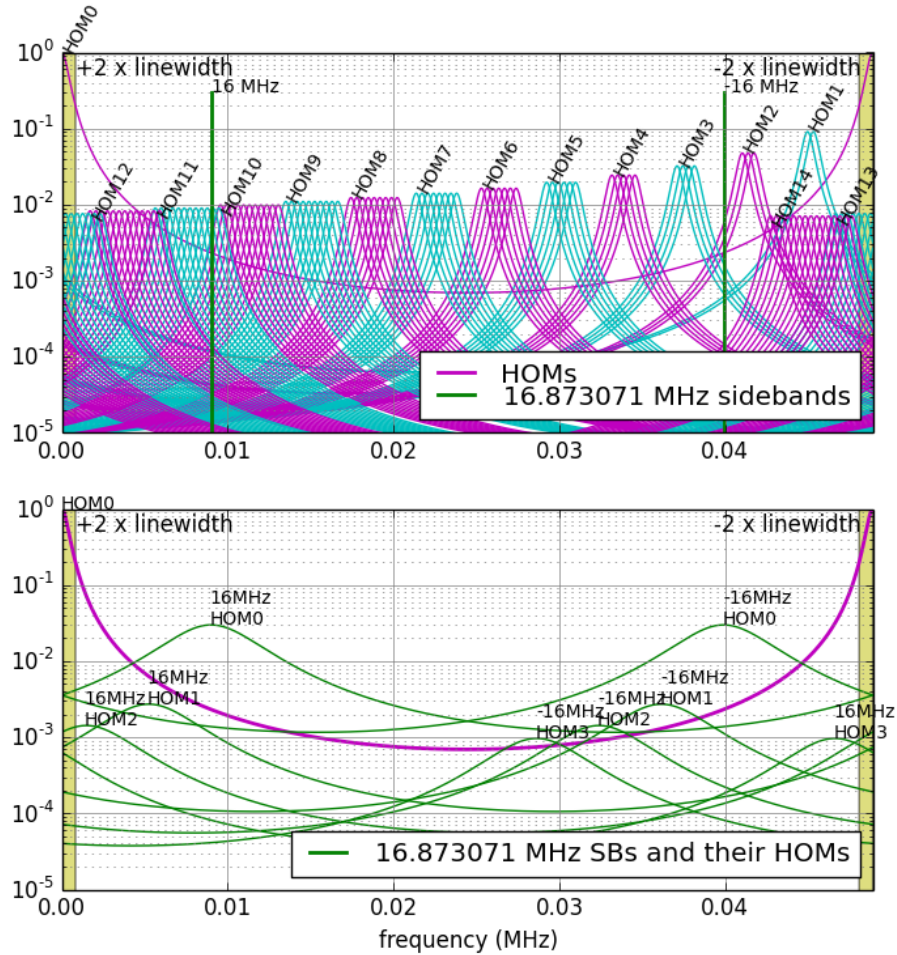


図1 $\cos \zeta_{\text{tot,PIT}} = 0.9303$, $\cos \zeta_{\text{tot,YAW}} = 0.9490$ の場合の HOM と RF サイドバンドの構造。PIT と YAW で Gouy phase が異なるため、各次数の HOM の縮退が解けている。

Gouy phase が最適か、Gouy phase に許される誤差はどれだけか、については RF の 2,3 次モードの共振をどの程度気にしなければいけないかによって変化するため、検討の必要がある。

次に曲率の誤差の影響を見積もる。そのためにまず、 $\cos \zeta_{\text{tot}}$ が各鏡の曲率や鏡間の距

離に対してどれだけ敏感であるかを計算した。結果は以下である ($X = \cos \zeta_{\text{tot}}$)。

$$\frac{dX}{dR_{\text{PRM}}} \cdot R_{\text{PRM}} = -0.0690 \quad (3)$$

$$\frac{dX}{dR_{\text{PR2}}} \cdot R_{\text{PR2}} = 20.31 \quad (4)$$

$$\frac{dX}{dR_{\text{PR3}}} \cdot R_{\text{PR3}} = -168.37 \quad (5)$$

$$\frac{dX}{dR_{\text{ETM}}} \cdot R_{\text{ETM}} = -2.3446 \quad (6)$$

$$\frac{dX}{dL1} \cdot L1 = 0.112 \quad \left(\frac{dX}{dL1} = 7.57 \cdot 10^{-6} / \text{mm} \right) \quad (7)$$

$$\frac{dX}{dL2} \cdot L2 = 146.44 \quad \left(\frac{dX}{dL2} = 0.0133 / \text{mm} \right) \quad (8)$$

$$\frac{dX}{dL3} \cdot L3 = 3.914 \quad \left(\frac{dX}{dL3} = 1.29 \cdot 10^{-6} / \text{mm} \right). \quad (9)$$

$L1, 2, 3$ は、PRM-PR2 の距離、PR2-PR3 の距離、PR3 と ETM の距離である。Wiki によると曲率の誤差は、 $\Delta R_{\text{PRM}}/R_{\text{PRM}} = 20/458 = 0.04$ 、 $\Delta R_{\text{PR2}}/R_{\text{PR2}} = 0.01/3.1 = 3 \cdot 10^{-3}$ 、 $\Delta R_{\text{PR3}}/R_{\text{PR3}} = 0.01/25 = 4 \cdot 10^{-4}$ 、 $\Delta R_{\text{ETM}}/R_{\text{ETM}} = 0.0095/1.9 = 5 \cdot 10^{-3}$ であるので、鏡を設計通りに設置した場合曲率の誤差によって $\Delta X \sim 0.09$ 程度の Gouy phase のずれが想定される。このずれを補正するため、 $L2$ すなわち PR2-PR3 の距離を ~ 7 mm 程度変えなければならないことが想定される。

また、曲率の誤差が一番「不運」だった場合、つまり、PR2 の曲率がデザイン値の $1 + 3 \cdot 10^{-3}$ 倍であり PR3 の曲率がデザイン値の $1 - 4 \cdot 10^{-4}$ 倍である場合に安定共振器を構成できるかについて述べる。このときにサスペンションの動かせる最大限動かし $L2$ を 1.20 cm だけ短くした場合でも、

$$\cos \zeta_{\text{tot,PIT}} = 0.989, \quad (10)$$

$$\cos \zeta_{\text{tot,YAW}} = 1.006 \quad (11)$$

となり、安定共振器を構成できない。

この節の最後に、 ζ_{tot} の測定方法について述べる。PRMI では、通常の共振器のように cavity scan を行うことが困難である。なぜなら、Michelson 部分をロックしたまま PRC 長をスキャンする必要があるからである。cavity scan 以外で ζ_{tot} を測定する方法として、PRMI をロックした状態で、周波数変調から PRC 長のエラー信号までの伝達関数を測定する方法がある [3]。そのような伝達関数の例を図 2 に示す。ここで、01 モードの共振に対応する周波数では、01 モードが共振器で共振し PDH 信号に現れるため、伝達関数に構

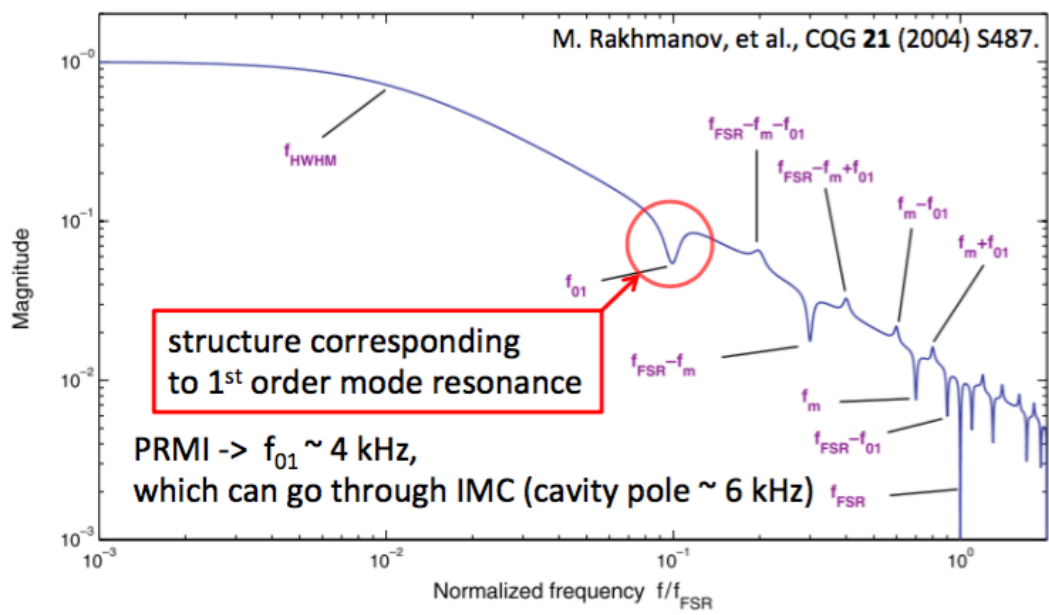


図2 周波数変調から PDH 信号までの伝達関数。01 モードが共振するように、共振器と入射光をミスアラインしている。

造が現れる。この伝達関数の方法は、bKAGRA phase1 の PRMI でも行う事ができると考えられる。

3 PRMI の ASC

次に、PRMI の alignment sensing について議論する。alignment の信号を取得することができるのは、図 3 に示されているような 5 つのポートである。PRMI を構成する 6 つの鏡、ETMX/Y, BS, PRM/2/3 の alignment 信号をこの 5 つのポートからなるべく分離良く取得する方法についてのシミュレーションを Optickle2 を用いて行った。現在までに得られた結果を以下に述べる。使用したパラメータや実行ファイルは <https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/svn/LCGT/trunk/mif/KAGRAOptickle/bKAGRAPhase1/> 以下にある。

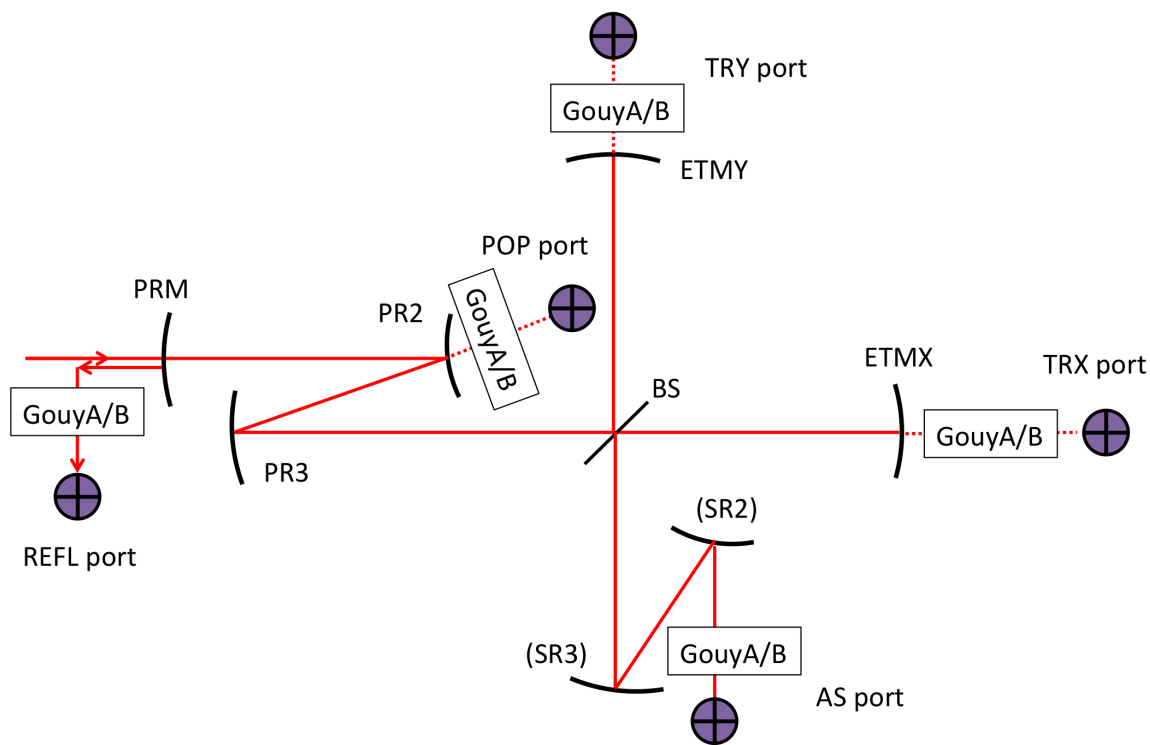


図 3

ASC の pitch の Sensing matrix は以下のようになった:

表 1 ASC sensing matrix (pitch)

	COMM	DIFF	BS	PRM	PR2'	PR3'
REFLA_I	+4.98e+02	+2.36e-01	-4.16e+02	-8.13e+01	-2.08e-01	-1.21e+03
REFLA_Q	-7.37e-01	-2.06e+00	-1.10e+00	+1.87e-01	+2.92e-04	+1.81e+00
REFLB_I	-7.01e-01	-2.91e+00	-1.93e+00	-2.10e+01	-1.70e-03	+3.47e+00
REFLB_Q	+1.51e+00	-6.73e+00	-6.88e+00	-2.16e-01	-6.91e-04	-3.67e+00
ASA_I	+8.76e-03	+1.68e+00	+1.39e+00	-1.24e-03	+1.17e-05	-2.03e-02
ASA_Q	+9.80e-01	+1.87e+02	+1.56e+02	-1.39e-01	+1.31e-03	-2.27e+00
ASB_I	-2.42e-03	-9.15e-04	+1.34e-03	+1.29e-04	+3.15e-07	+1.98e-03
ASB_Q	-2.70e-01	-1.02e-01	+1.50e-01	+1.44e-02	+3.53e-05	+2.21e-01
POPA_DC	+4.04e+01	+1.49e+01	-2.41e+01	+3.91e+02	+8.07e+02	-1.57e+01
POPB_DC	+9.89e+03	+8.60e+00	-8.26e+03	-1.53e+03	-1.10e+02	-2.40e+04
TRXA_DC	-2.30e+01	+1.71e-01	+1.93e+01	-1.23e-01	-5.66e-03	-6.51e-01
TRXB_DC	+9.09e+01	+1.28e-01	-7.59e+01	-1.58e+01	+1.48e-01	-2.59e+02
TRYA_DC	-2.30e+01	+1.71e-01	-1.91e+01	-1.17e-01	-3.25e-03	-6.36e-01
TRYB_DC	+9.09e+01	+1.28e-01	-1.02e+02	-1.58e+01	+1.48e-01	-2.59e+02

ここで、 $COMM = ETMX + ETMY$ 、 $DIFF = ETMX - ETMY$ 、 $PR2' = 0.99 PR2 - 0.122 PR3$ 、 $PR3' = 0.122 PR2 + 0.99 PR3$ である。DC は QPD の DC 出力、I/Q は QPD の RF 出力を復調した際の I/Q 位相成分である。REFL の I/Q は PRCL の信号が pure に I-phase に現れるような復調位相を用いて、AS の I/Q は MICH の信号が pure に Q-phase に現れるような復調位相を用いてそれぞれ定義した。また、A/B はそれぞれ各ポートでの直交する Gouy 位相成分の信号を表す。REFL の A/B は REFLB_I に PRM 以外がなるべく現れないように、AS の A/B は DIFF と BS が pure に ASA_Q に現れるように、POP の A/B は POPA_DC に PR3' が現れないように、TR の A/B は TRXA/TRYA に PR 系の信号が現れないように定義した。PR2' は REFL に現れないような PR2 と PR3 の線型和として定義され、PR3' は PR2' に”直交”するように定義された。

以上のような基底における信号の取得について、以下の表に簡単にまとめる：

表 2 ASC sensing matrix (pitch) の概要

	COMM	DIFF	BS	PRM	PR2'	PR3'
REFLA_I	△(41%)		△(34%)			⊙
REFLB_I		△(14%)		⊙		△(17%)
ASA_Q		⊙	⊙			
POPA_DC				△(48%)	⊙	
TRDIFFA_DC			⊙			
TRCOMMA_DC	⊙					

ここで、 $TRCOMMA_DC = TRXA_DC + TRYA_DC$ 、 $TRDIFFA_DC = TRXA_DC - TRYA_DC$ である。この表の見方は次のようである：各信号（プローブ）に対し最も大きな寄与（伝達関数）をもつ自由度に ⊙ を記し、最大のものと比較して 10% 以上の寄与でそのプローブに混合してしまう自由度に △ を記している。

次に表 2 から考えられる、alignment control の案を述べる。Alignment control を DC ($f \lesssim 0.1 \text{ Hz}$) と AC ($0.1 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 10 \text{ Hz}$) を分けて考えることにする。ここで、この周波数の区分は何か根拠があるものではないことに注意されたい。実際には制御の安定性や雑音の観点から制御の帯域を考える必要がある。私の考える案は次のようなものである：

まず AC を考える。WFS 信号はなるべく広帯域で制御したいこと、ETM に返す信号は WFS 信号にしたいこと、の 2 点から、

$$\begin{aligned}
 & \text{AC :} \\
 & \text{REFLA_I} \rightarrow \text{COMM} \\
 & \text{ASA_Q} \rightarrow \text{DIFF} \\
 & \text{REFLB_I} + 0.014 \cdot \text{ASA_Q} \rightarrow \text{PRM}
 \end{aligned}$$

のようにフィードバックする。

次に DC を考える。DC では、alignment のドリフトを抑えるために、すべて鏡の自由

度を分離したい。そこで、つぎのようなフィードバックをする。

DC :

$$\text{REFLA_I} \rightarrow \text{COMM} \quad (12)$$

$$\text{ASA_Q} \rightarrow \text{DIFF} \quad (13)$$

$$\text{TRDIFFA_DC} \rightarrow \text{BS} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \text{REFLB_I} + 0.014 \cdot \text{ASA_Q} \\ \text{POPA_DC} \\ \text{REFLA_I} + 22 \cdot \text{TRXA_DC} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{PRM} \\ \text{PR2}' \\ \text{PR3}' \end{pmatrix} \quad (15)$$

このフィードバックでは、(14)においてほぼ BS の信号のみが取れる TRDIFFA_DC で BS が制御され、(15)においてほぼ (PRM, PR2', PR3') の信号のみが取れる (REFLB_I+0.015·ASA_Q, POPA_DC, REFLA_I+16·TRXA_DC) で (PRM, PR2', PR3') が制御される。さらに、(13)では DIFF と BS の混合である ASA_Q が DIFF に返されるが、(14)の制御により BS の影響は小さくなっている。(12)でも同様に、COMM と BS と PR3' の混合である REFLA_I が COMM に返されるが、(14), (15)の制御により BS と PR3' の影響は小さくなっている。

以上の制御法のコンセプトは次のようである。

1. 雑音の観点なるべく DC 信号を使用しない
2. ある鏡に注目した時、どの信号がフィードバックされるかが周波数によって変わらない
3. WFS を用いた制御はなるべく広帯域で行う

1,2. について、DC 信号の sensing 雑音の影響が十分小さいことが保証できれば、DC 帯域で DC 信号を用いて BS, PR3' の寄与を (12), (13) から差し引いてもよいと考えられる。2. について、このようにすることで制御ループの単純化を図ることができる。

ここまで述べてきた考え方によって、PRM, PR2', PR3' の対角化も含めて計算した sensing matrix を次に示す。

表3 ASC sensing matrix (pitch)

	COMM	DIFF	BS	PRM	PR2'	PR3'
a	+4.98e+02	+2.36e-01	-4.16e+02	-8.13e+01	-2.08e-01	-1.21e+03
b	+9.80e-01	+1.87e+02	+1.56e+02	-1.39e-01	+1.31e-03	-2.27e+00
c	+3.27e-02	+7.62e-05	+3.84e+01	-5.70e-03	+5.34e-05	-9.33e-02
d	-1.44e+00	+3.42e-03	+1.34e+00	-2.10e+01	-1.70e-03	+3.47e+00
e	+5.63e+00	+5.35e+01	+4.57e+01	-1.19e+01	+8.13e+02	-5.41e+01
f	-4.21e+00	+3.86e+00	+6.74e+00	+3.07e-01	-6.12e-01	-1.22e+03

ここで、

$$a = \text{REFLA_I}, \quad (16)$$

$$b = \text{ASA_Q}, \quad (17)$$

$$c = \text{TRXA_DC} - \text{TRYA_DC}, \quad (18)$$

$$d = \text{REFLB_I} + 0.014 \times \text{ASA_Q}, \quad (19)$$

$$e = \text{POPA_DC} + 19 \times \text{REFLB_I} + 0.266 \times \text{ASA_Q}, \quad (20)$$

$$f = \text{REFLA_I} - 4 \times \text{REFLB_I} - 0.056 \times \text{ASA_Q} + 22 \times \text{TRXA_DC}. \quad (21)$$

4 考察: もっとシンプルにできるか

bKAGRA phase1 の ASC になが求められていて、また様々な制約の中でどこまでやることができるかに依存する問題ではあるが、6 自由度のアラインメント信号の取得と分離はやや複雑すぎるかもしれない。そこでより単純な ASC について以下で考える。

PRMI の共振器、干渉計としてのアラインメントの自由度は、pitch, yaw それぞれにつき、入射光と PRC の (PRM-PR2 での)mode の一致 (2 自由度) と MI 部分のコントラスト (1 自由度) の計 3 自由度である。鏡の自由度の立場では、PRC のフロントミラーの角度と「エンドミラー」の角度、BS を基準としてみたときの ETMX と ETMY の角度の違いの 3 自由度と表現することもできる。したがって、mode match やコントラストだけを気にするのであればこの 3 自由度を制御するだけで十分である。具体的には、REFLA_I を PR3 に、REFLB_I を PRM に、ASA_Q を DIFF にフィードバックする、などであ

る。つまり、REFL の 2 つの WFS と AS の 1 つの WFS は必要であり、それらの信号が 0 になるようにフィードバックを行えば mode match やコントラストの観点では問題ないということである。

参考文献

- [1] Y. Aso, "bKAGRA phase 1 PRMI feasibility study", (2016): [JGW-G1605199](#).
- [2] K. Arai, "On the accumulated round-trip Gouy phase shift for a general optical cavity", (2013): [LIGO-T1300189-v1](#).
- [3] M. Rakhmanov, et al., "Characterization of the LIGO 4 km Fabry-Perot cavities via their high-frequency dynamic responses to length and laser frequency variations", *Class. Quan. Grav.* 21 (2004) S487.