

# 卒業論文

「重力波検出器 KAGRA に向けた  
周波数参照共振器の性能評価」

指導教員 三尾典克 特任教授

平成28年2月提出

東京大学工学部物理工学科

03-130552 塚田怜央



# 目次

<b>第1章</b>	<b>背景</b>	<b>4</b>
1.1	重力波	4
1.2	KAGRA 計画	4
1.2.1	検出原理	5
1.2.2	量子雑音	6
1.2.3	レーザー光源の要求条件と構成	8
1.2.4	KAGRA での周波数安定化	8
1.2.5	参照共振器への要求条件	9
1.3	本研究の目的	13
1.4	先行研究の例	13
<b>第2章</b>	<b>理論</b>	<b>15</b>
2.1	レーザーの雑音	15
2.1.1	スペクトル密度	15
2.1.2	強度雑音	17
2.1.3	周波数雑音	18
2.2	ガウシアンビーム	19
2.2.1	ガウシアンビームの一般解	19
2.2.2	ガウシアンビームの性質	20
2.3	光共振器	24
2.3.1	光共振器の安定条件	25
2.3.2	Free Spectral Range	26
2.3.3	Finesse	29
2.3.4	Transverse Mode Spacing	31
2.3.5	モードマッチング	32
2.4	位相変調	34
2.4.1	サイドバンド	34
2.4.2	Pockels 効果	35
2.5	PDH 法	38
2.5.1	共振器のロックと周波数安定化	38
2.5.2	伝達関数	41
2.6	周波数フィードバック系の基礎	45
2.6.1	レーザー周波数雑音の測定	45
2.6.2	レーザー周波数の安定化	45

2.6.3	共振器の安定度評価	46
<b>第3章</b>	<b>実験系</b>	<b>48</b>
3.1	概要	48
3.2	YAG レーザー	49
3.2.1	NPRO	49
3.2.2	Power supply	50
3.3	ULE 周波数参照共振器	54
3.3.1	Fabry-Perot 共振器	54
3.3.2	真空チャンバー	56
3.3.3	モードマッチング	57
3.4	Filter 回路	59
3.5	EOM	62
3.6	高周波用光検出器	62
3.7	透過光プロファイラー	64
<b>第4章</b>	<b>光共振器の光学特性の測定</b>	<b>65</b>
4.1	FSR 及び鏡の曲率半径の測定	65
4.2	フィネスの測定	67
4.2.1	測定における信号処理論	67
4.2.2	測定での問題点	70
<b>第5章</b>	<b>レーザー周波数の安定化</b>	<b>73</b>
5.1	PDH 法の誤差信号の観察	73
5.2	サーボ系の伝達関数の測定	73
5.2.1	Filter 回路の伝達関数	76
5.2.2	オープンループ伝達関数	79
5.2.3	PDH 法の伝達関数	84
5.3	周波数ドリフトの測定	86
5.4	周波数雑音のスペクトル測定	88
<b>第6章</b>	<b>考察</b>	<b>91</b>
6.1	共振器の安定度要求条件に対する達成度の評価	91
6.2	PDH 法誤差関数の理論値との比較	92
<b>第7章</b>	<b>結論と今後の課題</b>	<b>94</b>
<b>付録A</b>	<b>重力波の初検出</b>	<b>98</b>
<b>付録B</b>	<b>フィルター回路の回路図</b>	<b>101</b>

# 第1章 背景

レーザーは1960年にその歴史が始まって以来 [1]、日進月歩の研究を経て、我々の日常生活のあらゆる応用分野において身近になっており、日々その需要は高まりを見せている。そしてその応用の多様性に伴い、光学機器の発展にも目を見張るものがあると言える。特に複数枚の鏡から成る光共振器は、レーザー雑音の低減などあらゆる用途で用いられ、その汎用性の高さから代表的な光学機器の一つである。そしてそのような用途の一つに、干渉計型重力波検出器があげられる。本研究は、現在日本で進められている干渉計型重力波検出器「KAGRA」 [2] にて将来的に用いられる光共振器に関するものであり、目的はこの KAGRA 計画に大きく依拠している。したがって本研究の背景理解のために、重力波と KAGRA について以下で簡単に説明する。

## 1.1 重力波

重力波とは、物質の質量がもたらす4次元時空の歪みが波となり光速で伝播する現象であり、1916年に A.Einstein により一般相対性理論の中でその存在が予言された。重力波を偏光の違いも踏まえて視覚的に表現すると図 1.1 のようになる。

(検出可能な)重力波の発生源は、大質量かつ高密度の天体(中性子星連星や、ブラックホールなど)による加速度運動と言われている。検出の意義としては、第一に一般相対性理論の実験的検証がある。また、その他の質量分布による雑音の影響が電磁波と比べて少ないために、従来の電磁波天文学とは一線を画する新たな天文学を創出する可能性を秘めている。加えて、インフレーション時に生じた背景的な重力波を観測することで、インフレーション理論の裏付けを可能にするという期待もされている。[3] このように有益な情報を持ちうる重力波は存在の予言から苦節 100 年を経て<sup>1</sup>、2016年2月に初めて直接検出の報告がなされた [5](付録 A 参照)。そして歴史的な黎明期を迎えた重力波天文学のさらなる発展のため、世界中で重力波検出ネットワーク形成に向けたプロジェクトが推進されており<sup>2</sup>、その中でも日本の KAGRA 計画を以下で述べる。

## 1.2 KAGRA 計画

現在世界で主流となっている重力波検出器は、図 1.3 のようなマイケルソン干渉計型であり KAGRA に関しても同様な方式を採用している。入射されたレーザーはビームスプ

<sup>1</sup>一方、重力波の存在が間接的に裏付けられた事例はある。R.A.Hulse& J.H.Taylor の行ったパルサー連星 PSR1913+16 の軌道周期の観測により、その時間変化が一般相対性理論での理論曲線と高精度で一致していることが確認されている。[4]

<sup>2</sup>海外の代表的な検出器の例として、アメリカの LIGO、イタリアの Virgo があげられる。[6][7]

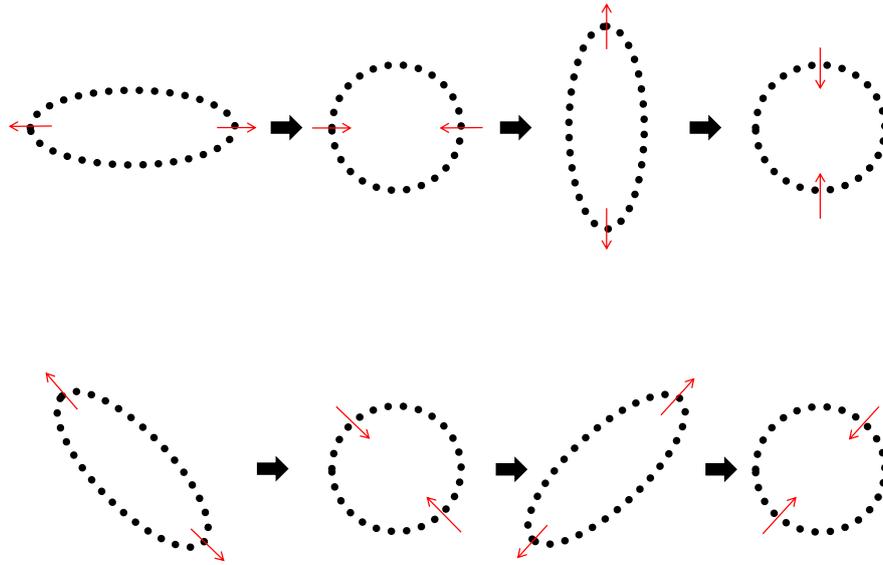


図 1.1: 重力波の偏光モード

リッター (BS) によって一方に反射、もう一方に透過され各アームを進む。そのアームの終端にある鏡より反射された各レーザーは、再度 BS を経由して最終的に出射側の光検出器 (PD) に到達するという構成である。KAGRA の場合この基線長が 3km と大型で、地面振動が比較的少ないとされる岐阜県神岡鉱山の地下に現在建設中であり、2018 年の本格始動を目指している。低レベルの地面振動を考慮した建設地の選定以外にも、熱雑音低減のための冷却化、感度向上のための腕共振器など様々な工夫を凝らしている。

### 1.2.1 検出原理

重力波の検出原理を直感的に説明しよう。図 1.1 からわかるように重力波により空間の直交する方向が逆位相で伸長または収縮するため、各アーム長が逆位相で変化し、その情報がレーザーの干渉信号として検出されることになる。以上のことを、定式化して示す。

図 1.3 において入射するレーザー光の角周波数を  $\omega$  として、電場を複素表示で以下のように表す。

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} \quad (1.1)$$

そして BS で分岐されたレーザー光の各電場はそれぞれ次のように表せる。

$$E_x(t, x) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega t - kx)} \quad E_y(t, y) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega t - ky)} \quad (1.2)$$

$x, y$  の下添え字はそれぞれのアームの方向に進むレーザーを示し、 $k$  はレーザーの波数である ( $\lambda$  を波長として  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ )。アーム長をそれぞれ  $L_x, L_y$  とすると、アームを往復した後に PD に到達する電場は

$$E_{PD}(t) = \frac{E_0}{2} \left( e^{-i(\omega t - 2kL_x)} + e^{-i(\omega t - 2kL_y)} \right) \quad (1.3)$$

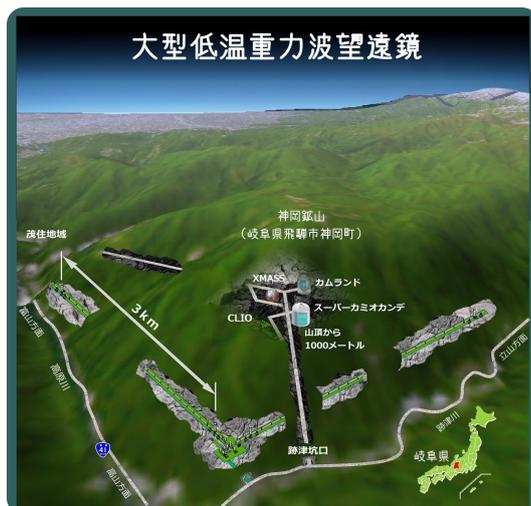


図 1.2: KAGRA の概略図

と、それぞれの電場の和となる。また BS における固定端反射での位相反転は、今回本質的ではないため無視した。したがって PD で検出される光強度は

$$P_{PD}(t) = |E_{PD}(t)|^2 \quad (1.4)$$

$$= \frac{E_0^2}{2} (1 + \cos 2k(L_x - L_y)) \quad (1.5)$$

$$= \frac{E_0^2}{2} (1 + \cos 2k\delta L) \quad (1.6)$$

以上より各アーム長の差 ( $\delta L = L_x - L_y$ )、すなわち重力波の情報が PD で検出される信号の AC 成分に含まれていることが見て取れる。理論的には、 $\delta L/L \sim 10^{-21}$  と予測されており、重力波検出が究極的な計測技術を必要とすることが分かるだろう。ここで示した動作原理は、マイケルソン干渉計型重力波検出器の最も簡潔なモデルであり、実際はアーム長を変化させる多くの雑音(次節で詳説)が存在し、S/N 比向上のためのアーム長制御などで多くの複雑な手法が用いられている。[3]

## 1.2.2 量子雑音

重力波検出を妨げる雑音のうち、地面振動や熱雑音は干渉計とは無関係な雑音源に起因するもので物理的には完璧にキャンセルすることも可能である。その一方、光の持つ量子的なゆらぎに由来する<sup>3</sup> 雑音(量子雑音)も存在し、究極的な感度を要する重力波検出では、最終的にこれらの雑音が感度を制限することになる。したがって量子雑音の理解が不可欠であるので、この節ではショット雑音と輻射圧雑音を以下に詳説する。

### ショット雑音

光強度を光検出器で測定する際、光子数ゆらぎもそのまま測定されてしまい、ア

<sup>3</sup>量子光学の観点から考えると、Michelson 干渉計の検出ポートから侵入する真空場のゆらぎが引き起こしている。

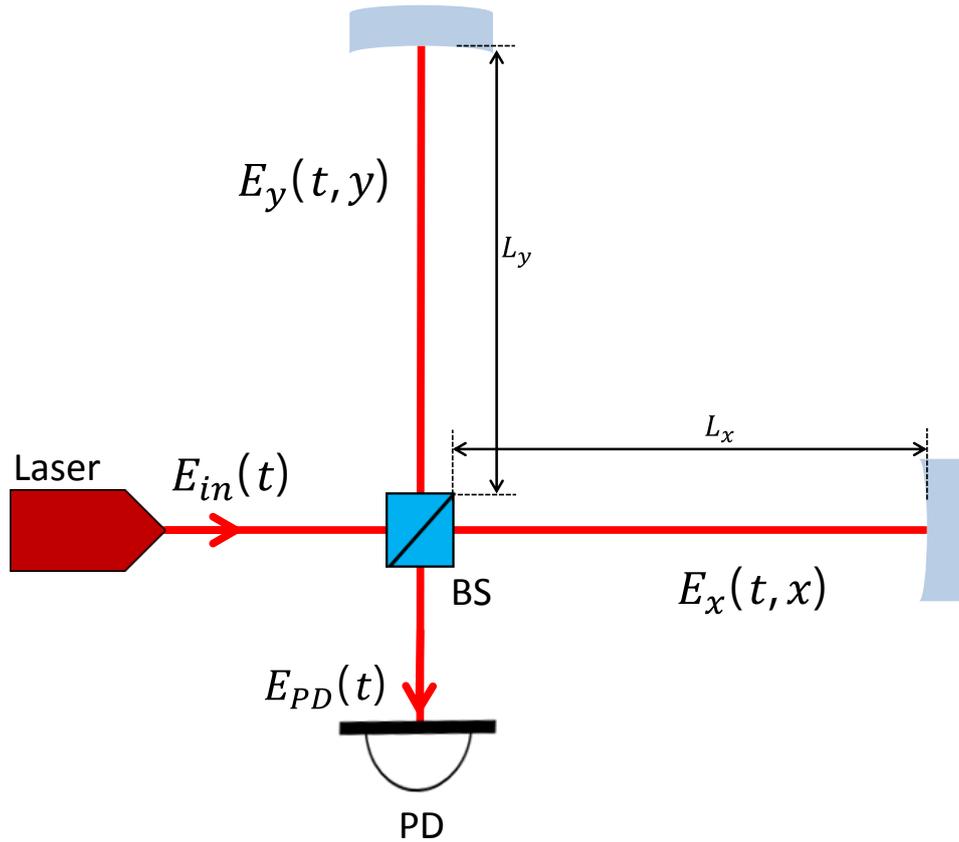


図 1.3: マイケルソン干渉計の概略図

長変位の検出感度に制限がかかってしまう雑音である。これはレーザーの周波数雑音が重力波の検出ポートにカップリングしたものである。レーザーのパワーを  $I_0$  として重力波信号との S/N 比は

$$S/N \propto \sqrt{I_0} \quad (1.7)$$

であることが知られている。

### 輻射圧雑音

光子は運動量を持ち、反射の際に運動量変化分だけの力積を反射物に加えている。それが光子数ゆらぎにより一定ではなくなり、重力波検出器の場合、アーム終端の鏡が揺れ重力波信号の雑音となる。これはレーザーの強度雑音が重力波チャンネルにカップリングしたものである。レーザーのパワーを  $I_0$  として重力波信号との S/N 比は

$$S/N \propto \frac{1}{\sqrt{I_0}} \quad (1.8)$$

であることが知られている。

### 1.2.3 レーザー光源の要求条件と構成

より効率的な重力波検出を目指して、KAGRA で用いられるレーザーには様々な要求がなされており、その一部を表 1.1 に示す。ここで特に重要なのが、レーザーの出力に関する条件である。量子雑音に対する S/N 比の式 1.7, 1.8 でわかるように、レーザーに内在する二つの量子雑音はレーザーパワーによってトレードオフの関係にある。すなわちパワー  $I_0$  の増大によってショット雑音は向上し、輻射圧雑音は悪化するので、量子雑音の 2 乗和を最小にする最適な出力が存在する。それに加えてレーザーの吸収による熱雑音も考慮に入れ、レーザー出力への要求値が設定されている。また表 1.1 のほかに、レーザーの低強度雑音、低周波数雑音も求められている。これらレーザー雑音は、2 本の腕共振器の非対称性により重力波チャンネルにカップリングし、それ以外に検出器の稼働という面でも光共振器のロック (§2.5 参照) には低雑音が必要であるからだ。本研究室では、これら種々の

表 1.1: レーザー光源の要求条件

出力パワー	波長	偏光	横モード
180W	1064nm	直線偏光	TEM <sub>00</sub>

要件を満たすレーザー技術の開発に従事しており、現段階で図 1.4 に示されるような構成を予定している。NPRO (§3.2.1 にて後述) で増幅された種光は二つに分岐された後、それぞれファイバー増幅器にカップリングされ 40W まで増幅される。そして二つのレーザーはコヒーレント加算 (位相を合わせて電場振幅を足し合わせる) 後に固体増幅器を通り要求出力の 180W に到達するという目算である。KAGRA 用高出力レーザーは本研究の範疇を超えるため、これ以上の詳細は割愛する。

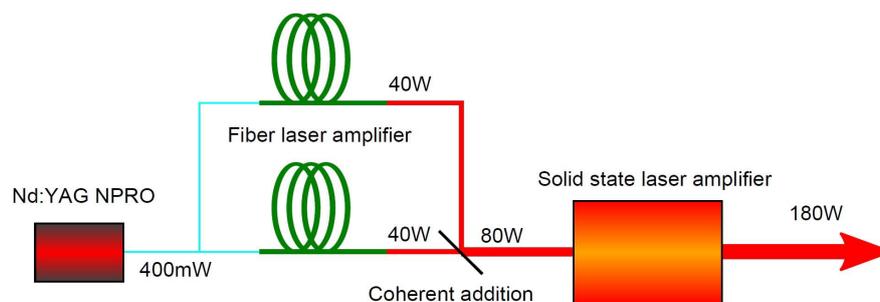


図 1.4: KAGRA 用レーザー光源の構成 [12]

### 1.2.4 KAGRA での周波数安定化

ここでは KAGRA で予定されているレーザー周波数安定化システムの概要を述べる。本研究は、2018 年稼働を目指す bKAGRA の周波数安定化にて用いられる光共振器の性能評価であるので、背景知識として研究対象の光共振器が将来どのように活用されるかを理解する必要がある。

まず一般にレーザーの周波数安定化はいくつか手法があるが、高いS/N比という点で光共振器を用いた方法、特に Pound-Drever-Hall(PDH) 法 (§2.5 参照)[9] が主流になっている。簡単に述べると PDH 法とは、光共振器への入射光に Electro-Optic Modulator(EOM) で位相変調 (§3.5 参照) をかけ、反射光を復調 (EOM での変調信号を畳み込ませること) することで誤差信号を抽出する手法である。この誤差信号を、光源のチューニング端子にフィードバックすることで周波数安定化、共振器長の変調端子にフィードバックすれば共振器のロックが可能となる。さらにこの誤差信号は、共振器の cavity pole や共振周波数ゆらぎに依存するため、異なる共振器から段階的に誤差信号を取得し、それぞれ高精度な周波数帯域での信号を光源に返すことでより高度な周波数安定化を実現させることができる。

KAGRA の場合、3 種類の誤差信号を用いて図 1.5 で示すような周波数安定化を行う。誤差信号はそれぞれ周波数参照共振器 (図 1.5 中の "RefCav")、IMC、腕共振器<sup>4</sup>での PDH 法により取得される。共振器の構造は、参照共振器が固定型、IMC と腕共振器が懸架型で、各々の共振器長はそれぞれ 10cm, 26m, 3km である。一般的に長さ  $l$  の懸架振り子は  $\sqrt{g/l}/2\pi$ [Hz] の共振周波数を持ち、それより高い周波数の振動に対して防振系として機能する。そして IMC、腕共振器ともに参照共振器よりも巨大であるため、高周波帯域 (10Hz ~ 1MHz) では防振された IMC と腕共振器からの誤差信号がより雑音が少ない。よって図 1.5 で見るように、これら懸架型共振器からの誤差信号の高周波成分を参照共振器手前の AOM にフィードバックしている。最終的に broad band EOM がアクチュエーターとして働き、この誤差信号が主レーザーへと返される。一方、低周波帯域 (~10Hz) では固定型の参照共振器がより安定であるので参照共振器からの誤差信号はそのまま光源の温調端子とピエゾ端子に繋がれている。また、IMC と腕共振器からの誤差信号の低周波成分は、それぞれ共振器自身のエンドミラーにあるアクチュエーターにフィードバックされる。このように各共振器の特徴を活用し、帯域ごとに異なるフィードバック系を組んで周波数安定化に取り組んでいる。ここで本研究で用いる参照共振器の用途をまとめると、主に低周波帯域での周波数安定化を担っており、かつ IMC と腕共振器における低周波帯域での共振器長ロックの指標になっている。したがって参照共振器は、KAGRA においてレーザーの周波数安定化のみならず、検出器全体の稼働に欠かせない役割を果たしている。

## 1.2.5 参照共振器への要求条件

### 長期安定度

レーザー周波数の長期安定度とは周波数ゆらぎ DC 成分の安定性を意味する。§1.2.4 で述べたように、レーザーの長期安定度は最終的に参照共振器の安定度によって決まるので、参照共振器長ができるだけ一定でなければならない。そもそも長期安定度が必要である理由は、干渉計全体がロックされ稼働している状態での要求条件とは別に、腕共振器の同一縦モードに常にロックできる状態へと操作する際の簡便さのためである。そのために、「長時間 (例えば 1 日) で周波数ドリフトが腕共振器の FSR (§2.3.2 参照) よりも十分小さい」という要求条件が課される。暫定的には、参照共振器による周波数ドリフトが 100[mHz/sec] 以下のオーダーであることが求め

<sup>4</sup>厳密には二つの平均腕共振器長  $\frac{L_x+L_y}{2}$  の変位が信号として反射光に現れ、その誤差信号を用いている。

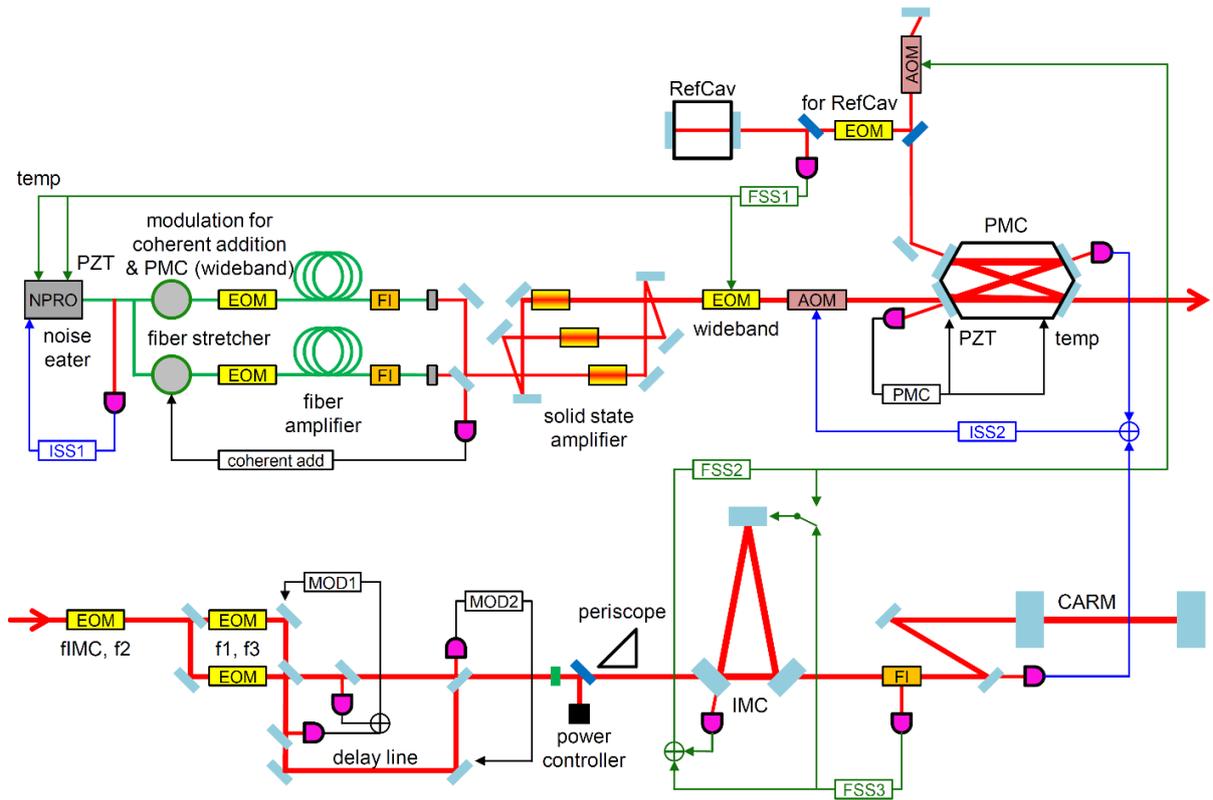


図 1.5: KAGRA での周波数安定化の概念図 [11]

省略用語はそれぞれ NPRO (Non-Planar Ring Oscillator), FI (Faraday Isolator), AOM (Acoust Optic Modulator), PMC (Pre-Mode Cleaner), IMC (Input Mode Cleaner), ISS (Intensity Stabilization Servo), FSS (Frequency Stabilization Servo), CARM (Common length change of the ARM cavities) である。

られている。[11] これは 1 日で 8.6kHz 分の周波数ドリフトに相当し、腕共振器の FSR50kHz に十分収まっている。

### 高周波帯域までの共振器雑音の要求値

長期安定度に加えて、干渉計が実際にロックされた状態で参照共振器の安定度に課される要求条件を議論する。§1.2.4 で示した多段周波数安定化システムをブロックダイアグラムにすると図 1.6 になる。図中の  $F_\alpha$  は NPRO 及び各共振器での共振周波数ゆらぎ、 $C_\alpha$  は各共振器での cavity pole (§2.5.2 参照) をカットオフ周波数とする一次ローパスフィルター、 $D_\alpha$  は周波数 - 電圧変換係数、 $E_\alpha$  は各フィルター回路の伝達関数、 $H_\alpha$  は電圧 - 周波数変換係数を示す。システム全体は大変複雑であるが、入力雑音はせいぜい  $F_{laser}, F_{RC}, F_{MC}, F_{IFO}$  の 4 つであり、最終的に安定化されたレーザーの周波数雑音  $F_{stab}$  は

$$F_{stab} = X \cdot F_{laser} + Y \cdot F_{RC} + Z \cdot F_{MC} + W \cdot F_{IFO} \quad (1.9)$$

と表される。 $X, Y, Z, W$  は各雑音源から  $F_{stab}$  への伝達関数である。 $F_{stab}$  は重力波検出ポートにカップリングする信号なので<sup>5</sup>、ここに検出器自体の感度要求値を代入

<sup>5</sup>2 つの腕共振器長が厳密に等しければ干渉計の検出ポートには周波数雑音は現れないが、実際には腕共

することで

$$F_{RC}^{(req)} = \frac{1}{Y} F_{stab}^{(req)} \quad (1.10)$$

と、 $F_{RC}$  への要求条件が導かれる。KAGRA グループによる  $F_{RC}^{(req)}$  のシミュレーション結果を図 1.7 に示す。§1.2.4 で述べた周波数安定化サーボ系からわかるように、参照共振器の安定度が検出器の感度曲線に最終的に与える影響は、サーボ系の大きなループゲインによって抑えられている。したがって、図 1.7 で示した要求値はさほど厳しくはなく、参照共振器の本来の役割から考えても長期安定度に主眼が置かれるべきであろう。

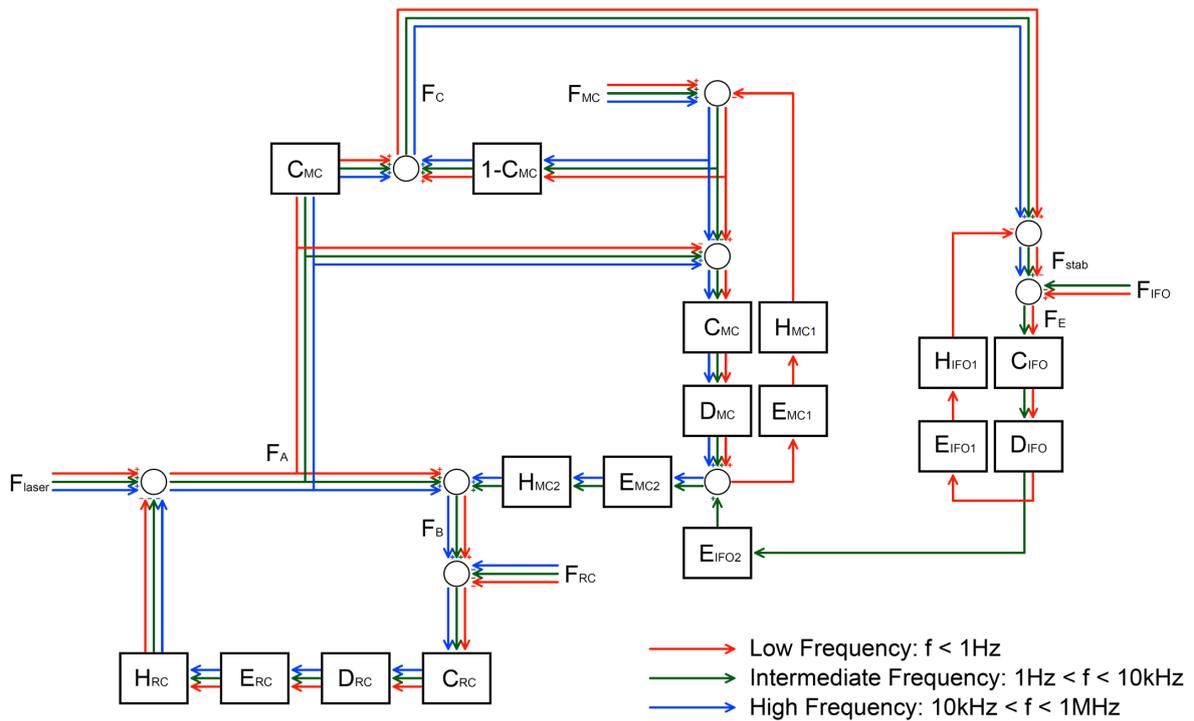


図 1.6: KAGRA の多段周波数安定化システムのブロックダイアグラム [13]  
下添え字の RC, MC, IFO はそれぞれ参照共振器、IMC、腕共振器の略称である。

振器の非対称性から重力波の検出感度を制限してしまう。

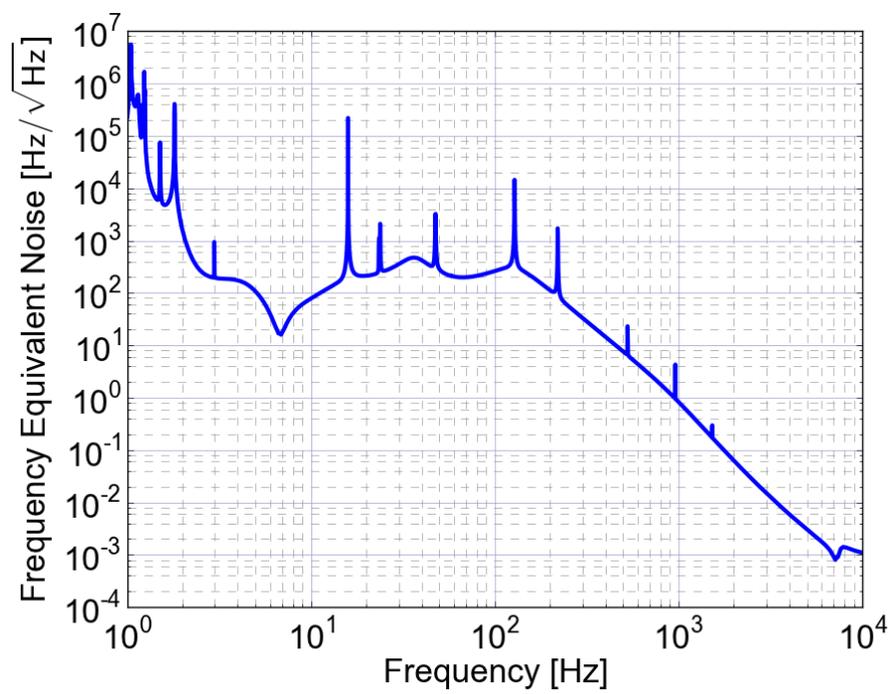


図 1.7: 参照共振器の共振周波数ゆらぎに対する要求値曲線 [18]

### 1.3 本研究の目的

当初の目的は、参照共振器が持つ共振周波数ゆらぎの絶対安定度評価であったが、実験装置と時間の制約上、以下の2点を最終目的とした。

- 参照共振器の光学特性 (FSR, フィネスなど) の測定
- レーザー雑音を含む共振周波数ゆらぎへの上限の見積もりと、その評価

### 1.4 先行研究の例

レーザー周波数安定化の先行研究として、アメリカのLIGO計画における実験をあげる。[10]LIGOの入射光学系(図1.8)はKAGRAと類似しており、同様の周波数安定化法を採用している。周波数雑音測定と安定度評価の基礎理論は§2.6を参照されたい。Free runningは周波数安定化なしでのPMC透過後のレーザー周波数雑音、DBB<sup>6</sup> measurementはサーボ系を閉じた状態での周波数雑音を示している。in-loopは誤差信号を周波数換算したものである。in-loopの雑音は要求値の黒線を下回っているが、周波数安定化後の本質的な雑音を示すDBB measurementは要求値を満たしていない。著者グループは論文内で、DBBと呼ばれる測定装置の検出雑音が制限をかけていると推測している。少なくともin-loopでの雑音が要求値を下回り、サーボ系のゲインが十分大きいことがプロットによって確認できる。

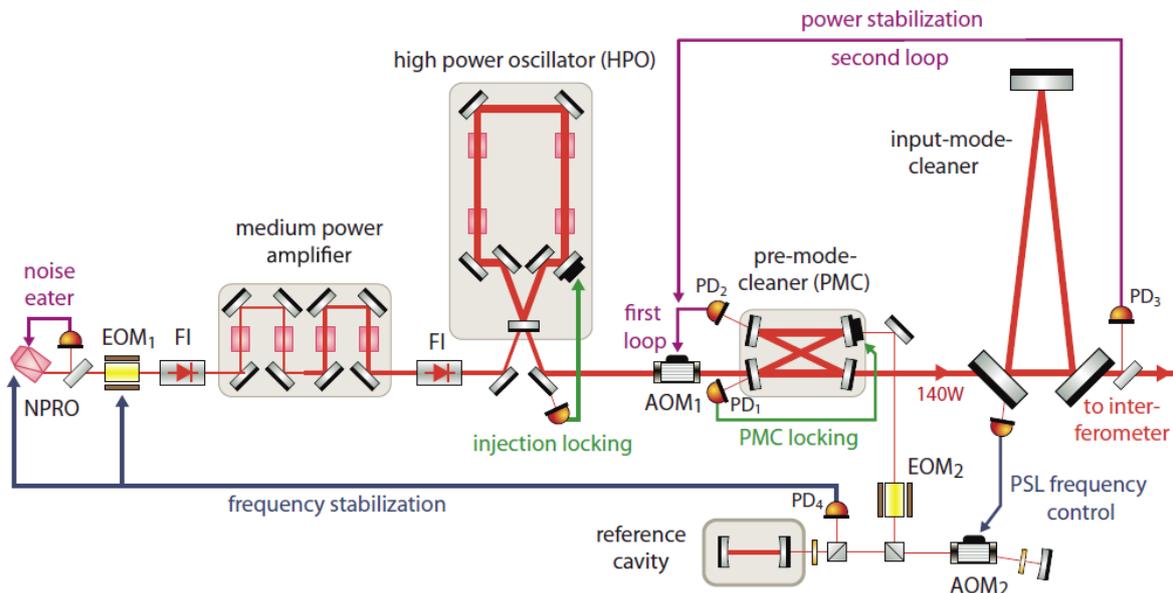


図 1.8: LIGO 入射光学系の概略図 [10]  
各略語は図 1.5 を参照のこと

<sup>6</sup>Diagnostic broadband の略称である。

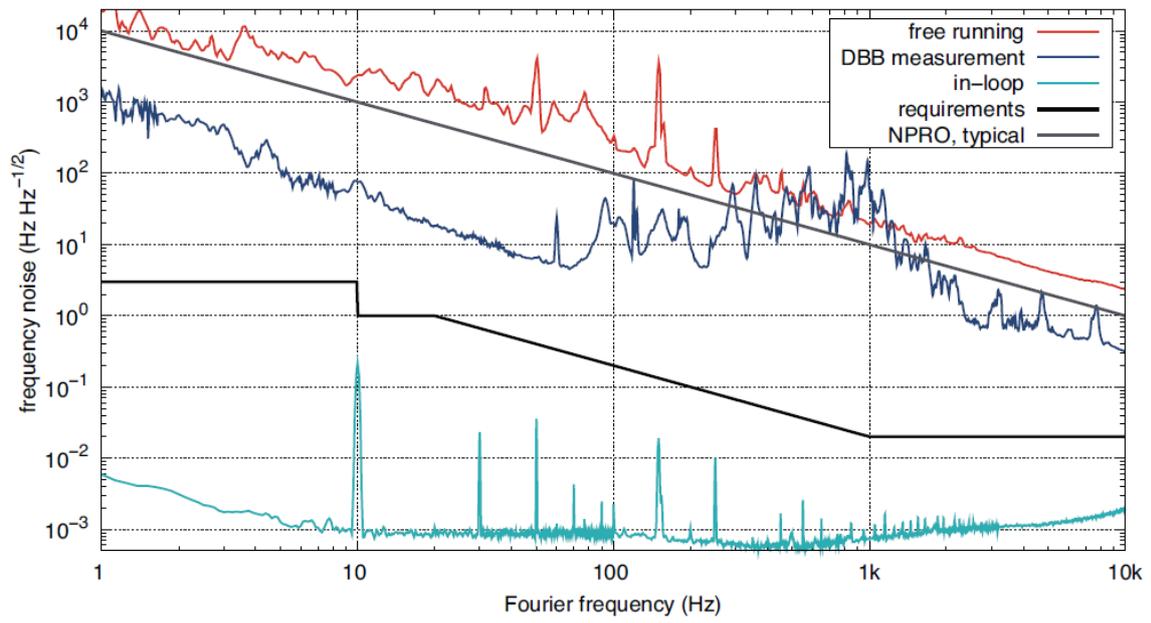


図 1.9: LIGO での PSL 周波数雑音の測定結果

## 第2章 理論

### 2.1 レーザーの雑音

§1.2.3 で示したように KAGRA に用いられるレーザーには低強度雑音、低周波数雑音が要求されている。まずこれら雑音の信号処理論を導入として説明し、次に雑音自体に関して基本的な説明を加えたい。

#### 2.1.1 スペクトル密度

一般に何らかの時間依存する信号を扱う際、時間のみでなく信号の振動する各周波数モードに分解(スペクトル分解)することでより多くの情報を手に入れることができ有益である。重力波検出においても波動を扱う以上、信号(今回はマイケルソン干渉計の鏡の変位)または雑音をスペクトル分解して解析することが大変重要となる。ここで振幅スペクトル密度という概念を導入する。これは信号処理で頻繁に用いられる概念であり、直感的にはスペクトル分解された信号の各周波数での振幅強度をグラフ化したものである。一方で、次元は  $[V/\sqrt{\text{Hz}}]$  や  $[m/\sqrt{\text{Hz}}]$  と一見わかりづらい。そこで他の諸概念の導入から始め、その際重要となる「Wiener-Khintchine の定理」から振幅スペクトル密度の定義を行う<sup>1</sup>。最後に、振幅スペクトル密度がもつ次元の物理的意味を示したい。

#### Fourier 変換と可積分性

信号  $s(t)$  のスペクトル分解された強度を表す際、まず考えられるのが式 2.1 のようにフーリエ変換された信号  $\tilde{s}(\omega)$  の絶対値の二乗である。

$$|\tilde{s}(\omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (2.1)$$

これはエネルギースペクトル密度と呼ばれ次元は  $[Dim^2/\text{Hz}^2]$  である。ここで”Dim”は元々の信号の持つ物理的次元であるとし、物理的な力に限らず抽象的な信号に対しても信号の2乗がパワーに相当すると考えれば、周波数が時間の逆数の次元を持つことから  $[Dim^2/\text{Hz}^2]$  はエネルギーの次元に相当する。そして実は信号のエネルギー有限の条件下<sup>2</sup>において、エネルギースペクトル密度は信号のスペクトル強度を表す良い指標となる。

<sup>1</sup>実際は、スペクトル密度の定義と Wiener-Khintchine の定理は相補的な関係にあり、どちらか片方を前提としてもう一方を示すことになる。定理である以上前提として扱われるべきではないが、振幅スペクトル密度の次元の妥当性を示すためにも、あえてこの論理構成で進みたい。

<sup>2</sup> $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty$  と同値。例えば  $\delta$ 関数などがそれに当てはまる。

しかしながらその一方で、Fourier 変換を行うための数学的な十分条件は関数の連続性と二乗可積分性である。後者の条件は物理的には信号エネルギーの有限性に他ならず、つまり定常過程でエネルギー無限である信号に対してはエネルギースペクトル密度は定義できない。そして問題なのは、現実で取り扱う信号の多くは観測時間内で定常でありエネルギー無限と仮定できる事である。したがってこのような信号を扱う際には、Fourier 変換可能な異なる関数を導入することで、エネルギースペクトル密度に代わり得る新たな指標を定義する必要がある。

### パワースペクトル密度と Wiener-Khintchine の定理

時間  $T$  だけ観測されたエネルギー無限な任意信号  $s(t)$  に対して、以下の関数を定義する。

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(t)s_T(t+\tau)dt \quad (2.2)$$

$$\text{where } s_T(t) = \begin{cases} s(t) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.3)$$

これは自己相関関数と呼ばれ、ある信号とそれ自体がある一定値ずれた同一の信号がどれだけ類似しているかを定量化したものである。自己相関関数は一般に  $\tau \rightarrow \pm\infty$  で十分速く 0 に収束していくため、Fourier 変換可能であることが知られている。そしてこの自己相関関数の Fourier 変換がパワースペクトル密度  $\tilde{S}(\omega)$  となる、というのが「Wiener-Khintchine の定理」である。定式化すると

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (2.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{T} \int_0^T dt s_T(t)s_T(t+\tau)e^{-i\omega\tau} \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t)e^{-i(-\omega)t}dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t+\tau)e^{-i\omega(t+\tau)}d\tau \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{T} \tilde{s}_T(-\omega)\tilde{s}_T(\omega) = \frac{|\tilde{s}_T(\omega)|^2}{T} \quad (2.7)$$

$$\text{where } \tilde{s}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t)e^{-i\omega t}dt \quad (2.8)$$

式 2.8 を見ると、観測時間  $T$  だけ切り取って Fourier 変換可能とした信号  $s_T(t)$  のエネルギースペクトル密度を観測時間で割った値となり、確かにスペクトルの情報を持ちうる関数であると言える。次元は  $[Dim^2/Hz]$  である。

ところで信号のスペクトル分解に用いられる装置として、スペクトルアナライザがあげられるが主にスペクトル算出に 2 通りの方法を用いている。本研究で用いた Advantest 社の R3131 は、同調掃引型を採用している。同調掃引型とは、入力された信号に対してある変調周波数でヘテロダイン検波を行い、測定された電力に基づきスペクトルを算出する方式である。その際、周波数混合後の信号が通過するバンドパスフィルターの分解能周波数帯域 (RBW) によって、検出される電力量が変わってくるので最後に RBW で割って平均化する処理を施し、結果として  $[Dim^2/Hz]$  の次元をもつパワースペクトル密度が算出される。

## 振幅スペクトル密度

重力波研究の論文や本論文でも多く用いているのが振幅スペクトル密度  $S_h(\omega)$  で、上述したパワースペクトル密度の平方根をとったものである。つまり

$$S_h(\omega) = \sqrt{\tilde{S}(\omega)} = \sqrt{\frac{|\tilde{s}_T(\omega)|^2}{T}} \quad (2.9)$$

次元は  $[Dim/\sqrt{\text{Hz}}]$  であり、たとえばある信号の振幅スペクトル密度  $S_h(\omega)$  を周波数帯域  $100\sim 200[\text{Hz}]$  で積分した値 (厳密には積分したパワースペクトルの平方根) は

$$\sqrt{\int_{100}^{200} \tilde{S}(f) df} \simeq \overline{S_h(f)} \times \sqrt{200 - 100} = 10\overline{S_h(f)} \quad (2.10)$$

ここで  $\overline{S_h(f)}$  は  $100\sim 200[\text{Hz}]$  での振幅スペクトル密度の平均値とする。つまり注目したい周波数帯域の平方根をかけることで、信号の全スペクトル強度において特定の周波数帯域のスペクトルが占めるおおよその強度を見積もることができる。

### 2.1.2 強度雑音

偏にレーザー出力と言っても、たとえば市販のレーザーに記されているものは出力の DC 成分の値であり、実際には図 2.1 のように DC 成分より十分小さいオーダーで強度は揺らいでいる。光検出器で光強度を測定する際それは電場振幅の二乗に相当するので、強度雑音は電場振幅の雑音に由来していると言える。この振幅雑音は式 2.12 で表される。

$$E(t) = (E_0 + a_n(t))\exp(-i(\omega_0 t + \phi_0)) \quad (2.11)$$

$$= \left( E_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{a}_n(\Omega) e^{-i\Omega t} \right) \exp(-i(\omega_0 t + \phi_0)) \quad (2.12)$$

電場の絶対値の二乗から光強度を考えると

$$P(t) = E(t)E^*(t) \quad (2.13)$$

$$= E_0^2 + 2E_0 a_n(t) + a_n^2(t) \quad (2.14)$$

$$\simeq E_0^2 + 2E_0 a_n(t) \quad (2.15)$$

$$= E_0^2 + 2E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{a}_n(\Omega) e^{-i\Omega t} \quad (2.16)$$

式 2.16 から確かに、強度が振幅雑音  $a_n(t)$  に基づいて揺らいでいることがわかる。強度雑音は、単純に光検出器によって光強度を電圧信号に変えた後にスペクトラムアナライザーを用いてスペクトル表示することで測定される。また強度雑音は便宜上、"RIN  $[\sqrt{\text{Hz}}]$ " という次元で表される。これは"Relative Intensity Noise"の略で、強度雑音のスペクトル密度を DC 成分の光強度で割り、無次元量として表したものである。例えば、横軸で  $10[\text{Hz}]$  の値は、 $10[\text{Hz}]$  の周波数で揺らいでいる強度雑音の相対振幅を示していることになる。これにより光の絶対パワーに限らず同一な基準で雑音を議論することができる。

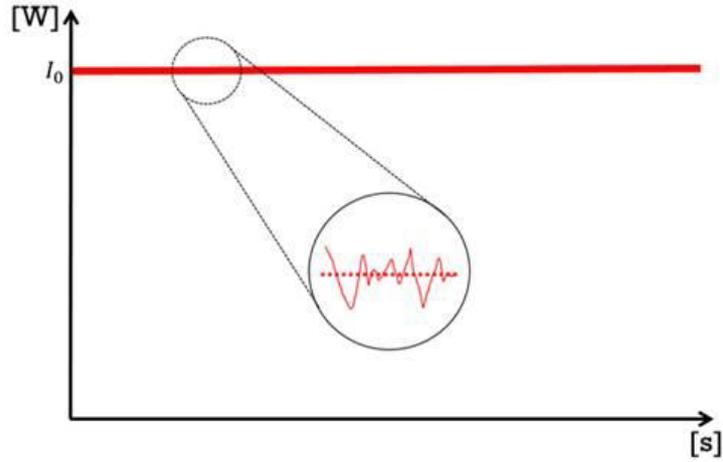


図 2.1: 強度雑音の概念図

### 2.1.3 周波数雑音

同様に、周波数に存在しているゆらぎが周波数雑音である。そもそも周波数は波動の位相情報として含まれているので、周波数雑音は一般的に位相雑音として式 2.18 のように表せる。この時、周波数雑音は瞬間的な値として 2.19 の式で定義される。

$$E(t) = E_0 \exp(-i(\omega_0 t + \phi_0 + \phi_n(t))) \quad (2.17)$$

$$= E_0 \exp\left(-i\left(\omega_0 t + \phi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{\phi}_n(\Omega) e^{-i\Omega t}\right)\right) \quad (2.18)$$

$$\delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi_n(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} i\Omega \tilde{\phi}_n(\Omega) e^{-i\Omega t} \quad (2.19)$$

そもそもレーザーの周波数は $\sim$ THz と極めて大きいため、そのゆらぎを光検出器で直接測定することは不可能である。強度雑音は光強度の DC 成分を基準とすればよかったが、周波数雑音に対しては完璧に一定の周波数源は存在せず、何かしら周波数を参照する基準を設ける必要がある。したがって周波数雑音の測定は、強度雑音のように単純ではなく、光共振器を用いた PDH 法の制御信号から測定される。(§2.6 参照) ここで先行研究の例(図 1.9)を見ると縦軸の単位に  $[\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}]$  とあるが、これは  $[\text{Hz}]$  の次元をもつ信号の振幅スペクトル密度を算出した結果であり、分子と分母の  $\text{Hz}$  はそれぞれ意味合いが異なる。分子の  $\text{Hz}$  は周波数雑音が揺らいでいる絶対振幅を表し、分母の  $\sqrt{\text{Hz}}$  は横軸の周波数で密度化している。例えば横軸  $10[\text{Hz}]$  での値は、 $10[\text{Hz}]$  で揺らいでいる周波数雑音の振幅を意味している。

以上 §2.1.2、§2.1.3 の雑音を 1 つの式にまとめると

$$E(t) = (E_0 + a_n(t)) \exp(-i(\omega_0 t + \phi_0 + \phi_n(t))) \quad (2.20)$$

$$= \left(E_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{a}_n(\Omega) e^{-i\Omega t}\right) \exp\left(-i\left(\omega_0 t + \phi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{\phi}_n(\Omega) e^{-i\Omega t}\right)\right) \quad (2.21)$$

## 2.2 ガウシアンビーム

本研究のようにレーザーを扱う際に留意すべき点は、光路や偏光は言うまでもなく、光の進行方向に垂直な電場の空間分布(レーザーの横モードと呼ばれる)も含まれる。電場の横モードに関する Maxwell 方程式の任意解はいくつかの完全系で展開でき、その中で最も基本的でよく用いられているのがガウシアンモードである。この節では自由空間中の Maxwell 方程式から電場のガウシアンモード解を導出し、各パラメーターの物理的な解釈を補足する。

### 2.2.1 ガウシアンビームの一般解

真電荷及び真電流の存在しない一様媒質中(屈折率  $n$ )での Maxwell 方程式を考える。 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \epsilon, \mu, c$  をそれぞれ電場、磁場、電束密度、磁束密度、誘電率、透磁率、光速として、以下の6つの式で関係性を表せる。

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}(t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (2.22)$$

これらから電場の従う波動方程式は式 2.23 となる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

ところで直線偏光かつ単一周波数  $\omega_0$  で発振するレーザー光の電場は一般に

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t} \mathbf{e}_p \quad (2.24)$$

$E(\mathbf{r})$  は電場の複素振幅で、 $\mathbf{e}_p$  は偏光の向きを表す単位ベクトルである。式 2.24 を式 2.23 に代入すると最終的に複素振幅のみが残り、

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0 \quad \left( k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \quad (2.25)$$

式 2.25 は Helmholtz 方程式と呼ばれ、電場の複素振幅が従う式になる。さらに電場が  $z$  方向に進む平面波である仮定と近軸近似から以下の条件が課される。

$$\nabla_{\perp}^2 E(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r})e^{-ikz} \quad \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} = 0 \quad (2.26)$$

式 2.26 を用いて、式 2.25 の Helmholtz 方程式を整理すると

$$(2.25) = \left( \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right) e^{-ikz} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( E_0(\mathbf{r})e^{-ikz} \right) + k^2 E(\mathbf{r}) \quad (2.27)$$

$$\simeq \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) E_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.28)$$

この式 2.28 は近軸 Helmholtz 方程式と呼ばれ、この解の一つが式 2.29 で示すガウシアンモードになる ( $l, m$  は 0 以上の整数)。1 行目が電場振幅、2 行目が位相項を表す。

$$E_0(\mathbf{r}) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} H_l \left( \frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} \right) \times \exp \left\{ -i \left( kz + k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) + i(l + m + 1)\zeta(z) \right\} \quad (2.29)$$

ここで  $H_k(x)$  は  $k$  次エルミート関数で、式 2.29 は ( $l, m$ ) 次のガウシアンモードの表式 (通称  $\text{TEM}_{lm}$ ) にあたる。光学の研究において最も用いられるのは  $l = 0, m = 0$  を代入した最低次のガウシアンモード ( $\text{TEM}_{00}$ ) である。普通ガウシアンビームと言うと  $\text{TEM}_{00}$  の式 2.30 を指し、光共振器も多くの場合このモードが共振するようにアライメントが調整される。

$$E_0(\mathbf{r}) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} - i \left( kz + k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) + i\zeta(z) \right\} \quad (2.30)$$

## 2.2.2 ガウシアンビームの性質

以下ではこの  $\text{TEM}_{00}$  モードに関連した各パラメーターの説明を付記する。ここでは  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  とする。

強度分布  $I(x, y, z)$

定義

$$I(\rho, z) \equiv |E_0(\mathbf{r})|^2 = I_0 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left( -\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \quad (2.31)$$

固定した各  $z$  の位置で見ると  $W(z)$  を分散に持つようなガウス分布と見て取れ、これからガウシアンビームと命名された。 $W(z)$  については後述。

レイリー長  $z_0$

定義

$$z_0 \equiv \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (2.32)$$

他の光学的パラメータを定義するのに不可欠な量。  $-z_0 \leq 0 \leq z_0$  の範囲を焦点深度 (depth of focus) と呼び、この範囲内ではビームをほぼ平行光線とみなせる。また数学的には、スポットサイズ  $W(z)$  がビームウエスト  $W_0$  の  $\sqrt{2}$  倍、波面の曲率半径  $R(z)$  が光軸方向で極小値  $2z_0$  をとる位置でもある。(後述)

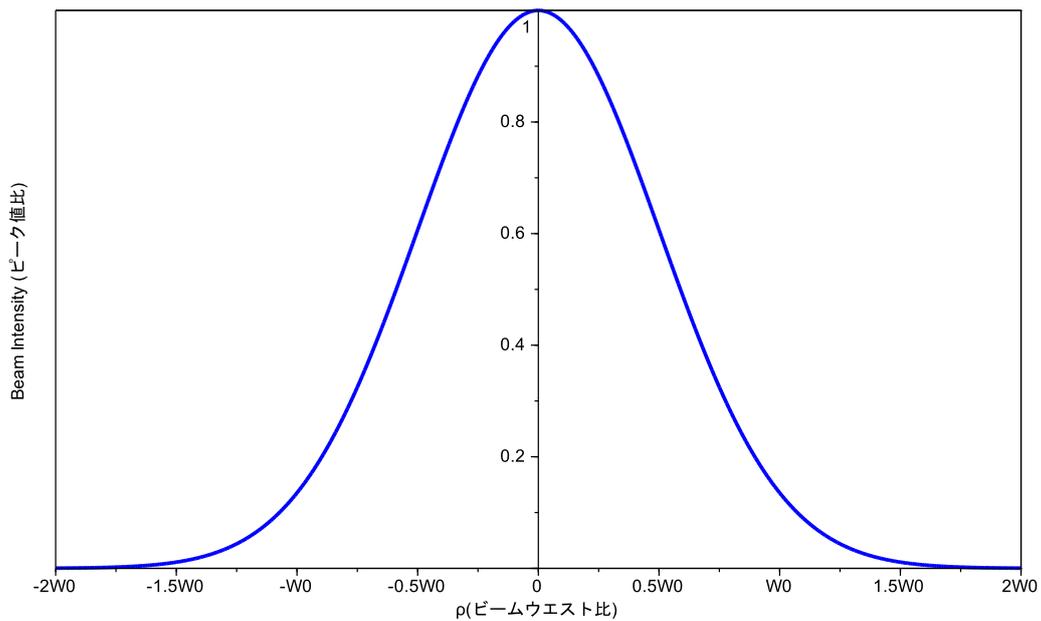


図 2.2: ビーム強度のガウシアン分布

### ビーム半径 $W(z)$

定義

$$W(z) \equiv W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \quad (2.33)$$

各  $z$  の位置でのビームの半径、厳密には  $xy$  面での全ビームパワーの 86 % を含む円の半径である。ガウス分布で最大強度の  $1/e^2$  になる位置のこと。

$z=0$  でのスポットサイズ  $W_0$  をビームウエストと呼び、式 2.32 でレイリー長と関連付けられている。ここで一番ビームが絞れているので分解能が一番よく、結像させる場所として重要である。ただし厳密には焦点位置ではなく、位相情報を無視している幾何光学 (Ray Optics) より厳密な議論になる。また、どんなレンズを用いて集光してもビームスポットの小ささには限界があり、これを回折限界と呼びおよそビームの  $\lambda$  程度のオーダーである。

### ビーム広がり角 $\theta_0$

定義

$$\theta_0 \equiv \frac{W_0}{z_0} \quad (2.34)$$

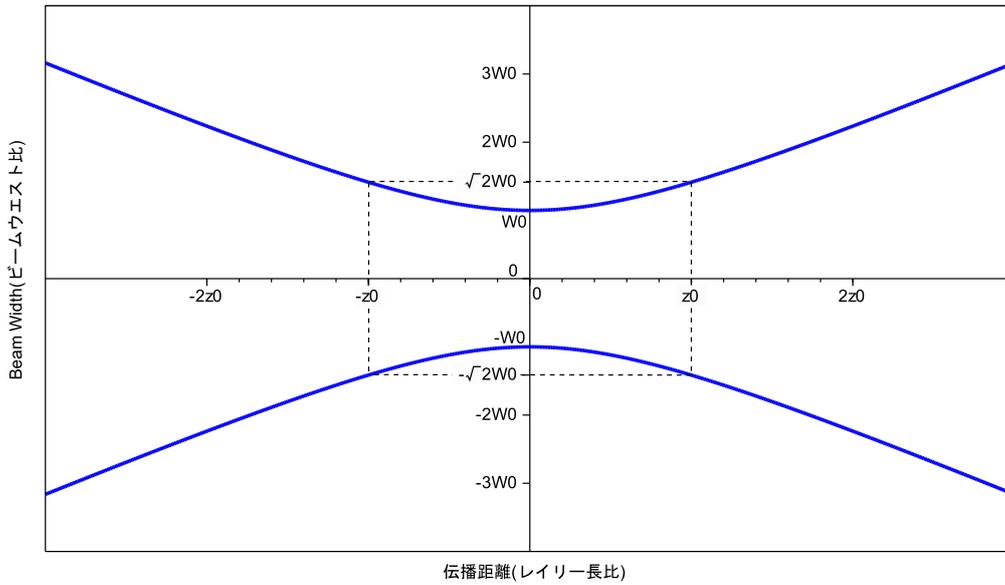


図 2.3: ビーム半径の距離依存性

原点から十分遠い場合 ( $z \gg z_0$ )

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \simeq W_0 \frac{z}{z_0} = \theta_0 z \quad (2.35)$$

と近似でき、スポットサイズが  $z$  に対して線形的に単調増加している。 $W_0$  と  $z_0$  の関係も考慮すると、

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad (2.36)$$

のように書け  $W_0$  を大きくすると  $\theta_0$  が小さくなり、焦点深度つまり平行光線とみなせる範囲が長くなる。

曲率半径  $R(z)$

定義

$$R(z) \equiv z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right) \quad (2.37)$$

近似的には  $\text{TEM}_{00}$  モードの各地点における波面の曲率半径を表している。実際には同位相波面上でも  $z$  が変わってきてしまうので  $R(z)$  は一定ではなく (つまり球面波ではない)、光軸上 ( $\rho = 0$ ) の点でのみ厳密に一致する。図 2.5 でわかるように、 $R(z)$  は  $z = z_0$  で極小値  $2z_0$  をとり、そこで一番曲がりがかついで、そこから内側また

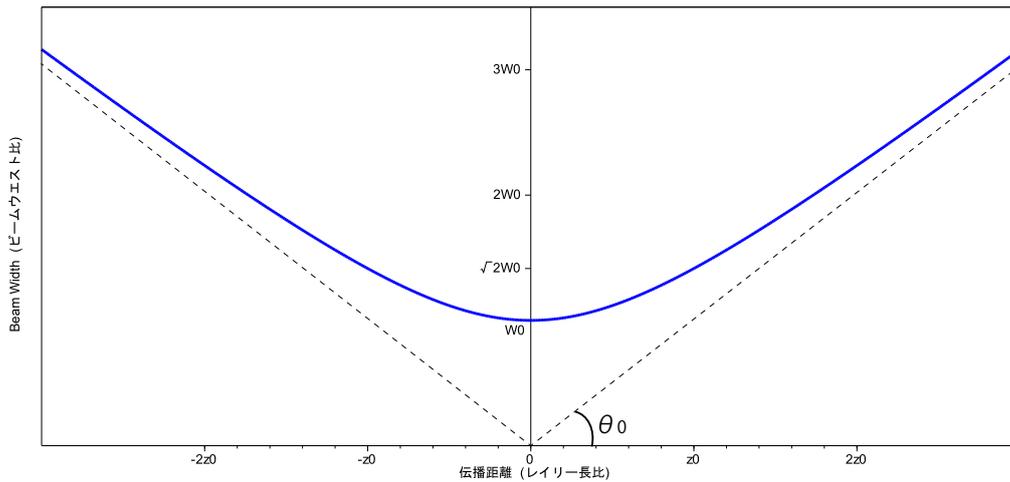


図 2.4: ビームの広がり角

は外側に進むにつれて波面の曲がりは緩やかになる。

### Guoy 位相 $\zeta(z)$

定義

$$\zeta(z) \equiv \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (2.38)$$

ガウスビーム  $\text{TEM}_{00}$  の一般式 2.30 の位相を見ると、

$$\varphi(\rho, z) = kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z) \quad (2.39)$$

と表され、第 2 項までの「原点で曲率半径  $R(z)$  を持つ放物型」から  $\zeta(z)$  だけ位相がシフトした形である。この位相遅れ項  $\zeta(z)$  を Guoy 位相と呼ぶ。

### ビームパワー $P$

ある  $z$  の位置での強度分布を全断面積で積分する。

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho \\ &= I_0 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 2\pi \int_0^\infty \rho \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W(z)^2}\right) d\rho \\ &= \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2) \end{aligned}$$

エネルギーの伝搬という点では自明だが、パワーは  $z$  に依らない。

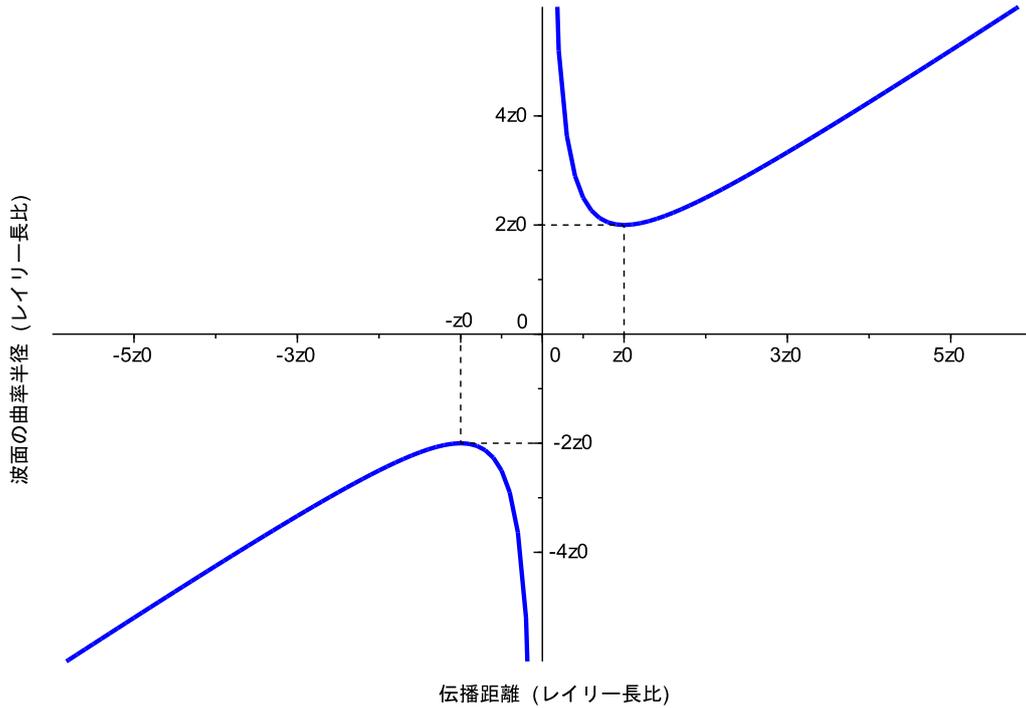


図 2.5: 波面の曲率半径の変化

### 波面の近似

ある同位相波面の上では各点での曲率半径  $R(z)$  と Guoy 位相  $\zeta(z)$  を一定とみなすと、 $z + \rho^2/2R = C$  (定数) の放物線となる。よって、任意の  $z$  の領域で波面を「曲率半径  $R(z)$  を原点で持つ放物型」に近似できる。

次にビームウエストの付近 ( $|z| \ll z_0$ ) では、 $R(z) \approx \infty$  となり位相項は  $kz \approx$  一定なので平面波で近似できる。

一方で、十分遠方 ( $|z| \gg z_0$ ) では  $R(z) \approx z$  として

$$\varphi(\rho, z) \approx kz + \frac{k\rho^2}{2z} - \zeta(z) \quad (2.40)$$

となるので Guoy 位相を除き位相が球面波の近軸近似と一致し、球面波に近似できる。

## 2.3 光共振器

光共振器は本研究の最も重要な要素であり、共振器の性能を理解することが不可欠となる。まず光共振器は、2枚の鏡から成る直線型と3枚以上から成るリング型共振器に分かれるが、特に本研究で用いた周波数参照共振器は直線型なので、以下の議論は全て直線型共振器で考える。ただしリング型共振器においても、共振器長や反射率を考慮することで簡単に拡張可能である。

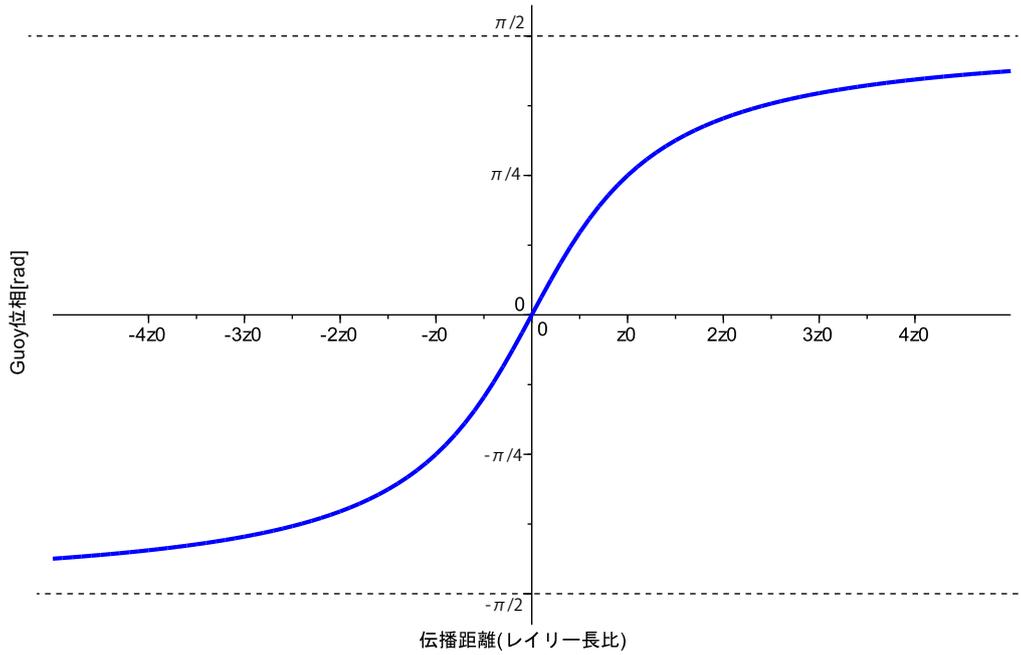


図 2.6: Guoy 位相の変化

図 2.7 に直線型共振器の概略を示す。共振器の性能は共振器長  $l$ 、各鏡の振幅反射率  $r_i$ 、曲率半径<sup>3</sup>  $R_i$  によって決定づけられ、この節を通して各パラメータによって決まる共振器の性能について触れる。

### 2.3.1 光共振器の安定条件

光共振器の主な特性は、内部で 2 枚の鏡を反射した光が元の入射電場と重なり合うことで実行パワーを増幅させられることである。この条件を定式化する際に、一様媒質内での光の伝播や界面での反射を  $ABCD$  行列を用いて議論するのが効果的である。光の伝播や反射の連続した過程は各要素の  $ABCD$  行列をかけ合わせることで表現できるので、共振器を往復する過程に相当する  $ABCD$  行列は以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{4l}{R_1} - \frac{2l}{R_2} + \frac{4l^2}{R_1 R_2} & 2l - \frac{2l^2}{R_2} \\ -\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{4l}{R_1 R_2} & 1 - \frac{2l}{R_2} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

ここでビームの状態を表す複素ビームパラメータを以下のように定義する。表式内の各文字は §2.2 参照のこと。

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \quad (2.43)$$

<sup>3</sup>本論文では統一して、伝播している光に対して凹面鏡 (concave) を  $R > 0$ 、凸面鏡 (convex) を  $R < 0$  と定義する。

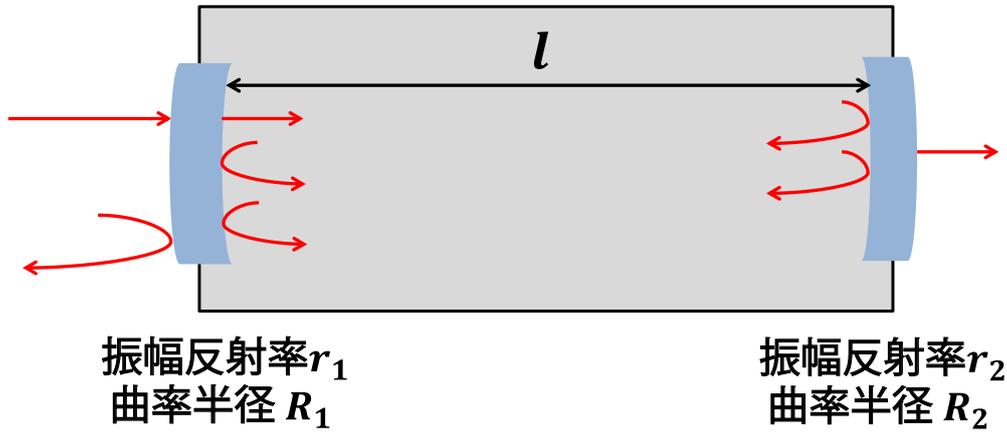


図 2.7: 直線型光共振器の概略図。本研究で使用した光共振器に対応させて、一つの鏡を平面鏡、もう一方を凹面鏡で表記した。平面鏡の場合は曲率半径  $\infty$  である。

一般的に任意の過程の前後に対するビームパラメータ  $q(z), q'(z)$  と、その過程の  $ABCD$  行列との関係は

$$q'(z) = \frac{Aq(z) + B}{Cq(z) + D} \quad (2.44)$$

そして光共振器内では  $q'(z) = q(z)$  であるので式変形することで、式 2.45 の  $1/q(z)$  に関する二次方程式を得る。

$$B \left( \frac{1}{q(z)} \right)^2 + (A - D) \left( \frac{1}{q(z)} \right) - C = 0 \quad (2.45)$$

$q(z)$  は複素数であるため、任意の  $ABCD$  行列に対して解となりうる  $q(z)$  が存在する。ただし共振器内部のビームが安定であるためにビーム径が有限、つまり  $\text{Im}\left\{\frac{1}{q(z)}\right\} \neq 0$  という条件から式 2.45 が実数解を持つてはいけなことがわかるので

$$(A - D)^2 + 4BC < 0 \quad (2.46)$$

$$\Leftrightarrow (A + D)^2 - 4 < 0 \quad (2.47)$$

$$\Leftrightarrow -2 < A + D < 2 \quad (2.48)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left( \frac{l}{R_1} - 1 \right) \left( \frac{l}{R_2} - 1 \right) < 1 \quad (2.49)$$

が光共振器の安定条件である。 $l/R_1, l/R_2$  をそれぞれ軸にとった場合の安定条件を満たす領域が図 2.8 に示されている。

### 2.3.2 Free Spectral Range

次に共振器長と、共振器の透過光及び反射光が示す周波数特性についての関係性を述べる。直線型共振器の各パラメータを図 2.7 のように設定し、今回鏡での光のロスはないと

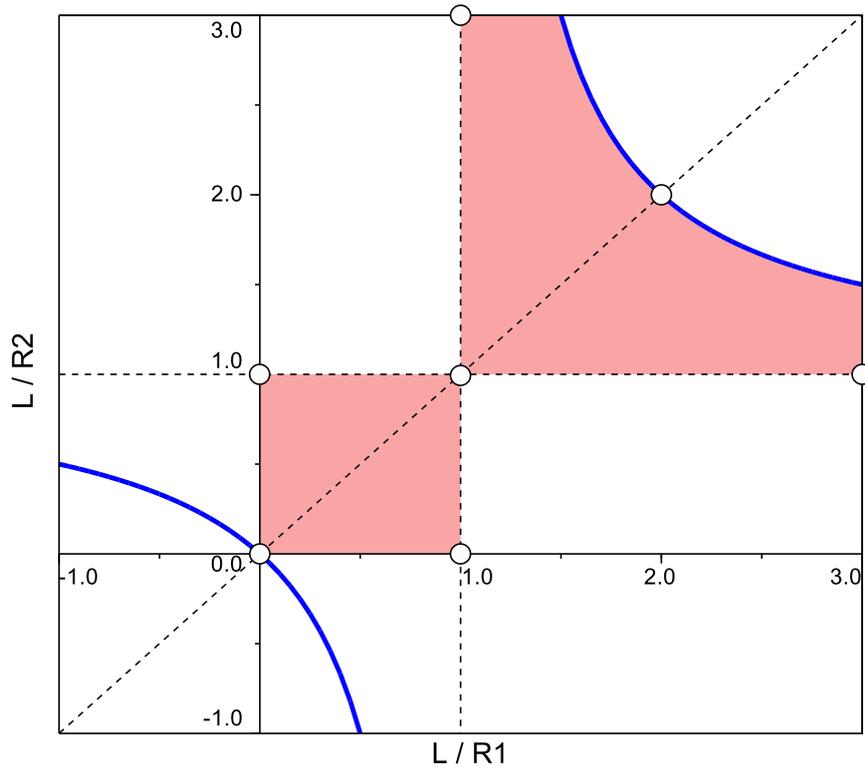


図 2.8:  $l/R_1, l/R_2$  平面上の安定条件を満たす領域。ただし  $x$  軸及び  $y$  軸以外の境界線上は除く。原理上、片方の鏡が凸面鏡でも安定条件を満たしうるが、ここでは共に凹面または平面鏡 ( $R > 0$ ) を仮定。

仮定する ( $r_{1,2}^2 + t_{1,2}^2 = 1$ )。電場が共振器内を 1 往復する際の位相変化を  $\phi$  とすると

$$\phi = 2\pi \frac{2l}{\lambda} = 2\pi f \frac{2l}{c} \quad (2.50)$$

$E_{in} = E_0 e^{-i\omega t}$  の電場が入射された時、透過電場  $E_t$  は共振器内部で往復している各電場の重ね合わせが最終的に出射鏡を透過していると考えて、式 2.51 のようになる。

$$\begin{aligned} E_t &= t_1 e^{i\frac{\phi}{2}} t_2 E_{in} \\ &\quad + t_1 e^{i\frac{\phi}{2}} (e^{i\phi} r_1 r_2) t_2 E_{in} \\ &\quad + t_1 e^{i\frac{\phi}{2}} (e^{i\phi} r_1 r_2)^2 t_2 E_{in} + \dots \\ &= t_1 e^{i\frac{\phi}{2}} t_2 E_{in} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\phi} r_1 r_2)^{n-1} \\ &= \frac{t_1 t_2 e^{i\frac{\phi}{2}}}{1 - e^{i\phi} r_1 r_2} E_{in} \end{aligned} \quad (2.51)$$

これから透過光強度と入射光強度の比をとると

$$\frac{I_t}{I_{in}} = \frac{|E_t|^2}{|E_{in}|^2} \quad (2.52)$$

$$= \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi} \quad (2.53)$$

同様に反射電場  $E_r$  を考えると、光共振器内部に入射せずそのまま入射鏡で反射した成分<sup>4</sup>と、共振器内部で往復し重ねあわされた電場が入射鏡を透過した成分との和と見れるので

$$E_r = -r_1 E_{in} + t_1^2 r_2 e^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\phi} r_1 r_2)^{n-1} E_{in} \quad (2.54)$$

$$= -r_1 E_{in} + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - e^{i\phi} r_1 r_2} E_{in} \quad (2.55)$$

反射光強度と入射光強度の比をとると

$$\frac{I_r}{I_{in}} = \frac{|E_r|^2}{|E_{in}|^2} \quad (2.56)$$

$$= r_1^2 + \frac{t_1^4 r_2^2 - 2t_1^2 r_1 r_2 \cos \phi}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi} \quad (2.57)$$

本研究で使用した光共振器の  $r_1, r_2, l$  を代入し、透過光および反射光強度の、位相変化  $\phi$  に対するプロットを図 2.9 にそれぞれ記す。

ともに共通した  $\phi = 2m\pi$  ( $m$  は整数) で透過光が極大値、反射光が極小値を示している。すなわちこれが光共振器の共鳴条件であるが、変数の選び方は共振器長  $l$  またはレーザー周波数  $f$  の 2 通り考えられるので、ここではそれぞれの場合で共鳴条件を表しておく。

$$f_m = \frac{c}{2l} \times m \quad (2.58)$$

$$l_m = \frac{c}{2f} \times m \quad (2.59)$$

式 2.58 は一定の共振器長におけるレーザー周波数  $f$  への制約条件。一方で、式 2.59 は一定のレーザー周波数における共振器長  $l$  への制約条件。ここでは式 2.58 に注目し、各共鳴周波数間隔を Free Spectral Range(通称 FSR):  $\Delta f_{FSR}$  と定義すると

$$\Delta f_{FSR} \equiv f_{m+1} - f_m = \frac{c}{2l} \quad (2.60)$$

よって、この周波数間隔が共振器長のみによって決まる性能である。ここでの議論ではビームの横モードは考慮に入れなかったが、§2.3.4 から FSR は TEM<sub>00</sub> に限らずあらゆる横モード同士の共鳴周波数間隔でもあることがわかる。

<sup>4</sup>鏡の反対面での反射電場は逆位相になることに注意

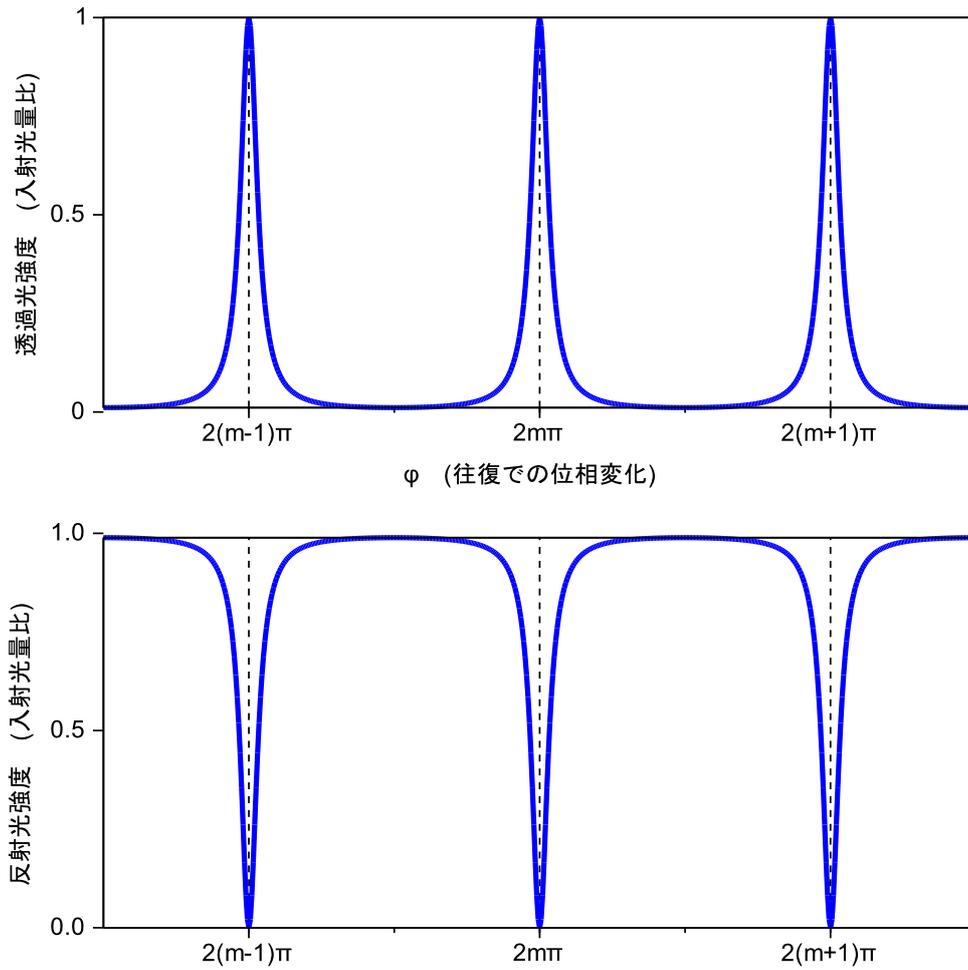


図 2.9: 往復での位相変化に対する透過光及び反射光強度

### 2.3.3 Finesse

この節では共振器を構成する鏡の振幅反射率と、透過光強度のピークの形との関係性を見る。まず図 2.9 に示されたピークの半値全幅 (FWHM):  $\Delta f_{FWHM}$  を求めよう。 $\phi = \phi_h$  の時、透過光強度が極大値の半分になるとして式 2.53 から

$$\frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi_h} = \frac{1}{2} \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2} \quad (2.61)$$

$$\Leftrightarrow \cos \phi_h = 1 - \frac{(1 - \bar{r}^2)^2}{2\bar{r}^2} \quad (\bar{r} \equiv \sqrt{r_1 r_2}) \quad (2.62)$$

$$\Leftrightarrow \phi_{h\pm} = 2\pi m \pm \arccos \left( 1 - \frac{(1 - \bar{r}^2)^2}{2\bar{r}^2} \right) \quad (2.63)$$

ここで式 2.50 と式 2.60 から

$$f_{h\pm} = \frac{\phi_{h\pm}}{2\pi} = mf_{FSR} \pm \frac{\Delta f_{FSR}}{2\pi} \arccos \left( 1 - \frac{(1 - \bar{r}^2)^2}{2\bar{r}^2} \right) \quad (2.64)$$

$$\Rightarrow \Delta f_{FWHM} \equiv f_{h+} - f_{h-} = \frac{\Delta f_{FSR}}{\pi} \arccos \left( 1 - \frac{(1 - \bar{r}^2)^2}{2\bar{r}^2} \right) \quad (2.65)$$

$\theta \ll 1$  の下で  $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$  の近似を用いると

$$\Delta f_{FWHM} \approx \frac{\Delta f_{FSR}}{\pi} \frac{(1 - \bar{r}^2)}{\bar{r}} \quad (2.66)$$

ここで共振器の Finesse(フィネス): $\mathcal{F}$  を以下のように定義する。

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\pi\bar{r}}{(1 - \bar{r}^2)} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{(1 - r_1 r_2)} \quad (2.67)$$

するとフィネスは  $\Delta f_{FSR}$  と  $\Delta f_{FWHM}$  を用いて式 2.68 として表せる。

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta f_{FSR}}{\Delta f_{FWHM}} \quad (2.68)$$

定性的に考えると、同じ FSR を持つ共振器では FWHM が短いほど高いフィネスになるので、フィネスは各鏡の反射率のみで決まる、ピークの鋭さを定量的に表すパラメータと言える (図 2.10 参照)。

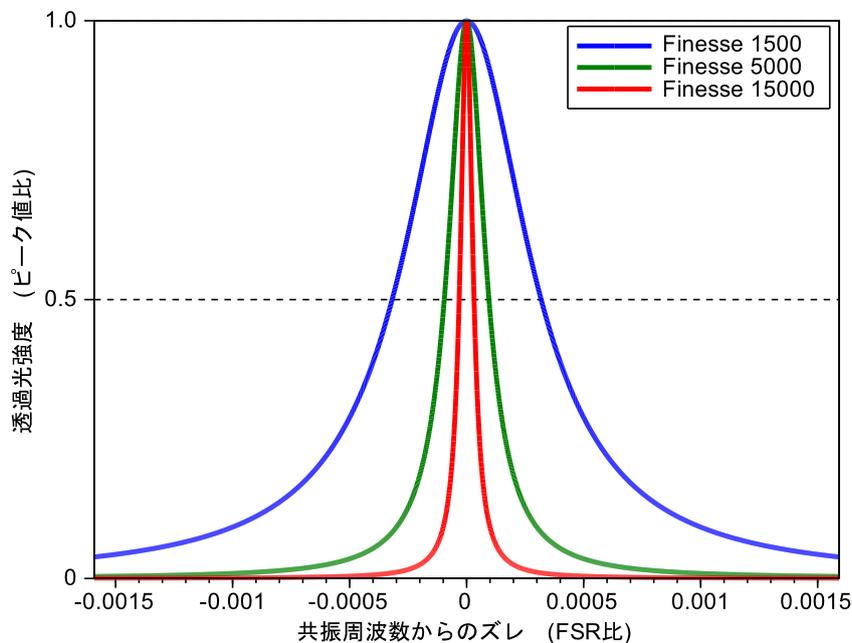


図 2.10: 異なるフィネス下での共振ピーク形の違い

### 2.3.4 Transverse Mode Spacing

§2.3.2 ではビームの横モードを考えず、波動光学のみで FSR の導出を行った。この節ではビームの各横モードにおける共鳴周波数を考え、光共振器の形状との関係性を議論する。まず §2.2 の式 2.29 から  $\text{TEM}_{p,q}$  が  $z$  方向において共振器 1 往復する際の位相変化  $\phi_{p,q}$  は

$$\phi_{p,q} = 2kl - 2(p+q+1) \left\{ \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right\} \quad (z_2 = z_1 + l) \quad (2.69)$$

$$\equiv 2kl - 2(p+q+1)\Delta\zeta(l) \quad (2.70)$$

よって  $\text{TEM}_{p,q}$  モードの共鳴条件は

$$\phi_{p,q} = 2\pi m \quad (2.71)$$

$$\Leftrightarrow f_{(p,q),m} = \frac{c}{2\pi l}(p+q+1)\Delta\zeta(l) + \frac{c}{2l}m \quad (2.72)$$

これは  $p+q$  によって決まるため、ある  $m$  に対して  $p+q+1$  個の横モードが同一周波数上に縮退した状態で共鳴しているといえる。ここで  $m = m_0$  で共鳴している  $\text{TEM}_{p,q-1}$  モードと  $\text{TEM}_{p,q}$  モードの共鳴周波数間隔を求め、Transverse Mode Spacing(通称 TMS): $\Delta f_{TMS}$  を式 2.74 のように定義する。

$$\Delta f_{TMS} \equiv f_{(p,q),m_0} - f_{(p,q-1),m_0} = \frac{c}{2\pi l}\Delta\zeta(l) \quad (2.73)$$

$$= \frac{\Delta\zeta(l)}{\pi}\Delta f_{FSR} \quad (2.74)$$

この定義は  $m, p, q$  に依らないため、隣り合う任意の横モードの共鳴周波数間隔は常に  $\Delta f_{TMS}$  である。各横モードの共振周波数を図 2.11 に図示した。

さらに光共振器の形状を表す新たなパラメータ  $g$ -factor を以下の式で定義する。

$$g \equiv \left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right) \quad (2.75)$$

また  $g$ -factor と  $g$ uooy 位相には

$$g = (\cos \Delta\zeta(l))^2 \quad (2.76)$$

の関係が知られており、 $\Delta f_{TMS}$  の定義式 2.74 から

$$g = \left\{ \cos\left(\frac{\Delta f_{TMS}}{\Delta f_{FSR}}\pi\right) \right\}^2 \quad (2.77)$$

を得る。したがって、実験により  $\Delta f_{FSR}$  と  $\Delta f_{TMS}$  が求まれば式 2.60 および式 2.77 から共振器長  $l$  と  $g$ -factor が求まり、最終的に鏡の曲率半径を実験的に見積もることができる<sup>5</sup>。

<sup>5</sup>式 2.75 から厳密には自由度が  $R_1$  と  $R_2$  の二つあるので、他の条件(例えば  $R_1 = R_2$  や  $R_1 = \infty$  など)と合わせて初めて鏡の曲率半径を見積もれる。

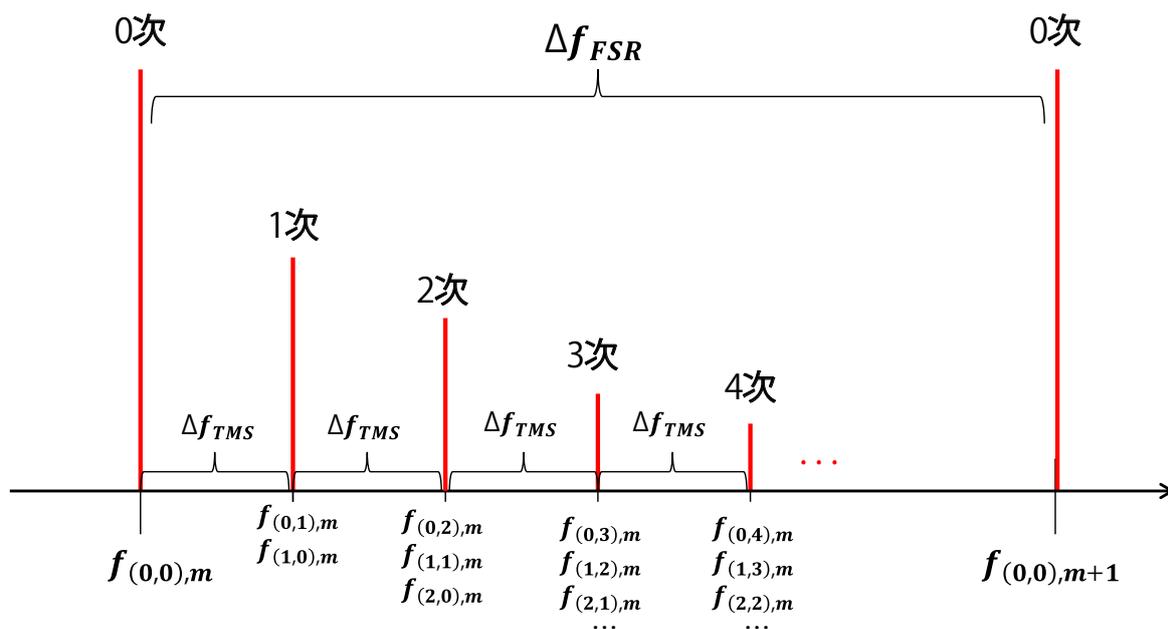


図 2.11: 各横モードの共振周波数

### 2.3.5 モードマッチング

ここまで共振器の各パラメータから導かれる種々の性能と、波動光学およびビーム光学での共鳴条件を議論した。式 2.45 および式 2.72 から、ガウシアンビームの電場振幅と位相ともに共振器内で固定であることが示され、これはガウシアンビームが共振器の固有モードの一つということである。数学的に言い換えると、「波面が共振器の両端で球面鏡の曲率半径と一致する」という境界条件の下での近軸 Helmholtz 方程式 2.28 の一般解がガウシアンビームになるのと同値となる。したがってガウシアンビームが特定の共振器内で共鳴するためには、共鳴周波数の条件以外にもこの境界条件を満たさねばならない。この境界条件に合うように入射ビームのモードを調整することを、ビームのモードマッチングと呼ぶ。この節では共振器を構成する鏡の曲率半径および共振器長から、共鳴するガウシアンビームのモードが一意的に決定することを示す。ただし高次の空間モードは考慮に入れず、 $TEM_{00}$  のモードマッチングのみに限定する。

まず共振器内でのビームモードを決定するとは、この場合ビームウエスト  $W_0$  (またはレイリー長  $z_0$ ) とウエスト位置を決定することと同値である。今、図 2.12 で示すような共振器へのモードマッチングを考える。ガウシアンビームの波面と鏡の曲率半径の一致<sup>6</sup> および共振器長の拘束条件から以下の 3 式を得る。

<sup>6</sup>ここでは二つの鏡ともに凹面と仮定して、 $R_1, R_2 > 0$  とする。一方で波面の曲率半径  $R(z)$  は式 2.37 からわかるように、入射側で  $R(z) > 0$ 、出射側で  $R(z) < 0$  と定義されていることに注意する。

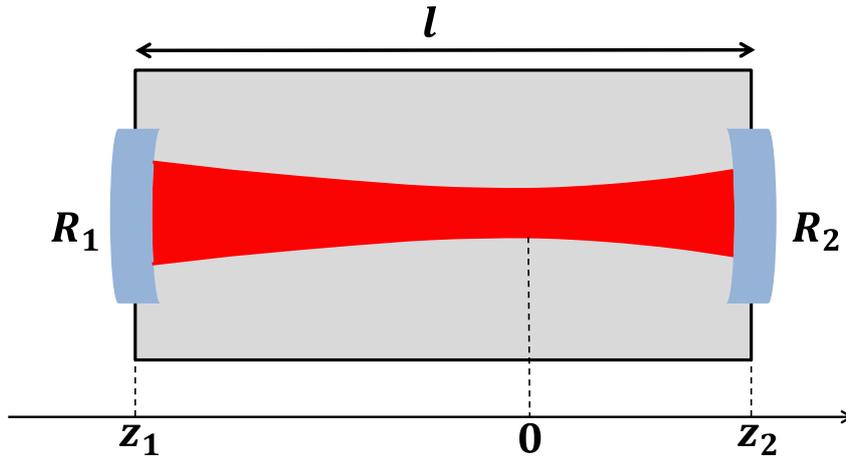


図 2.12: 共振器内部のビームモード

$$-R_1 = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1} \quad (2.78)$$

$$R_2 = z_2 + \frac{z_0^2}{z_2} \quad (2.79)$$

$$z_2 = z_1 + l \quad (2.80)$$

これらの連立方程式を、変数  $z_1, z_2, z_0$  について解くと

$$z_1 = \frac{-l(l - R_2)}{2l - R_1 - R_2} \quad (2.81)$$

$$z_2 = \frac{l(l - R_1)}{2l - R_1 - R_2} \quad (2.82)$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{l(l - R_1)(l - R_2)(R_1 + R_2 - l)}}{(2l - R_1 - R_2)^2} \quad (2.83)$$

上記の  $z_1$  によって決まる入射鏡でのビーム径  $R(z_1)$  にモードを合わせれば、式 2.37 に従い最適な位置にビームウエストが来ることは明らかであろう。また式 2.32 によって  $z_0$  から  $W_0$  が求まり、これでビームモードはすべて決定する。事前に入射前のビームプロファイルをナイフエッジ法などで測定しモードを見積もっておけば、レンズを用いて共振器へのモードマッチングが可能である。本研究でも光共振器へのモードマッチングを行ってから PDH 法にてロックを試みた。このモードマッチングが不十分であると入射パワーの一部しか共振せず、多くが反射してしまい反射光から取得する誤差信号の S/N 比が悪化してしまう (§2.5 参照)。結果的に共振器のロックが非効率的もしくは困難になるであろう。

## 2.4 位相変調

本研究ではPDH法を用いて光共振器のロックをするが、そこでは位相変調という操作をレーザーに対して行う。位相変調は、本研究に限らず光学全般で頻繁に用いられている手法であり、この節では位相変調の簡単な概要と、位相変調器の原理となるPockels効果について概説する。

### 2.4.1 サイドバンド

位相変調とは、レーザーの電場  $E_0 e^{-i\omega_0 t}$  の位相部分に周波数  $\Omega$  で変化する位相差  $\phi_m = \beta \sin \Omega t$  を加える操作である。ここで  $\beta$  を変調深度と呼び、変調の程度の強さを表す。 $\Omega$  は変調周波数と呼ばれ、光の位相変化が振動する周波数である。位相差が時間変化することで一見複雑そうではあるが、後の復調と合わせてあらゆる情報を光により検出でき大変有用と言える。その理解の際に重要であるのが、フェーザーダイアグラムとサイドバンドの概念である。位相変調を受けた光電場は十分小さい変調深度  $\beta$  の下で、以下のように式変形できる。

$$\begin{aligned}
 E_0 e^{-i(\omega_0 t + \beta \sin(\Omega t))} &\simeq E_0 e^{-i\omega_0 t} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{-i\omega_0 t} \\
 &= E_0 \left\{ J_0(\beta) e^{-i\omega_0 t} \right. \\
 &\quad + J_1(\beta) e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} + J_{-1}(\beta) e^{-i(\omega_0 - \Omega)t} \\
 &\quad \left. + J_2(\beta) e^{-i(\omega_0 + 2\Omega)t} + J_{-2}(\beta) e^{-i(\omega_0 - 2\Omega)t} + \dots \right\} \quad (2.84) \\
 &= E_0 \left\{ J_0(\beta) e^{-i\omega_0 t} \right. \\
 &\quad + J_1(\beta) \left( e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} - e^{-i(\omega_0 - \Omega)t} \right) \\
 &\quad \left. + J_2(\beta) \left( e^{-i(\omega_0 + 2\Omega)t} + e^{-i(\omega_0 - 2\Omega)t} \right) + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

ここで  $J_k(\beta)$  は第一種  $k$  次ベッセル関数とする。これから周波数  $\omega_0$  で振動する元々の光電場に加えて、周波数  $\omega_0 \pm \Omega, \omega_0 \pm 2\Omega, \dots$  で振動する新たな電場が位相変調によって付加されていることがわかる。この  $\omega_0 \pm m\Omega$  で振動する新たな電場を  $m$  次サイドバンドと呼び、それらを運ぶ役割を担う元々の電場をキャリアと呼ぶ。また周波数雑音と同様に、例外的な誤差を除いて<sup>7</sup> 振幅が変調されることはなく、光検出器で強度を測定しても位相変調を検出することはできない。検出には光共振器を用い、共振器長またはレーザー周波数をピエゾ素子で変えることで共振器の透過光にサイドバンド成分が表れることになる。

また、サイドバンドを視覚的に表すのに有効なのがフェーザーダイアグラムである。フェーザーダイアグラムとは、複素数平面の実軸上にキャリア電場のベクトルを固定し、キャリア電場から見て他の電場ベクトルが相対的にどう時間変化しているかを表した図である。図2.13を見てわかるように同次数のサイドバンドは、お互いで対を成し、一つが右回りもう一方が左回りで回転する。2次サイドバンドは1次サイドバンドの倍速度で平

<sup>7</sup>誤差としてはEOMで変調をかける際に、EOMの印加電場の方向と入射光の偏光がずれている場合などがある。[14]

面上を回転するのは、変調周波数からも明らかであろう。周波数空間では図 2.14 のように表せる。

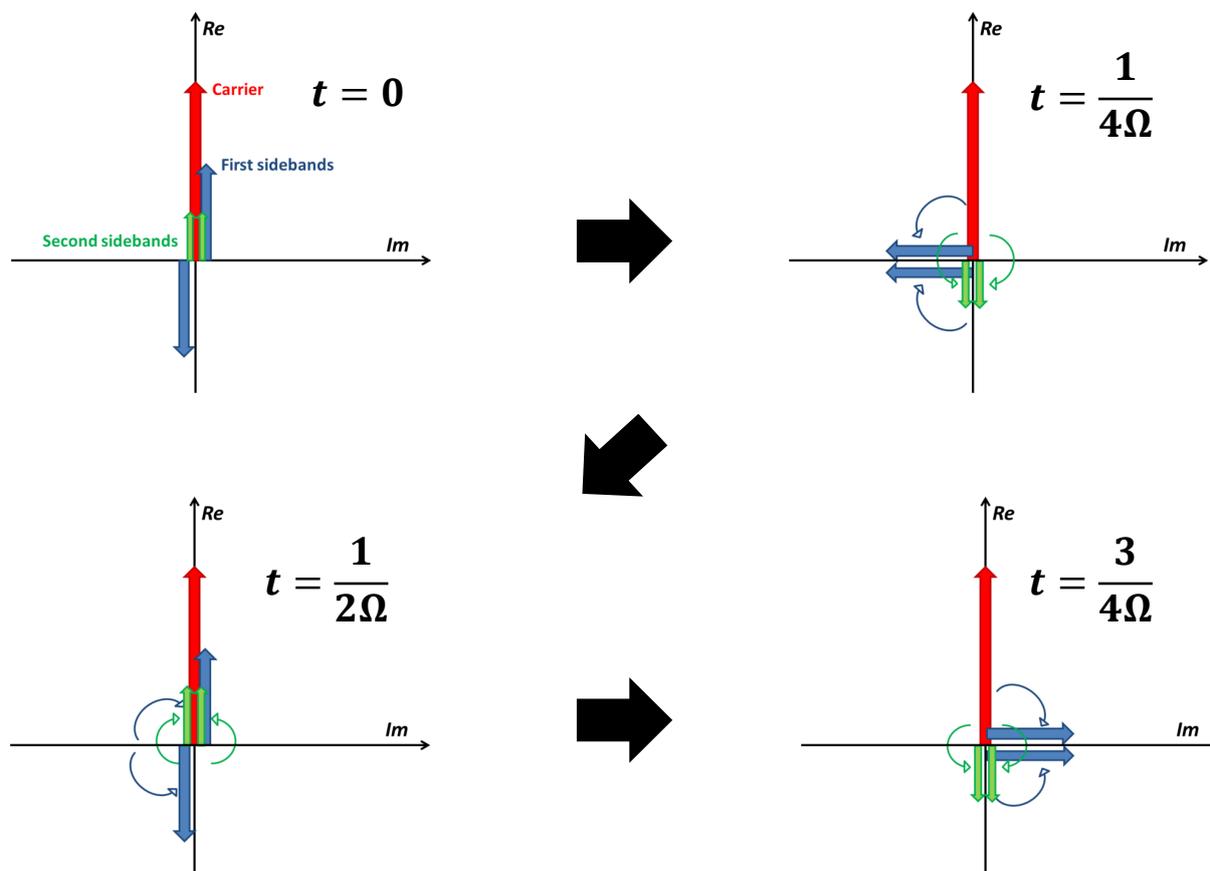


図 2.13: 位相変調のフェーザーダイアグラム

## 2.4.2 Pockels 効果

位相変調のために一般的に用いられる光学素子が Electro-Optic Modulator (通称 EOM) である。EOM の内部には電気光学結晶 (今回は  $\text{LiNbO}_3$  (LN)) が搭載されており、この結晶は印加電圧に比例して屈折率が実効的に変化する特性 (Pockels 効果と呼ぶ) を持つ。入射光は、印加する交流電圧に従った屈折率変化の下でこの結晶内を伝播し、結果的に透過光には式 2.84 で示したような位相変調が加わる。本研究で用いた New Focus 社の 15MHz 共鳴型 EOM4003 シリーズを例にとると、変調周波数  $\Omega$  は 15MHz で、変調深度  $\beta$  は印加電圧の振幅に相当する量となる (後述)。また共鳴型 EOM は内部回路の特性から共鳴周波数でしか変調はできないが、必要とする印加電圧のエネルギーが小さくて済むという利点がある。以下では、この Pockels 効果について非線形光学の観点から説明する。

一般に物質は、外部電場に対する応答として一定の内部分極を形成する。特に分極  $P(t)$  と外部電場  $E(t)$  が

$$P(t) = \epsilon_0 \chi E(t) \quad (2.85)$$

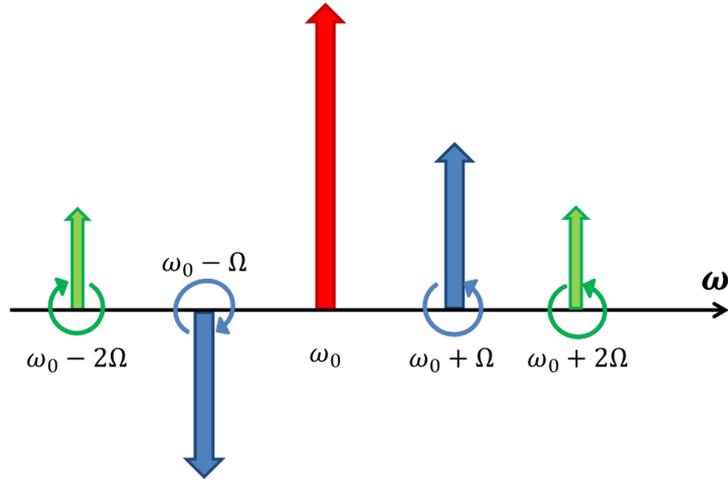


図 2.14: 位相変調光のサイドバンド

のような比例関係を示す媒質を線形媒質と呼び、それ以外を非線形媒質と呼ぶ。(ここで  $\epsilon_0$  は真空中での誘電率、 $\chi$  は電気感受率である。)特に Pockels 効果を示す媒質は、式 2.86 のような 2 次の非線形応答が強いものである。

$$P(t) \simeq \epsilon_0 \chi E(t) + 2dE(t)^2 \quad (2.86)$$

ここで、 $d$  は各媒質の非線形性を特徴づけるパラメータである。この非線形媒質に以下で示される外部電場が加わることを考えよう。

$$E(t) = E_{DC} + E_{\omega_0}(t) = E_{DC} + \text{Re}\{E_{\omega_0} \exp(i\omega_0 t)\} \quad (2.87)$$

$$= E_{DC} + \frac{E_{\omega_0} \exp(i\omega_0 t) + E_{\omega_0}^* \exp(-i\omega_0 t)}{2} \quad (2.88)$$

重要なのは DC 成分は結晶への印加電圧から起因するもので、AC 成分は入射光による電場であること。(図 2.15 参照) したがって、AC 成分の周波数  $\omega_0$  は式 2.84 のキャリア電場の周波数に相当する。

この時、2 次の非線形効果による分極ベクトルへの寄与  $P^{NL}(t)$  は

$$\begin{aligned} P^{NL}(t) &\equiv 2d|E(t)|^2 \\ &= 2d \left[ E_{DC}^2 + E_{DC} \{E_{\omega_0} \exp(i\omega_0 t) + E_{\omega_0}^* \exp(-i\omega_0 t)\} \right] \\ &\quad + 2d \left( \frac{E_{\omega_0} \exp(i\omega_0 t) + E_{\omega_0}^* \exp(-i\omega_0 t)}{2} \right)^2 \\ &= d(2E_{DC}^2 + |E_{\omega_0}|^2) \\ &\quad + 2d \left( 2\text{Re}\{E_{DC} E_{\omega_0} \exp(i\omega_0 t)\} + \frac{1}{2} \text{Re}\{E_{\omega_0}^2 \exp(i2\omega_0 t)\} \right) \\ &= P_{DC}^{NL} + \text{Re}\{P_{\omega_0}^{NL} \exp(i\omega_0 t)\} + \text{Re}\{P_{2\omega_0}^{NL} \exp(i2\omega_0 t)\} \end{aligned} \quad (2.89)$$

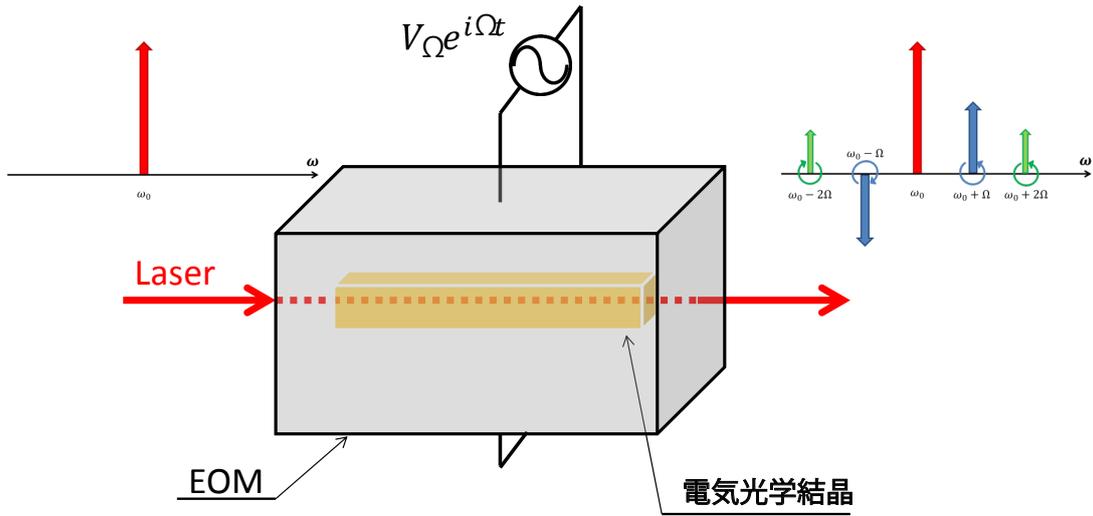


図 2.15: EOM の概念図

$$\text{where } \begin{cases} P_{DC}^{NL} = d(2E_{DC}^2 + |E_{\omega_0}|^2) \\ P_{\omega_0}^{NL} = 4dE_{DC}E_{\omega_0} \\ P_{2\omega_0}^{NL} = dE_{\omega_0}E_{\omega_0} \end{cases} \quad (2.90)$$

AC成分の振幅がDC成分の絶対値よりも十分小さい ( $|E_{\omega_0}| \ll |E_{DC}|$ ) とすると、 $|E_{\omega_0}|^2, E_{\omega_0}E_{\omega_0}$  の項を無視できて

$$P_{NL}(t) \simeq 2dE_{DC}^2 + \text{Re}\{P_{\omega_0}^{NL}\exp(i\omega_0 t)\} \quad (2.91)$$

ここでは媒質の入射光に対する応答の非線形性を見たいので、 $E(t)$  と  $P_{NL}(t)$  の周波数  $\omega_0$  の AC 成分同士を比べると

$$P_{\omega_0}(t) = \text{Re}\left\{(\epsilon_0\chi E_{\omega_0} + P_{\omega_0}^{NL})\exp(i\omega t)\right\} \quad (2.92)$$

$$= \epsilon_0\left(\chi + \frac{4d}{\epsilon_0}E_{DC}\right)E_{\omega_0}(t) = \epsilon_0\chi'E_{\omega_0}(t) \quad (2.93)$$

このように入射光に対する電気感受率が外部からの DC 電圧により実効的に変化していることがわかる。 $\chi \rightarrow \chi'$  に相当する屈折率変化は  $n^2 = 1 + \chi$  から

$$\Delta n = \frac{\Delta\chi}{2n} = \frac{2d}{n\epsilon_0}E_{DC} \quad (2.94)$$

通常は媒質の 2 次非線形パラメータ  $d$  の代わりに、印加電圧の方向における電気光学テンソル成分  $r$  を用いて以下のように書き表せる。

$$\Delta n = \frac{n^3 r}{2}E_{DC} \quad (2.95)$$

$$\text{where } r = \frac{4}{\epsilon_0 n^4}d \quad (2.96)$$

以上、印加電圧に応じて媒質の屈折率が変わる Pockels 効果を示すことができた。今回は、DC 印加電圧が屈折率を一定値変化させる事を定式化したが、印加電圧を光電場  $\omega_0$  (通常は  $\sim$ THz 程度) より十分小さい周波数の交流電圧としても同様の議論ができる。なので  $E_{DC} \rightarrow E_{\Omega} \exp(i\Omega t)$  を代入し  $l$  を非線形結晶の結晶長として、屈折率変化に伴う変調位相  $\phi_m$  を求めると

$$\phi_m = 2\pi \frac{\Delta n l}{\lambda} = \frac{\pi l}{\lambda} n^3 r E_{\Omega} \exp(i\Omega t) \quad (2.97)$$

式 2.84 と比較すると、変調深度  $\beta$  は  $\frac{\pi l}{\lambda} n^3 r E_{\Omega}$  に相当することがわかる。

## 2.5 PDH 法

この節では共振器のロックおよびレーザーの周波数安定化のために用いられる PDH 法について基本的な原理を説明し、さらなる解析を通して PDH 法の伝達関数を導出する。

### 2.5.1 共振器のロックと周波数安定化

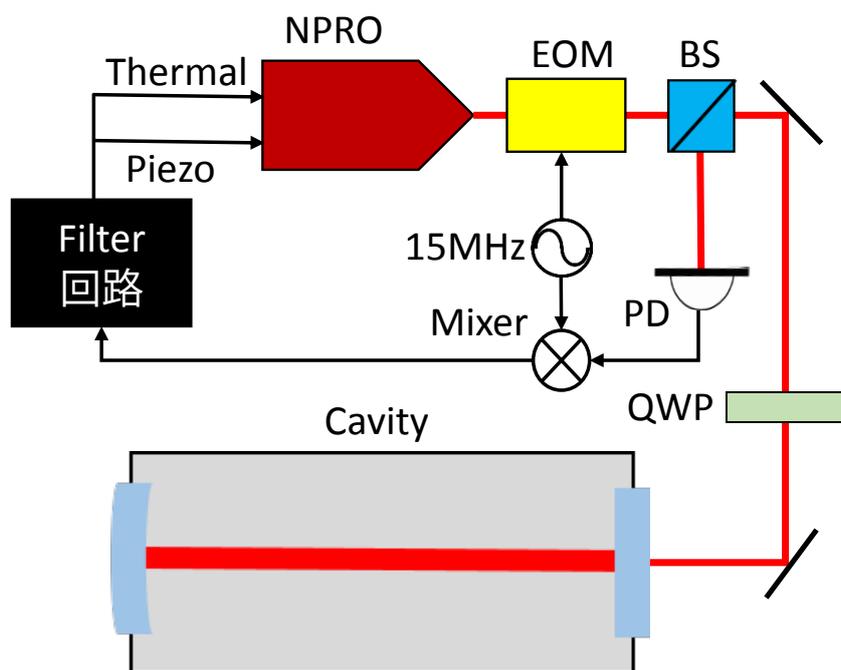


図 2.16: PDH 法の基本構成

PDH 法の基本的な構成は図 2.16 である。レーザーはまず EOM によって位相変調を受け、式 2.84 で示したようなサイドバンドが立つ。ここでは単純化のため一次サイドバン

ドのみを考え、式 2.84 は以下のように近似される。

$$E_{PM} = E_0 e^{-i(\omega_0 t + \beta \sin(\Omega t))} \quad (2.98)$$

$$\approx E_0 J_0(\beta) e^{-i\omega_0 t} + E_0 J_1(\beta) \left( e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} - e^{-i(\omega_0 - \Omega)t} \right) \quad (2.99)$$

次にロスのない共振器の入射鏡における電場反射率の周波数特性を考えると、§2.3 の式 2.55 から簡単に求まり

$$F(\omega) = \frac{E_r}{E_{in}} \quad (2.100)$$

$$= -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 \exp(i\phi)}{1 - \exp(i\phi) r_1 r_2} \quad (2.101)$$

$$= \frac{-r_1 + r_2 \exp(i \frac{\omega}{\Delta f_{FSR}})}{1 - \exp(i \frac{\omega}{\Delta f_{FSR}}) r_1 r_2} \quad (2.102)$$

この周波数特性を持つ光共振器に、式 2.99 で示した位相変調後のレーザーを入射させるとその反射電場は

$$E_r = E_0 J_0(\beta) F(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} + E_0 J_1(\beta) \left( F(\omega_0 + \Omega) e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} - F(\omega_0 - \Omega) e^{-i(\omega_0 - \Omega)t} \right) \quad (2.103)$$

この反射光強度を光検出器で測定した時の電圧信号は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} V_{PD} &\propto |E_r|^2 \\ &= 2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Re}\{F(\omega_0) F^*(\omega_0 + \Omega) - F^*(\omega_0) F(\omega_0 - \Omega)\} \cos \Omega t \\ &\quad + 2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Im}\{F(\omega_0) F^*(\omega_0 + \Omega) - F^*(\omega_0) F(\omega_0 - \Omega)\} \sin \Omega t \\ &\quad + (2\Omega \text{terms}) + (\text{DC terms}) \end{aligned} \quad (2.104)$$

$P_c \equiv |E_0|^2 J_0(\beta)^2$ ,  $P_s \equiv |E_0|^2 J_1(\beta)^2$  でそれぞれキャリア電場とサイドバンドのパワーを表す。この表式 2.104 の中で周波数  $\Omega$  で振動する項が重要であり、EOM への印加電圧信号で復調 (信号を掛け合わせる) するとこれらの項から誤差信号が得られる。

まず  $\Omega \ll \frac{\Delta f_{FSR}}{2\mathcal{F}}$ 、すなわち変調周波数が共振器の半値半幅に比べて十分小さい時を考えると

$$F^{(*)}(\omega_0 \pm \Omega) \approx F^{(*)}(\omega_0) \pm \left. \frac{\partial F^{(*)}(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Omega \quad (2.105)$$

と近似できる。(複合同順)したがって

$$F(\omega_0) F^*(\omega_0 + \Omega) - F^*(\omega_0) F(\omega_0 - \Omega)$$

$$\approx \left( F(\omega_0) \frac{\partial F^*(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} + F^*(\omega_0) \frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right) \Omega \quad (2.106)$$

$$= \frac{\partial |F(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \quad \Omega \in \Re \quad (2.107)$$

よって式 2.107 は実数となるので、式 2.104 では  $\cos \Omega t$  の項のみが残る。ここに EOM への印可電圧  $V_{EOM} \propto \sin \Omega t$  を掛け合わせるわけだが、位相シフタによって位相を  $\pi/2$  遅らせて (quadrature-phase) 復調し、ローパスフィルター (LPF) で周波数  $2\Omega$  以上の AC 成分を取り除くと誤差信号をうまく取得できる。

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{P_c P_s} \Omega \frac{\partial |F(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \cos \Omega t \times \cos \Omega t \\ &= \sqrt{P_c P_s} \Omega \frac{\partial |F(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} (1 + \cos 2\Omega t) \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\xrightarrow{LPF} V_e = \sqrt{P_c P_s} \Omega \frac{\partial |F(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \quad (2.109)$$

式 2.109 では反射光強度の周波数特性に対する微分信号が含まれていることがわかる。そもそも共振器をロックするためには符号の切り替わりで共振点を判別し、誤差修正のためのフィードバック信号を返さねばならなかった。しかしながら §2.3.2 の図 2.9 から見て、反射光強度は共振点に対して左右対称であるため符号は切り替わらない。そこで微分信号により反射光強度のプロットの傾きを取ることで、共振点周りでの符号切り替えを実現させている。これこそ PDH 法の主な特色である。ここで周波数が共振点から微小にずれていたとする。

$$\omega_0 \mapsto 2\pi \Delta f_{FSR} m + \delta \omega \quad (\delta \omega \ll 1) \quad (2.110)$$

すると誤差信号は

$$V_e = -\sqrt{P_c P_s} \Omega \frac{r_1 r_2 (1 - r_1^2) (1 - r_2^2) (1 + 2r_2^2) \sin \frac{\delta \omega}{\Delta f_{FSR}}}{(1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \frac{\delta \omega}{\Delta f_{FSR}})^2} \quad (2.111)$$

$$\approx -\sqrt{P_c P_s} \Omega \frac{r_1 r_2 (1 - r_1^2) (1 - r_2^2) (1 + 2r_2^2)}{(1 - r_1 r_2)^4} \cdot \frac{\delta \omega}{\Delta f_{FSR}} \quad (2.112)$$

したがって周波数のずれ  $\delta \omega$  に比例した誤差信号が検出される。この  $\omega$  を一定のずれのように表記したが、実際は時間依存しており周波数雑音と等価なので

$$\delta \omega = \phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{\phi}_n(\Omega) e^{-i\Omega t} \quad (2.113)$$

このようにスペクトル分解が可能である。さらに次節で見るように、PDH 法の伝達関数は光共振器の半値半幅 ( $\frac{\Delta f_{FSR}}{2\mathcal{F}}$ ) のバンド幅を持っているが、今回は  $\Omega \ll \frac{\Delta f_{FSR}}{2\mathcal{F}}$  の条件下なので実際は誤差信号のバンド幅はローパスフィルターのカットオフ周波数で決まる。

次に  $\Omega \gg \frac{\Delta f_{FSR}}{2\mathcal{F}}$  の時、つまり変調周波数が光共振器の半値半幅より十分大きい時を考える。この時周波数  $\omega_0 \pm \Omega$  の電場はほぼすべて反射される ( $F(\omega_0 \pm \Omega) \approx -1$ ) ので

$$F(\omega_0)F^*(\omega_0 + \Omega) - F^*(\omega_0)F(\omega_0 - \Omega) \approx -2i\text{Im}\{F(\omega_0)\} \quad (2.114)$$

よって式 2.114 は純虚数となるので、式 2.104 では  $\sin \Omega t$  の項のみが残る。ここに EOM への印可電圧を位相シフトさせず同相 (in-phase) で復調し、LPF で周波数  $2\Omega$  以上の AC 成分を取り除くと誤差信号をうまく取得できる。

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{P_c P_s}(-2\text{Im}\{F(\omega_0)\}) \sin \Omega t \times \sin \Omega t \\ & = -2\sqrt{P_c P_s} \text{Im}\{F(\omega_0)\}(1 - \cos 2\Omega t) \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\xrightarrow{\text{LPF}} V_e = -2\sqrt{P_c P_s} \text{Im}\{F(\omega_0)\} \quad (2.116)$$

同様に周波数が共振点から微小にずれていたとすると、誤差信号は

$$V_e = -2\sqrt{P_c P_s} \frac{r_2(1 - r_1^2) \sin \frac{\delta\omega}{\Delta f_{FSR}}}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \frac{\delta\omega}{\Delta f_{FSR}}} \quad (2.117)$$

$$\approx -2\sqrt{P_c P_s} \frac{r_2(1 - r_1^2)}{(1 - r_1 r_2)^2} \cdot \frac{\delta\omega}{\Delta f_{FSR}} \quad (2.118)$$

さらに、2つのミラーの振幅反射率が等しく ( $r_1 = r_2 = r$ )、十分高い ( $r_1 \approx 1, r_2 \approx 1, \mathcal{F} \approx \frac{\pi}{1-r^2}$ ) 時に以下のように近似できる。

$$V_e \approx -2\sqrt{P_c P_s} \frac{\mathcal{F}}{\pi \Delta f_{FSR}} \delta\omega \quad (2.119)$$

したがって周波数のずれ  $\delta\omega$  に比例した誤差信号が検出される。この場合の誤差信号のバンド幅は、 $\Omega \ll \frac{\Delta f_{FSR}}{2\mathcal{F}}$  の条件から共振器の半値半幅もしくは LPF のカットオフ周波数のどちらか小さい方で決まると言える。本研究では EOM での変調周波数  $\Omega = 15\text{MHz}$  に対して、共振器の半値半幅は  $22\text{kHz}$  であるので後者の場合を採用し、同相の復調から取得される誤差信号を図 2.17 にプロットする。

いずれにせよ誤差信号を取得するには、復調信号の位相遅れが大変重要になる。得られた誤差信号をレーザー源にフィードバックすれば共振器を基準にしたレーザー周波数安定化、共振器に装着されたピエゾ素子にフィードバックすれば共振器長をレーザー周波数にロックすることになる。

## 2.5.2 伝達関数

時間変化する位相雑音<sup>8</sup>を仮定した場合の PDH 法を解析的に議論し、最終的に伝達関数を求める。まず入射光の電場を以下のように近似する。

$$E_{in}(t) = E_0 \exp[i(\omega_0 t + \phi_n(t))] \quad (2.120)$$

$$\approx E_0 \exp(i\omega_0 t) (1 + i\phi_n(t)) \quad (2.121)$$

<sup>8</sup>§2.1.3 の式 2.19 から位相雑音と周波数雑音は等価であることはすでに示した。

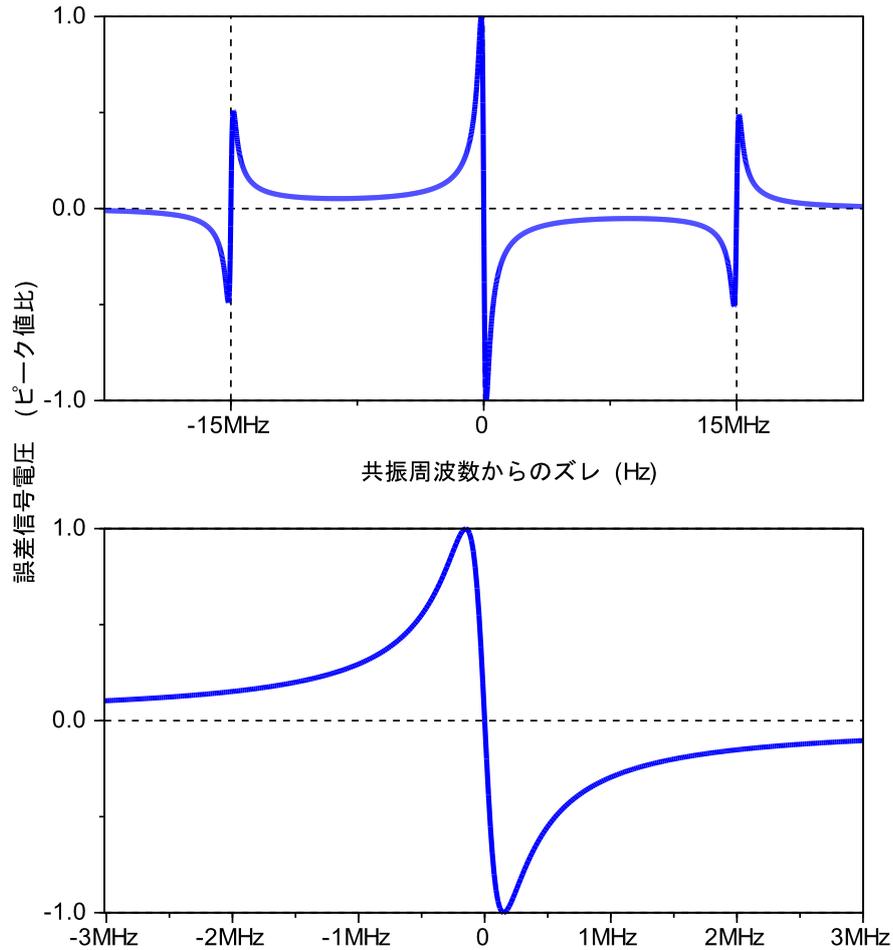


図 2.17: レーザー周波数に対する誤差信号変化

EOM にてこれを位相変調すると

$$E_{PM}(t) = \left\{ E_0 J_0(\beta) e^{-i\omega_0 t} + E_0 J_1(\beta) \left( e^{-i(\omega_0 + \Omega)t} - e^{-i(\omega_0 - \Omega)t} \right) \right\} \times (1 + i\phi_n(t)) \quad (2.122)$$

次にこの反射電場を考えよう。位相雑音  $\phi_n(t)$  を仮定しなかった §2.5.1 では存在する電場がキャリアとサイドバンド 2 つのみだったが、ここでは位相雑音による連続的なバンドが存在するため式 2.122 を Fourier 変換すると扱いやすい。変調後の電場、反射電場、位相雑音の Fourier 変換をそれぞれ  $\tilde{E}_{PM}(\omega)$ ,  $\tilde{E}_r(\omega)$ ,  $\tilde{\phi}_n(\omega)$  として

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{PM}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt E_0 (1 + i\phi_n(t)) e^{i\omega t} \sum_{k=-1}^1 J_k(\beta) e^{-i(\omega_0 + k\Omega)t} \\ &= E_0 \sum_{k=-1}^1 J_k(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_0 - k\Omega)t} + i\phi_n(t) e^{i(\omega - \omega_0 - k\Omega)t} \\ &= E_0 \sum_{k=-1}^1 J_k(\beta) \{ 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - k\Omega) + i\tilde{\phi}_n(\omega - \omega_0 - k\Omega) \} \\ \tilde{E}_r(\omega) &= F(\omega) \tilde{E}_{PM}(\omega) \end{aligned} \quad (2.123)$$

反射電場の時間変化を見るために、式 2.123 を逆 Fourier 変換して

$$E_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \tilde{E}_{PM}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.124)$$

$$= E_0 \sum_{k=-1}^1 J_k(\beta) \left\{ F(\omega_0 + k\Omega) e^{i(\omega_0 + k\Omega)t} + \right. \quad (2.125)$$

$$\left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) i\tilde{\phi}_n(\omega - \omega_0 + k\Omega) e^{-i\omega t} \right\} \quad (2.126)$$

光検出器での光強度を表す電圧信号は、 $\phi_n^2$  の項を無視して

$$V_{PD}(t) \propto |E_r(t)|^2 \quad (2.127)$$

$$\approx E_0^2 \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 J_k(\beta) J_l(\beta) \left\{ F^*(\omega_0 + k\Omega) F(\omega_0 + l\Omega) e^{-i(k-l)\Omega t} \right. \quad (2.128)$$

$$+ F^*(\omega_0 + k\Omega) e^{-i(\omega_0 + k\Omega)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) i\tilde{\phi}_n(\omega - \omega_0 + l\Omega) e^{-i\omega t} \quad (2.129)$$

$$\left. - F(\omega_0 + l\Omega) e^{i(\omega_0 + l\Omega)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F^*(\omega) i\tilde{\phi}_n(\omega - \omega_0 + k\Omega) e^{i\omega t} \right\} \quad (2.130)$$

第 1 項は周波数ゆらぎの DC 成分なのでこれ以降の議論では無視して進める。この電圧信号を再び Fourier 変換すると

$$\tilde{V}_{PD}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V_{PD}(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.131)$$

$$= E_0^2 \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 J_k(\beta) J_l(\beta) \left\{ \right. \quad (2.132)$$

$$+ F^*(\omega_0 + k\Omega) F(\omega + \omega_0 + k\Omega) i\tilde{\phi}_n(\omega + (k-l)\Omega) \quad (2.133)$$

$$\left. - F(\omega_0 + l\Omega) F^*(-\omega + \omega_0 + l\Omega) i\tilde{\phi}_n(\omega + (k-l)\Omega) \right\} \quad (2.134)$$

上記の式では角周波数ゆらぎが位相雑音の形で表記されているので、これを角周波数ゆらぎ  $\delta\omega$  に直さねばならない。まず角周波数ゆらぎは §2.1.3 の式 2.19 から拡張して

$$\delta\omega(t) \equiv \frac{\partial\phi_n(t)}{\partial t} \quad (2.135)$$

と定義できて、両辺 Fourier 変換することで

$$\tilde{\delta\omega}(\omega) = i\omega\tilde{\phi}_n(\omega) \quad (2.136)$$

を得る。これを式 2.134 に代入して

$$(2.134) = E_0^2 \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 \frac{J_k(\beta) J_l(\beta)}{\omega + (k-l)\Omega} \left\{ \right. \quad (2.137)$$

$$F^*(\omega_0 + k\Omega) F(\omega + \omega_0 + k\Omega) \tilde{\delta\omega}(\omega + (k-l)\Omega) \quad (2.138)$$

$$\left. - F(\omega_0 + l\Omega) F^*(-\omega + \omega_0 + l\Omega) \tilde{\delta\omega}(\omega + (k-l)\Omega) \right\} \quad (2.139)$$

この電圧信号を復調し誤差信号を得るのであるが、今回使用した EOM の変調周波数及び光共振器の半値全幅の大小関係より同相での復調のみを考える。実時間上で誤差信号は

$$V_e(t) = V_{PD}(t) \sin \omega t \quad (2.140)$$

$$= \frac{-iV_{PD}(t)}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \quad (2.141)$$

両辺 Fourier 変換してみると

$$\tilde{V}_e(\omega) = \frac{-i}{2}(\tilde{V}_{PD}(\omega + \Omega) - \tilde{V}_{PD}(\omega - \Omega)) \quad (2.142)$$

最終的には、PDH 法の伝達関数:  $H(\omega) \equiv \tilde{V}_e(\omega)/\delta\tilde{\omega}(\omega)$  を導きたいので、式 2.142 の中で  $\delta\tilde{\omega}$  に比例する項を考えればよい。したがって伝達関数は

$$H(\omega) \equiv \frac{\tilde{V}_e(\omega)}{\delta\tilde{\omega}(\omega)} \quad (2.143)$$

$$\simeq -\frac{iE_0^2}{\omega} J_0(\beta) J_1(\beta) \{F^*(\omega_0 + \Omega)F(\omega_0 + \omega) - F^*(\omega_0 + \Omega - \omega)F(\omega_0)\} \quad (2.144)$$

$$- F^*(\omega_0)F(\omega_0 + \Omega + \omega) + F^*(\omega_0 - \omega)F(\omega_0 + \Omega)\} \quad (2.145)$$

今回同相で復調を行ったので、§2.5.1 の時と同様にサイドバンド付近の電場がそのまま反射する ( $F(\omega_0 \pm \Omega) \approx -1, F(\omega_0 + \Omega \pm \omega) \approx -1$ ) 近似を用いると

$$H(\omega) = i\sqrt{P_c P_s} \frac{1}{\omega} \{F(\omega_0 + \omega) - F(\omega_0) - F^*(\omega_0) + F^*(\omega_0 - \omega)\} \quad (2.146)$$

$$= i2\sqrt{P_c P_s} \cdot \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{t_1^2 r_2 e^{i\omega/\Delta f_{FSR}}}{1 - r_1 r_2 e^{i\omega/\Delta f_{FSR}}} - \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} \right\} \quad (2.147)$$

さらに、 $e^{i\omega/\Delta f_{FSR}} \approx 1 + i\omega/\Delta f_{FSR}$  及び 2 つのミラーの振幅反射率が等しく十分高い ( $r_1 = r_2 = r \approx 1, \mathcal{F} \approx \frac{\pi}{1-r^2}$ ) を近似として用いると、 $t_1^2 = 1 - r^2$  となるので

$$(2.147) \approx i2\sqrt{P_c P_s} \cdot \frac{t_1^2}{\omega} \left\{ \frac{1 + i\frac{\omega}{\Delta f_{FSR}}}{1 - r_1 r_2 - r_1 r_2 i\frac{\omega}{\Delta f_{FSR}}} - \frac{1}{1 - r_1 r_2} \right\} \quad (2.148)$$

$$= i2\sqrt{P_c P_s} \cdot \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{i\frac{\omega}{\Delta f_{FSR}}}{1 - r_1 r_2 - r_1 r_2 i\frac{\omega}{\Delta f_{FSR}}} \right\} \quad (2.149)$$

$$\approx i2\sqrt{P_c P_s} \frac{\mathcal{F}}{\pi} \frac{\frac{i}{\Delta f_{FSR}}}{1 - i\frac{\pi\omega}{\mathcal{F}\Delta f_{FSR}}} \quad (2.150)$$

$$= -2\sqrt{P_c P_s} \frac{\mathcal{F}}{\pi\Delta f_{FSR}} \frac{1}{1 - i\frac{\mathcal{F}}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\Delta f_{FSR}}} \quad (2.151)$$

見やすいように角周波数  $\omega$  を周波数  $f$  に変換すると

$$H(f) \equiv \frac{V_e}{\delta v(f)} = 2\pi \frac{V_e}{\delta\omega(\omega)} \quad (2.152)$$

$$= -4\sqrt{P_c P_s} \frac{\mathcal{F}}{\Delta f_{FSR}} \frac{1}{1 - if/f_c} \quad (2.153)$$

$$\text{where } f_c = \frac{\Delta f_{FSR}}{2\mathcal{F}} \quad (2.154)$$

以上より PDH 法の誤算関数に関する伝達関数は、光共振器の半値半幅をカットオフ周波数とした 1 次 LPF として近似できる。また半値半幅は光学のみに限らず光共振器を通じた信号伝達の観点からも、非常に重要なパラメータであるため Cavity Pole とも呼ばれている。

## 2.6 周波数フィードバック系の基礎

当初、この研究の最終目的は参照共振器の安定度評価であったので、今後の課題に対する理解のためにもこの節では周波数安定化の一般的な理論と共振器の安定度評価について詳説する。

### 2.6.1 レーザー周波数雑音の測定

まず図 2.18 に示した PDH 法の基本構成をブロックダイアグラムで考える。 $f_{laser}$  はレーザーの Free run の周波数雑音、 $f'_{laser}$  は安定化後の周波数雑音、 $f_{cav}$  は共振器の周波数雑音、 $\delta f$  はそれらの差分<sup>9</sup>、 $V_e$  は mixer からの誤差信号、 $V_x$  は NPRO への制御信号である。測定できる信号は電圧のみで、レーザー周波数雑音の測定とはそれら観測量から  $f_{laser}$  を算出することを意味する。図 2.18 から、

$$V_x = \frac{GC}{1+GC}(f_{laser} - f_{cav}) \quad (2.155)$$

が成り立ち、この信号をスペクトルアナライザを用いてスペクトルごとの振幅で見ると

$$|V_x| = \left| \frac{GC}{1+GC} \right| \sqrt{|f_{laser}|^2 + |f_{cav}|^2} \approx \left| \frac{GC}{1+GC} \right| \cdot |f_{laser}| \quad (2.156)$$

$$\Leftrightarrow |f_{laser}| = \left| \frac{1+GC}{GC} \right| \cdot |V_x| \quad (2.157)$$

よってレーザー周波数雑音に比べて十分安定な共振器を用いることで、制御信号からレーザー雑音を見積ることができる<sup>10</sup>。

### 2.6.2 レーザー周波数の安定化

周波数雑音 §2.1.3 や KAGRA の周波数安定化 §1.2.4 の項において、レーザー周波数の安定化のためには共振器を参照する必要があることを示した。図 2.16 において

$$\delta f = f'_{laser} - f_{cav} = \frac{1}{1+GC}(f_{laser} - f_{cav}) \quad (2.158)$$

なので  $GC \gg 1$  の帯域において  $|f'_{laser} - f_{cav}| \approx 0$  となり、振幅と位相ともにレーザー周波数雑音は共振器のそれに近づき、文字通り参照している結果となる。また  $\delta f$  のスペクトル(いわゆる in-loop noise)には本質的な周波数雑音の情報は含まれていないが、レーザーが共振器の周波数雑音に対してどれだけ安定化しているかを示す良い指標となる。

<sup>9</sup>先行研究の例において、in-loop noise とはこのスペクトルのことである。

<sup>10</sup>実際は、図 2.16 にショットノイズや外乱雑音が入り込むため、オープンループゲイン  $GC$  の大きさに応じて帯域ごとに制御信号と誤差信号で選別し、S/N 比を向上させる。

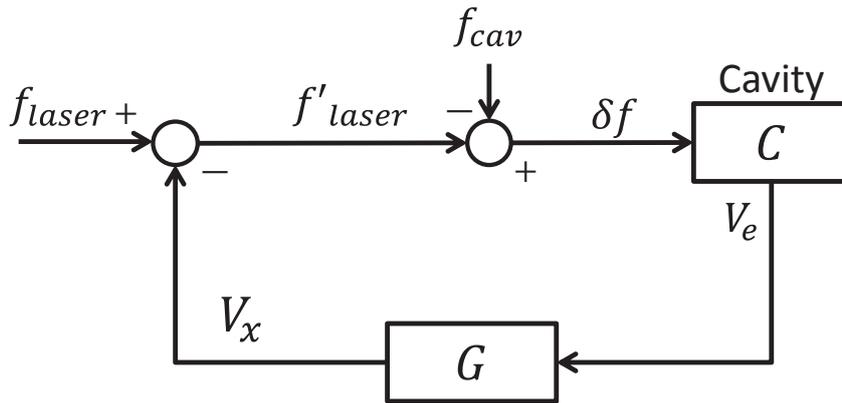


図 2.18: PDH 法のブロックダイアグラム

### 2.6.3 共振器の安定度評価

式 2.157 で示したように、レーザー雑音より安定な共振器の安定度を制御信号から測定することはできない。ここで図 2.19 のように、安定化後のレーザーをピックアップし別の共振器をレーザーにロックさせる系を考える。式 2.157 と同様の議論から

$$|V_{x2}| = \left| \frac{G_2 C_2}{1 + G_2 C_2} \right| \sqrt{|f'_{laser}|^2 + |f_{cav2}|^2} \approx \left| \frac{G_2 C_2}{1 + G_2 C_2} \right| |f'_{laser}| \quad (2.159)$$

$$\Leftrightarrow |f'_{laser}| \approx |f_{cav1}| = \left| \frac{1 + G_2 C_2}{G_2 C_2} \right| |V_{x2}| \quad (2.160)$$

とわかるので初段のオープンループゲイン  $G_1 C_1$  が十分大きい帯域において、次段の制御信号  $V_{x2}$  から対象となる共振器の安定度を算出することができる。この時、次段で用いる共振器の周波数雑音  $f_{cav2}$  は測定したい共振器  $f_{cav1}$  より十分安定でなくてはならないことは明らかである。

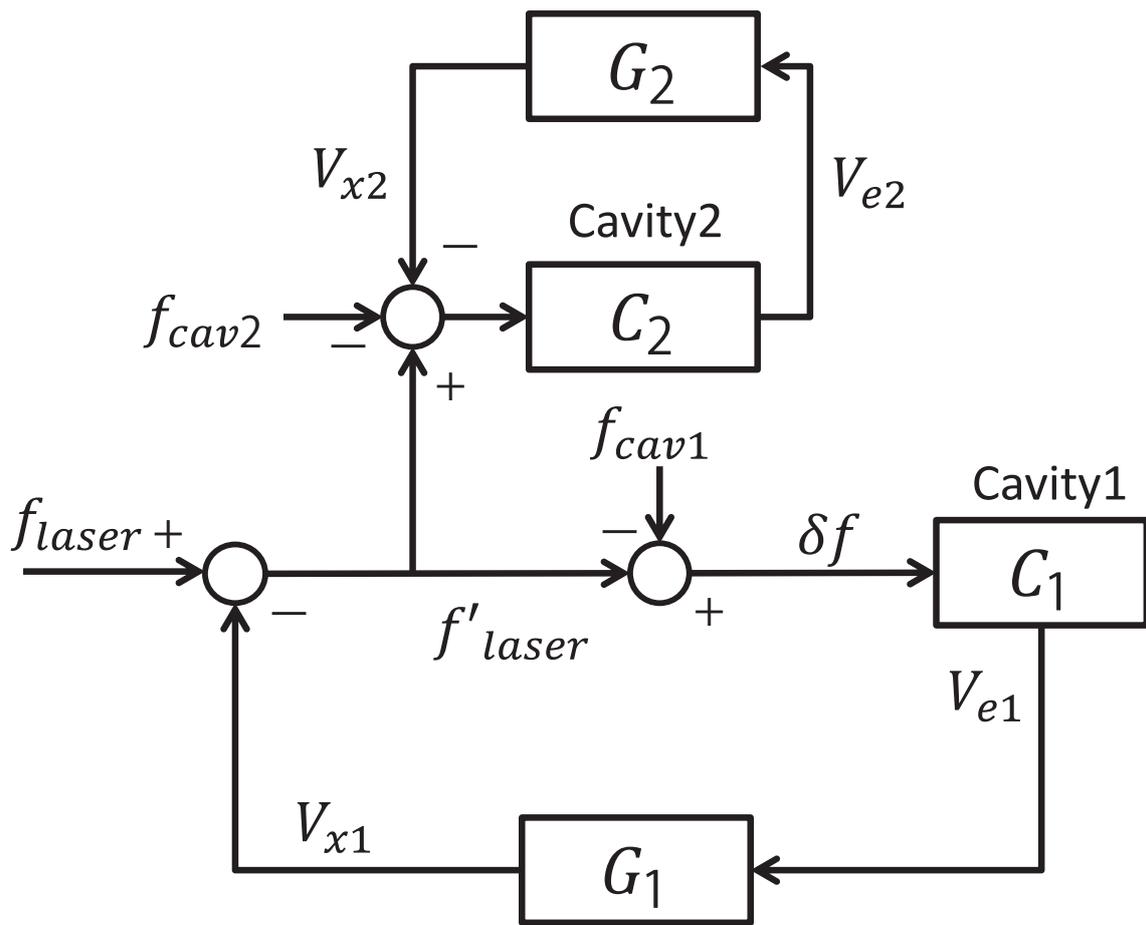


図 2.19: 共振器の安定度測定系のブロックダイヤグラム

# 第3章 実験系

## 3.1 概要

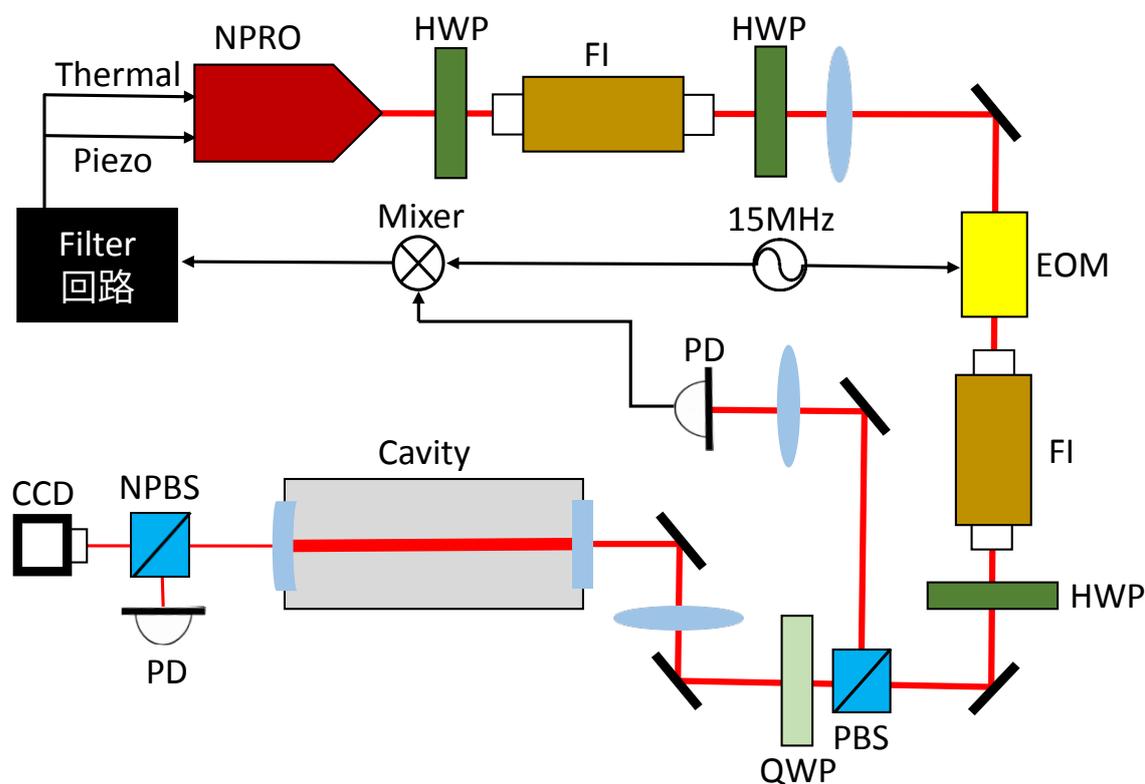


図 3.1: 実験系の概念図

まず本研究で用いた実験計の全体図を、図 3.1 に示す。光学素子は全て光学台の上に置かれている。レーザーを出た光は、戻り光を防ぐ二つのファラデーアイソレーターを通り、その間の EOM によって位相変調を受ける。その後、 $\frac{1}{2}$  波長板と偏光ビームスプリッター (PBS) そして  $\frac{1}{4}$  波長板を通過する。PBS と  $\frac{1}{4}$  波長板は共振器からの反射光を分離するための機構であり、行きの光路では光が全て PBS を透過するように直前の  $\frac{1}{2}$  波長板によって偏光面が調整される。PBS 透過後の  $\frac{1}{4}$  波長板によって円偏光になった光は、モードマッチング用のレンズとアライメント用のミラーを経て光共振器に入射される。反射光は入射光と同じ光路を辿り、途中の  $\frac{1}{4}$  波長板で再び直線偏光に戻るが、入射光と直交した偏光面を持つため PBS で反射され高周波用光検出器 (RFPD) にて検出される。一方、共振器の透過光は非偏光 BS によって二手に分かれ、片方は空間モードのモニター用のプロ

ファイラーへと向かい、もう片方は PD で光強度信号へと変えられる。変調法によって、検出された反射光強度から誤差信号を取得し、それを NPRO のチューニング端子にフィードバックすることでレーザー周波数の安定化を行っている。今回使用した YAG レーザーは、周波数特性を分けた温度調整端子とピエゾ端子の二つを持ち合わせており、Filter 回路で分岐された信号がそれぞれの端子へと返される。

光共振器はマグネットベース上に置かれたマウント台に設置された。

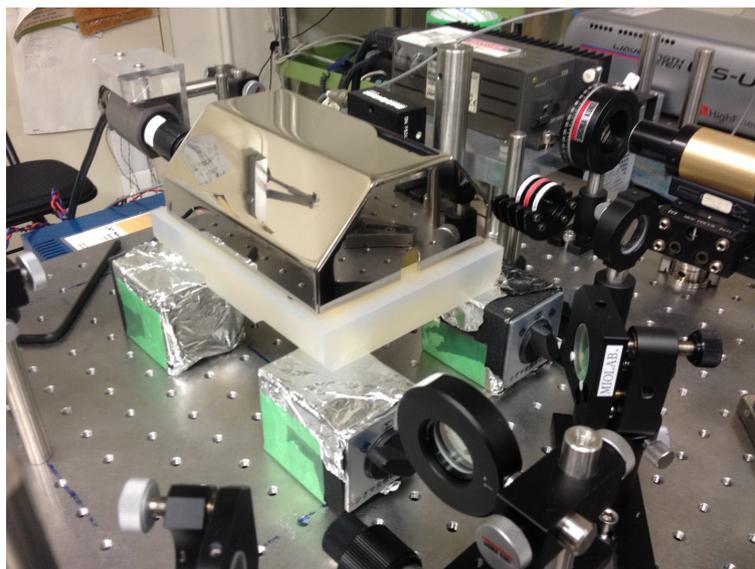


図 3.2: 共振器の取り付けられた様子

当初光学系は、遮温用の真空チャンバーに共振器を封入した図 3.3 の状態であったが、不可解な透過光によりアライメント調整が困難だったので、今回はチャンバーを用いずにレーザーのカップリングを行った。

## 3.2 YAG レーザー

### 3.2.1 NPRO

本研究では、主レーザーとして LightWave 社製 Nd:YAG レーザー Model146-1064(単一発振 1064nm、最大出力 100mW) を用いた。この光源は波長 808nm の LD 光でレーザー媒質を pump し、NPRO と呼ばれるレーザー媒質から成るリング型共振器を用いて出力を増幅させる。NPRO は Non-Planar Ring Oscillator の略称で、特徴として印加磁場の起こす Faraday 効果と立体的な光路から起因する旋光性を用いて逆戻りモードを打ち消し、単一方向のみでのレーザー発振を可能にしている。また縦モードの細い線幅 (~kHz) も特徴の一つで安定したレーザーを高い出力 (~2W) で供給できる。多くの市販 NPRO レーザーには温度調節とピエゾ素子のチャンネルが付属しており、熱膨張と逆圧電効果による周波数チューニングができる仕様となっている。違いとして温度調節は高ゲイン(チューニング

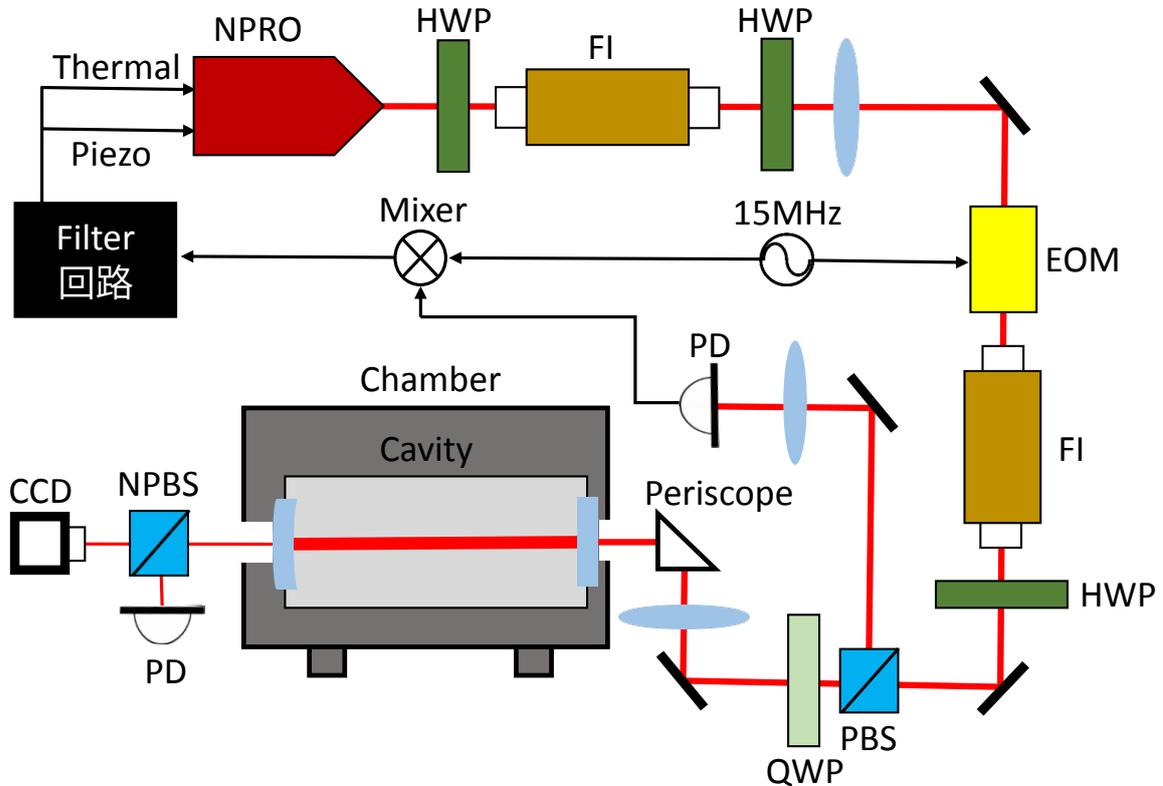


図 3.3: 実験系の概念図 (真空チャンバーを用いた場合)

レンジ $\sim 5\text{GHz/V}$ ) 低周波 ( $\sim 1\text{Hz}$ )、ピエゾ端子は低ゲイン ( $\sim 2\text{MHz/V}$ ) 高周波 ( $\sim 10\text{kHz}$ ) に適している。

### 3.2.2 Power supply

Power supply は NPRO レーザーのコントローラーの役割を担っており、 $10^{-4}\text{C}$  の精度で温度コントロールが可能なダイヤルが付属している。手動ダイヤルのほかにも、前述した温調用 BNC 端子及びピエゾ用 BNC 端子がここに取り付けられている。

#### 温度調節端子

温度によるレーザー周波数変化は、NPRO 共振器基材の屈折率変化と熱膨張によるものである。屈折率変化と熱膨張ともに共振器長が変化するため、それに応じて共振周波数も変化する。温度調節はピエゾよりも応答速度は遅い (1 $\sim$ 10 秒程度) が、大きなチューニング効率を持ちダイナミックレンジも広い。一般に固体レーザー発振は、レーザー媒質の放出し得る周波数線幅内に存在する縦モードによって決まる。そして NPRO の温度変化によって縦モードのピークが周波数空間上を平行移動し、一つの縦モードがレーザー媒質の周波数線幅を通過するほどの周波数変化が可能である。加えて、周波数線幅自体も温度変化によりドリフトするため、より大きいダ

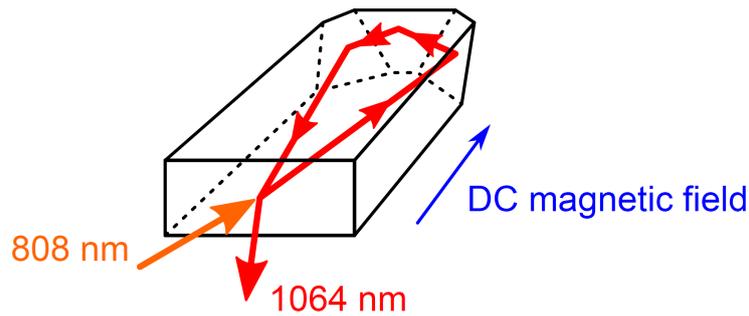


図 3.4: NPRO の概略図 [13]

イナミックレンジが実現されている。

またここで問題になってくるのが、モードホップと呼ばれる現象である。モードホップとは、周波数線幅内に複数の縦モードが同強度で発振している状態を言い、レーザー周波数が実質的に複数共存していることになるので共振器のロックなどに支障をきたす。したがって実験における温調チューニングの範囲内でモードホップが起こっていないことを確認する必要がある。

NPRO レーザーの仕様書 [15] によれば、1つの縦モードの平行移動による周波数変換効率は $-2.4\text{GHz}/^\circ\text{C}$ 、モードホップをまたいだ周波数変換効率は $-1\text{GHz}/^\circ\text{C}$ である。(図 3.5 参照) また入力電圧レンジは $\pm 10\text{V}$ で入力インピーダンスは $10\text{k}\Omega$ とされている。また、 $1\text{Hz}$ 以上の変調周波数で電圧をかけると過渡応答を示すので十分注意をする必要がある。

ここで温調チューニング効率係数の測定結果(図 3.6)を記す。これは、NPRO コントローラーに付属されているダイヤルで温度変化させた光を光スペクトラムアナライザーを用いて波長計測し、周波数に変換したものである。フィッティングの結果、チューニング効率は $-2.9\text{GHz}/^\circ\text{C}$ であると見積もられた。

## ピエゾ端子

温度調節よりも速い応答の周波数チューニングは、NPRO の共振器に装着されたピエゾ素子によって行われる。ピエゾ素子に電圧をかけると逆圧電効果が起こり、電圧値に応じて伸縮する。それに伴い NPRO の共振器長が変化し、よって共振周波数も変化する。入力電圧レンジは $\pm 15\text{V}$ で $10\text{kHz}$ 以下の変調周波数において一定のチューニング効率を可能にする。§3.5 図 3.17 で示された、ピエゾ端子への印加電圧とサイドバンドのピークから、チューニング効率は $3.4\text{MHz}/\text{V}$ と見積もられた。十分小さい変調深度では $100\text{kHz}$ まで変調周波数を高めることができるが、それ以上は非線形性が強くなる。

またピエゾ素子は微量の電気容量を持つコンデンサとして働くので、ピエゾ素子に直接かかる電圧にはローパスフィルターが実効的にかかる。このためピエゾチューニング回路の特性インピーダンスを、抵抗とコンデンサの直列と仮定して、図 3.7 のセッティングで測定した。ゲイン及び位相特性の測定結果(図 3.8)から、フィードバック系の安定なバンド幅では一定のチューニング効率 $3.4\text{MHz}/\text{V}$ とみなしていることがわかる。

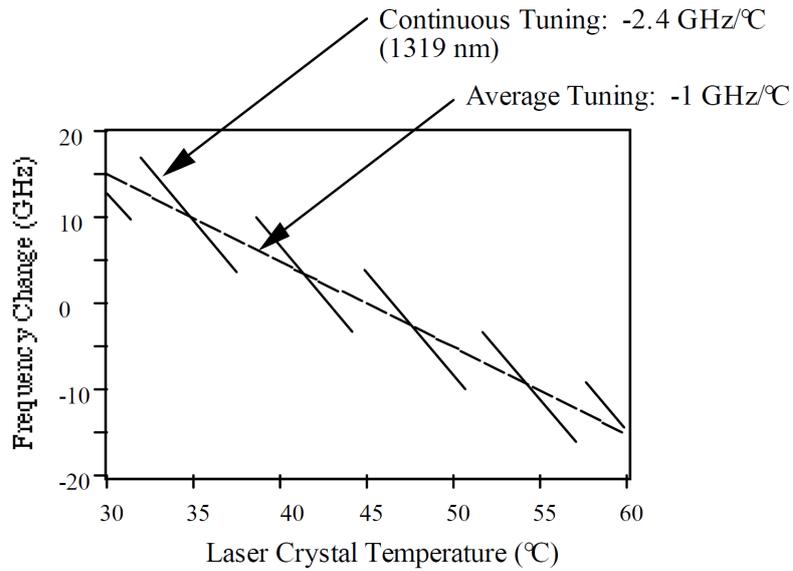


図 3.5: 温調によるチューニングの様子 [15] 実線は一つの縦モードによる周波数変化を表す。点線がモードホップをまたいだ平均周波数のドリフトを示しており、レーザー媒質の共振線幅の温度変化によるドリフトと等価である。

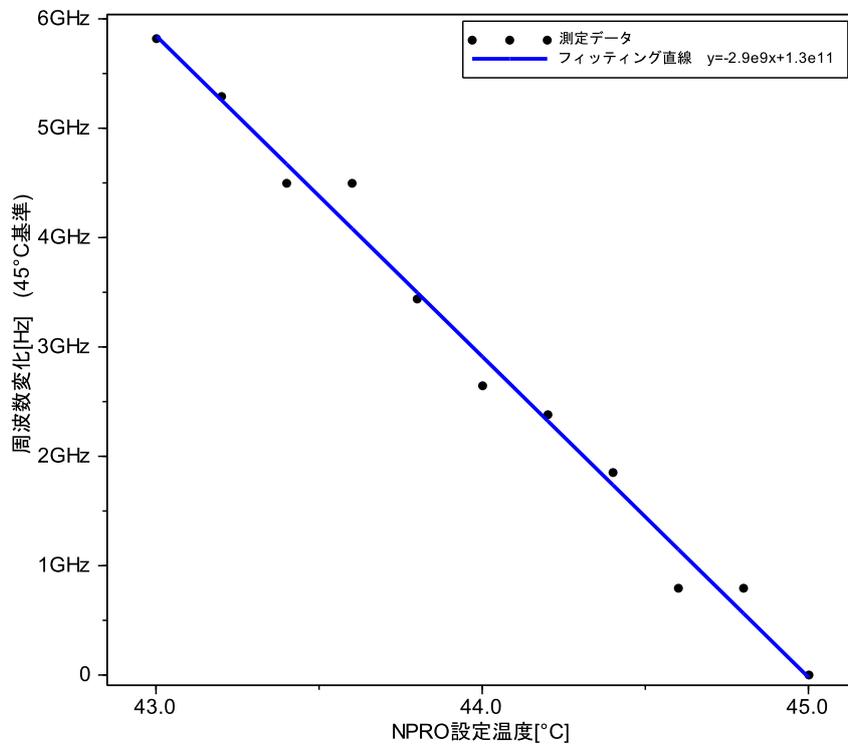


図 3.6: NPRO の設定温度とレーザー周波数のフィッティング

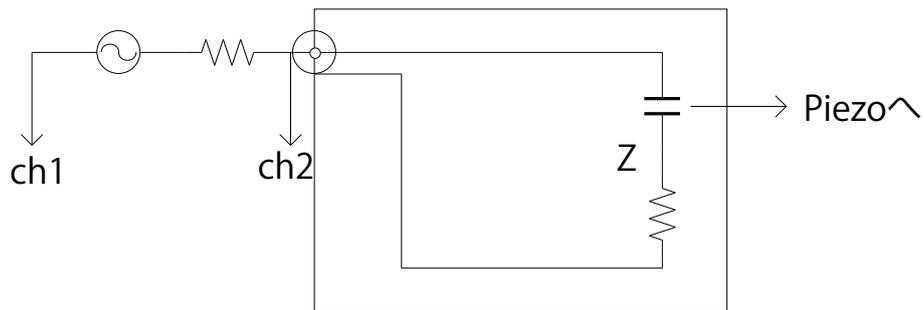


図 3.7: ピエゾ端子特性インピーダンスの測定系

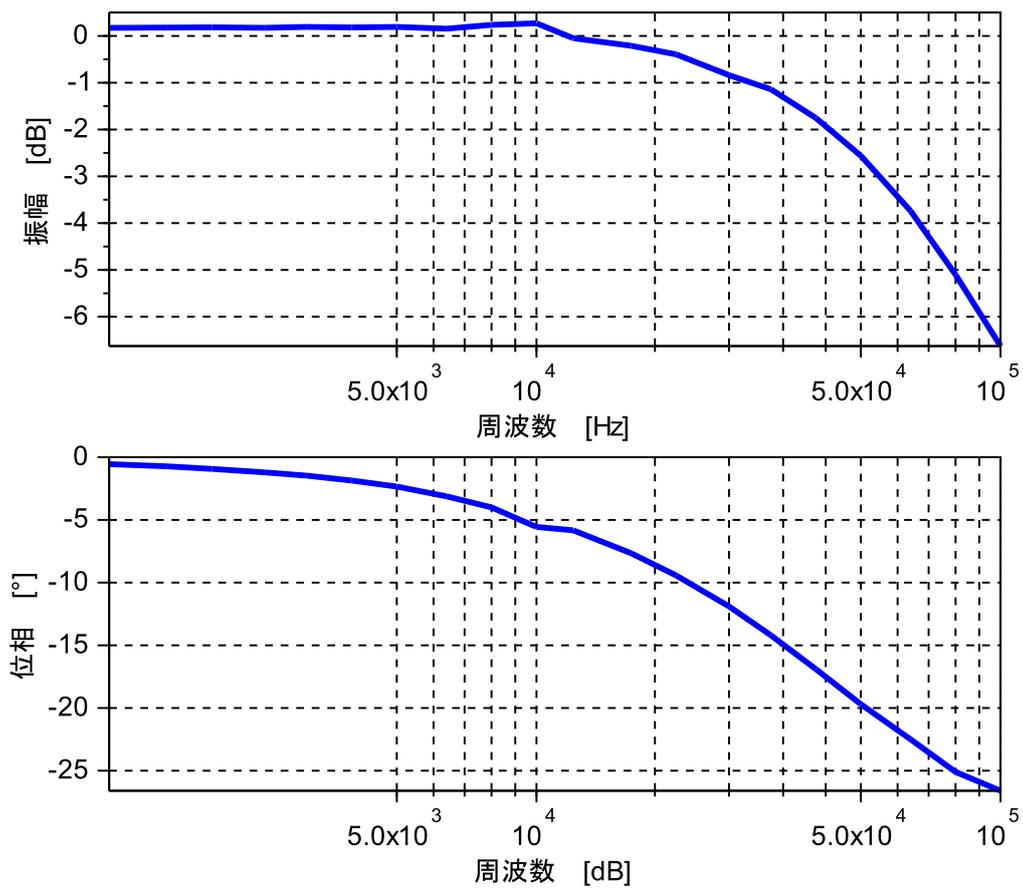


図 3.8: ピエゾ端子特性インピーダンスのボーデ線図

### 3.3 ULE 周波数参照共振器

本研究では、Advanced Thin Films 社の Cylinder Cavity と、Stable Laser Systems 社製の密閉用真空チャンバー Vacuum Housing 6010 を使用した。この共振器は KAGRA 計画のレーザー周波数安定化において実際に用いられる予定である。以下にそれぞれの詳細を記しておく。

#### 3.3.1 Fabry-Perot 共振器

まず共振器の仕様表と設計書を以下に示す。

共振器長	10cm
基材	ULE
鏡の曲率半径	50cm と $\infty$ (平面鏡)
鏡の強度反射率	99.99%
FSR	1.5GHz
フィネス	33000
半値全幅	44.5kHz
TMS	0.22GHz

今回使用した共振器は、ULE という材質のスペーサーによって 2 枚の鏡を隔てた直線型である。ULE は Ultra Low Expansion の略称で、通常のガラスに二酸化チタン  $\text{TiO}_2$  を混入させることで究極的に低い熱膨張率を実現させた特殊なガラス材である。熱膨張が実効的に 0 になる温度が存在し、本共振器では  $29.5^\circ\text{C}$  付近となっている。鏡は石英ガラスを基材とし、共振器の内側の面は HR コーティングがされ高反射率を持ち、外側は AR コーティングで低反射率になるよう加工がなされている。スペーサーの側面には共振器内部へと突き抜ける穴が貫通しており、チャンバー内で真空引きされた時の通気口の役割を果たす。

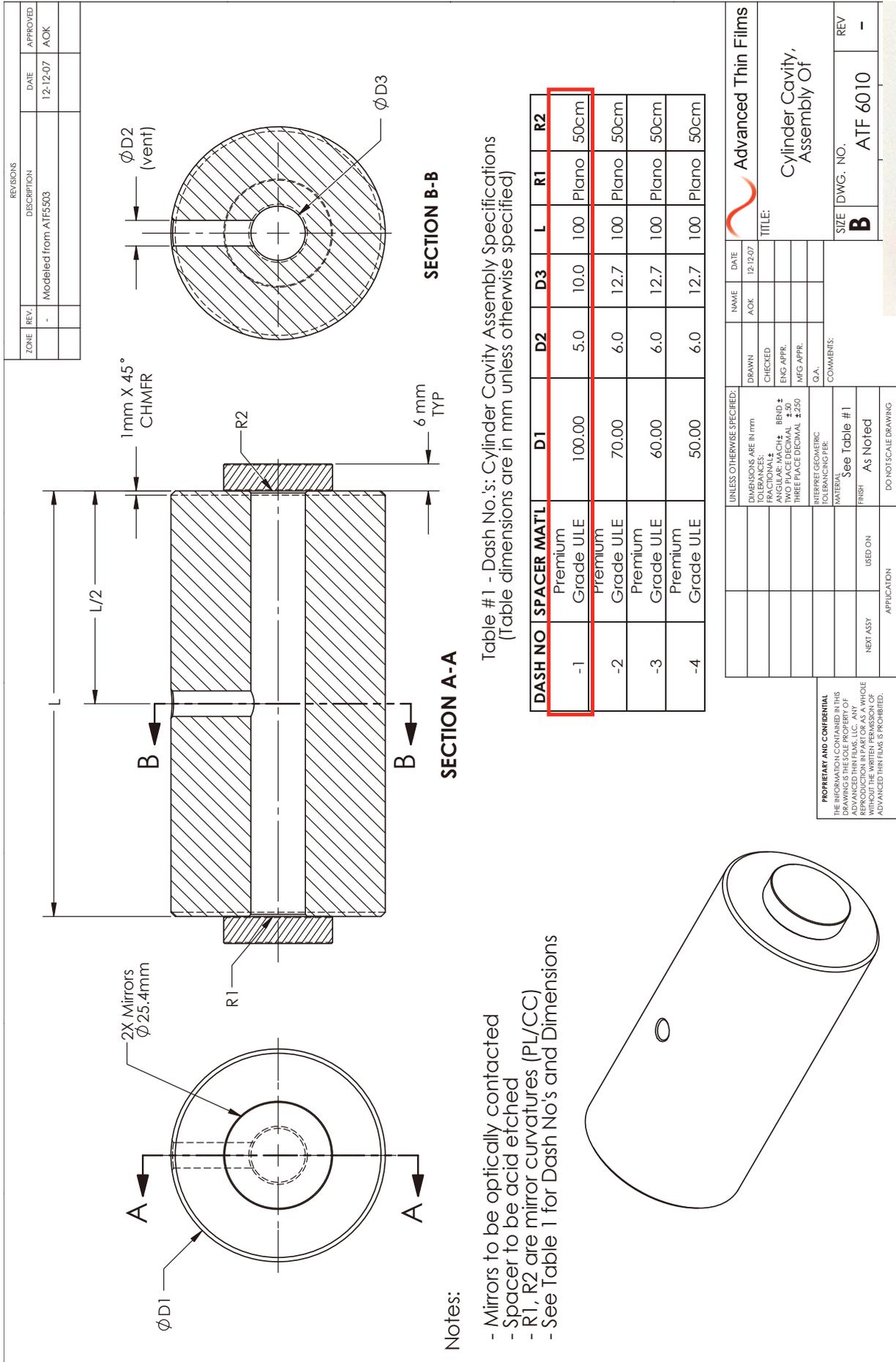


図 3.9: ULE 共振器の設計書 [20]

### 3.3.2 真空チャンバー

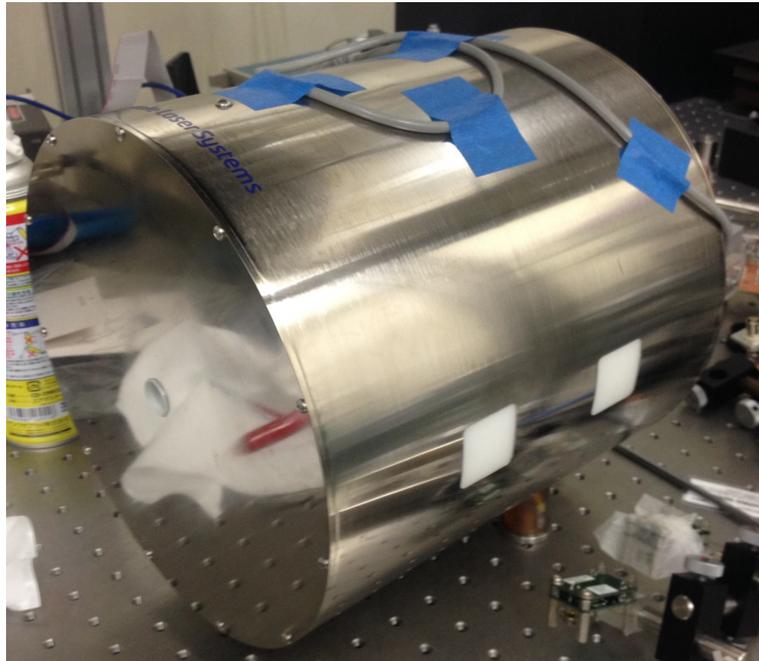


図 3.10: 真空チャンバーの外観

今回の研究では用いなかったが、光共振器が装填される予定であった真空チャンバーについて簡潔に紹介する。このチャンバーは Stable Laser Systems 社製で、光共振器はマウントごと装填される。円筒形の形状の中心には直径 2cm の入射窓、出射窓があり、写真の左側が入射側、右側が出射側である。出射側の下部には、真空ポンプ用のフランジが装着されており、チャンバー内部の真空引きをし、共振器をより安定にすることが可能である。写真中でチャンバー上部に見えるケーブルは、温度コントローラーと接続されチャンバー外部に張り付けられている温調アクチュエーターへ信号を送る役割をする。このとき熱が逃げないようにアクチュエーターは遮熱材で囲まれ、それから外ふたが取り付けられている構造である。

### 3.3.3 モードマッチング

§2.3.5 で述べたように、共振周波数のほかにもレーザーの横モードを共振器内で最適化することで、多くのビームパワーを共振器とカップルさせ高 S/N 比の誤差信号を得ることができる。既知の共振器に対して、その固有モードは共振器長  $l$  と各鏡の曲率半径  $R_1$  と  $R_2$  によって一意に決まる。平面鏡を入射側として、 $l = 0.1\text{m}$ ,  $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = 0.5\text{m}$  を式 2.81, 2.82, 2.83 に代入すると、ビームウエストからの各鏡までの距離  $z_1, z_2$  とレイリー長  $z_0$  が求まる。ここで実質的に意味を持つのは  $z_0$  であり、平面鏡と波面が一致する条件から鏡の位置にビームウエストが来るので  $z_1 = 0, z_2 = 0.1$  は自明である。ここから鏡の各位置でのビーム幅  $R(z_1), R(z_2)$  を導くことができるので、モードマッチングのために必要な情報は全て取得できる。今回使用した共振器の固有モードを図 3.11 に示す。モードの

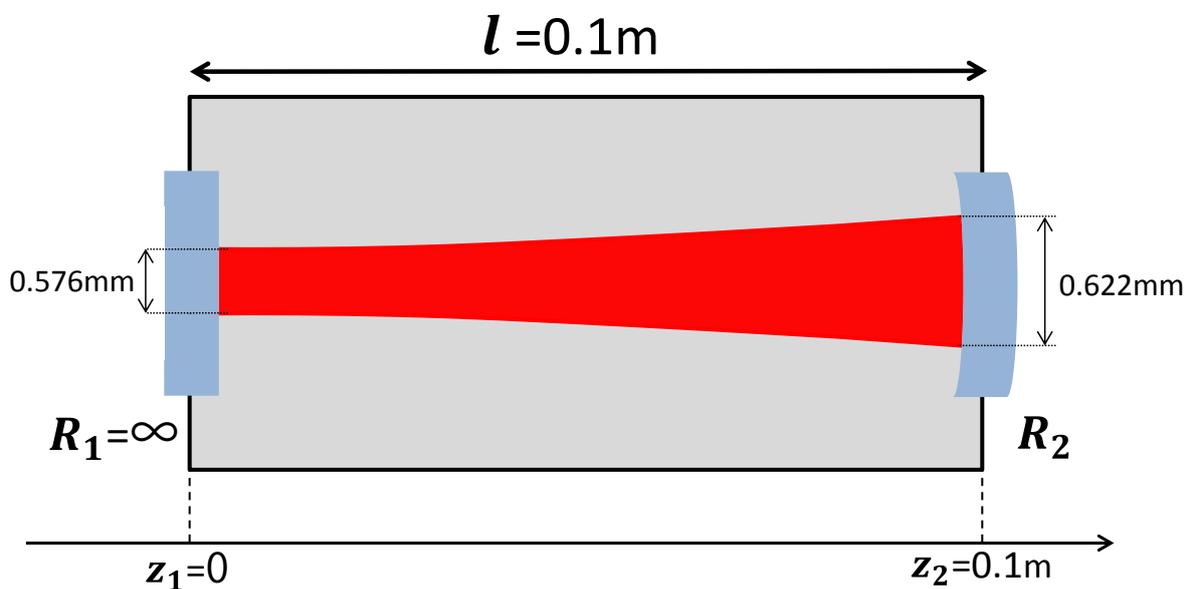


図 3.11: 共振器の固有モード

測定はビームプロファイラーを用いて、図 3.12 上の波長板付近に距離の原点をおき、矢印に沿って 25mm 間隔で行った。図 3.13 は各地点でのビーム幅の測定結果と、それらからビームウエストその位置をフィッティングした曲線である。フィッティング結果から、レーザーは原点から 75mm の位置にビームウエスト 581mm を持つモードであると推定された。ここでレンズを用いてモードマッチングすることを考える。すでに共振器外と内部でのビームウエスト及びその位置は既知なので、これらからレンズの最適焦点距離と位置が求まる。レンズ前後のビームパラメーターとレンズに関する ABCD 行列に基づいた関係式 2.44 (§2.3 参照) から得た結果を真空チャンバーを用いた場合と、用いなかった場合とに分けて以下の表にまとめる。

原点から共振器	原点からレンズ	レンズから共振器	焦点距離
537mm	306mm	231mm	247mm

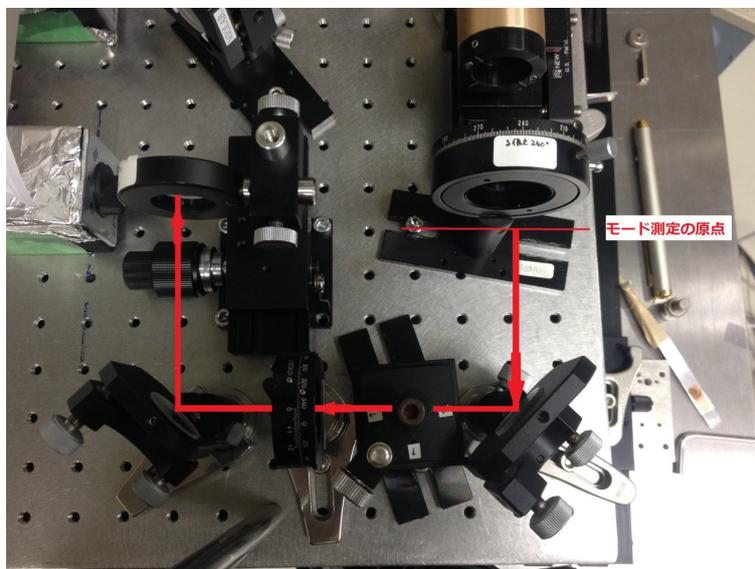


図 3.12: ビームモードの測定

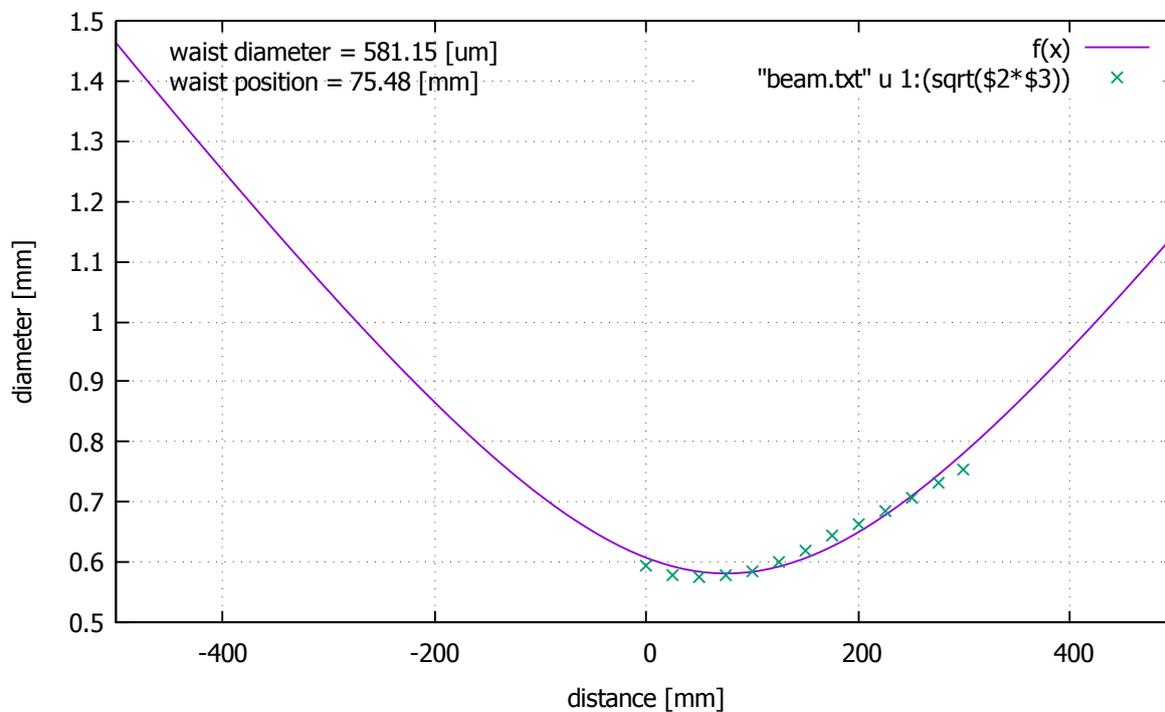


図 3.13: ビーム幅の測定結果とフィッティング曲線

### 3.4 Filter 回路

Filter 回路は、PDH 法において誤差信号をレーザーのチューニング端子に戻す前に RF 成分を除去するためであるが、可変アンプのゲインを含め周波数安定化のバンド幅を決定する重要な役割も担っている。本研究で実際に作成した Filter 回路の概念図を図 3.14 に示したが、回路図の詳細は付録 B を参照されたい。それに加えて共振器へのロックする際の便宜上、符号切り替えとオフセット調整の機構も付け加えた。可変アンプを LPF の間に設置したのは、可変アンプでの雑音を後に続く LPF で除去し、共振器のロックに影響を与えないようにするためである。piezo 用と温調用回路それぞれの伝達関数の理想曲線は図 3.15, 3.16 である。

RFPDから

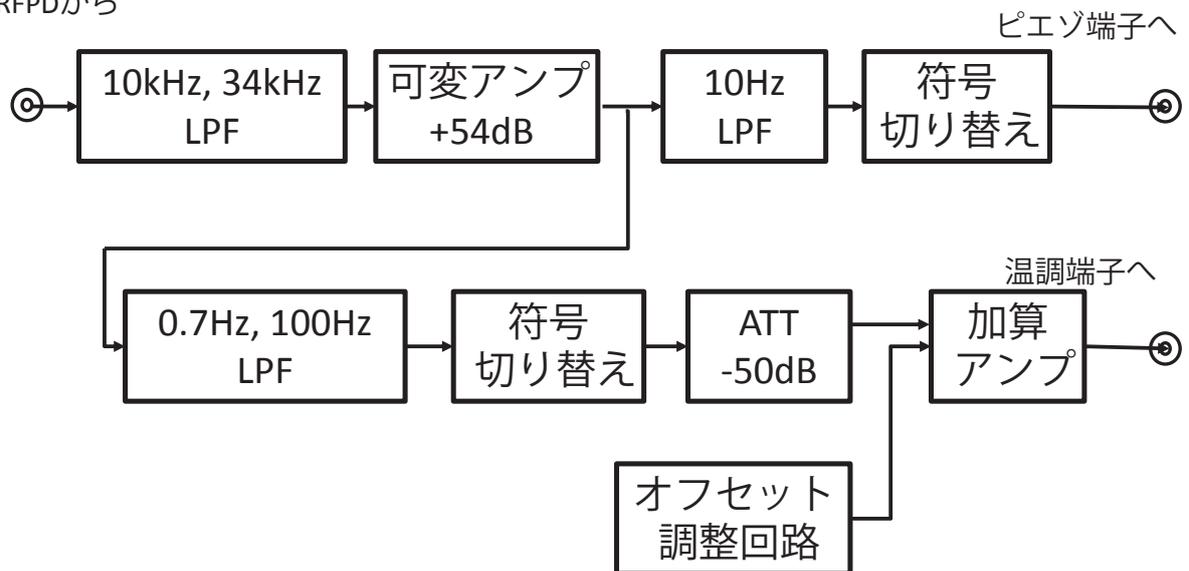


図 3.14: Filter 回路のブロックダイアグラム

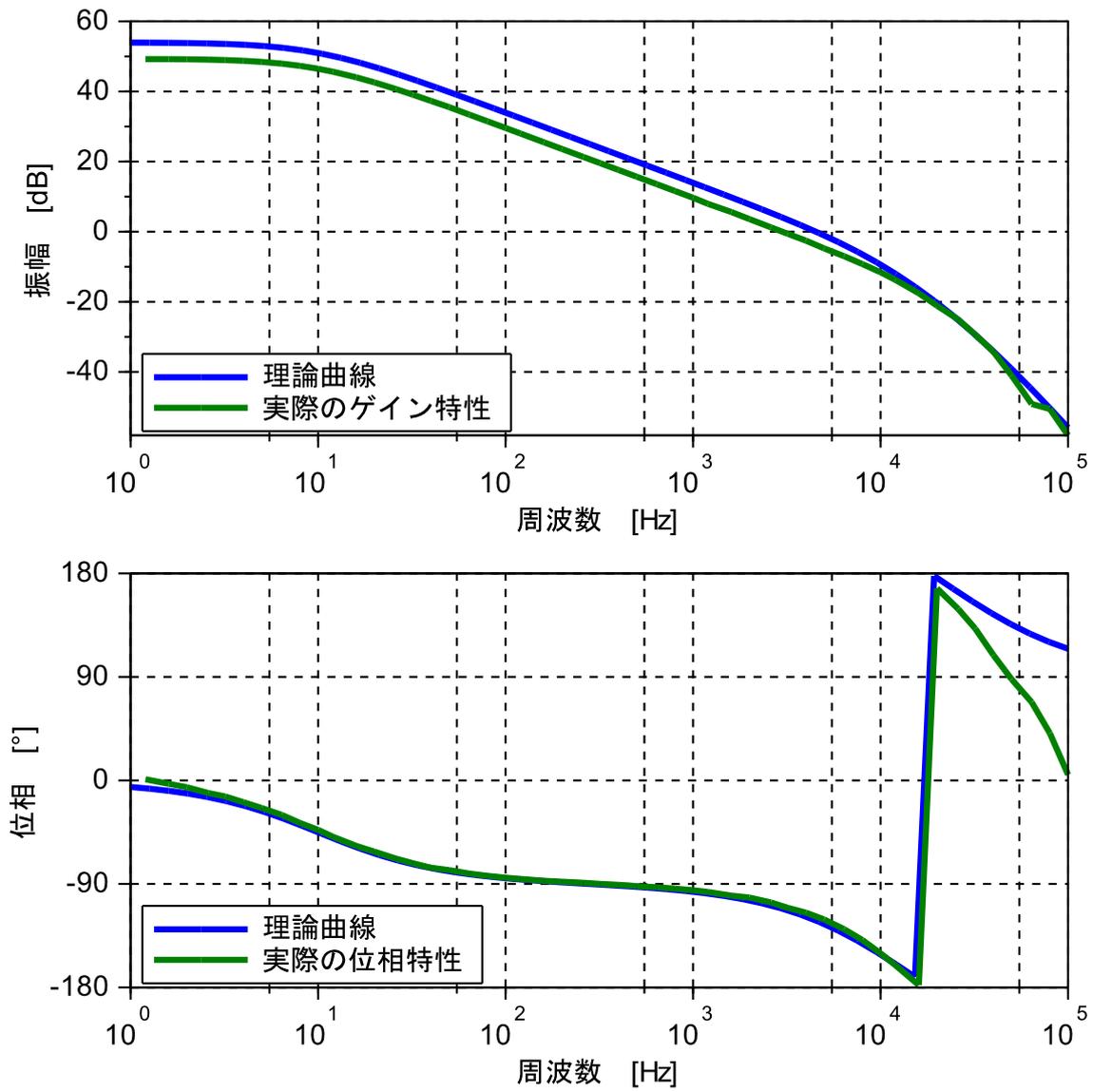


図 3.15: ピエゾ用 Filter 回路のボーデ線図

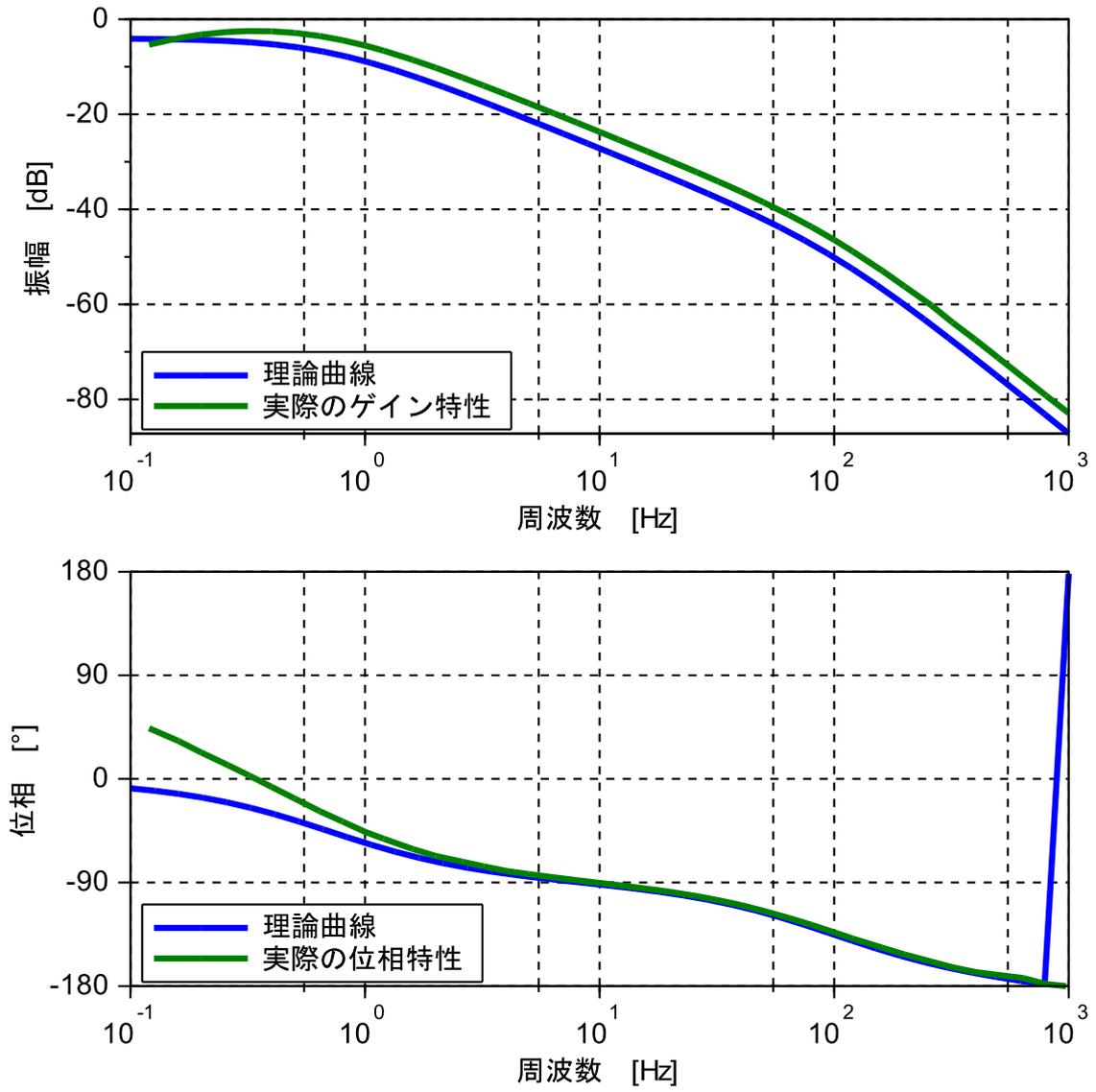


図 3.16: 温調用 Filter 回路のボーデ線図

### 3.5 EOM

§2.4.2 で述べたとおり、EOM は電気光学結晶を用いた位相変調器である。本研究では New Focus 社の 4003NF シリーズ 15MHz 共振型を使用した。仕様書 [16] によると変調深度が  $\pi$  に相当する印加電圧  $V_\pi = 16\text{V}$  である。これから 1 次サイドバンドへのエネルギー変換効率を最大にする変調深度 1.8rad はおよそ 9.2V の印加電圧振幅で実現され、もともとのレーザーパワーの 19% が 2 つある 1 次サイドバンドへとそれぞれ変換される。すなわち

$$\frac{P_1}{P_0 + 2P_1} = \frac{J_1(\beta)^2}{J_0(\beta)^2 + 2J_1(\beta)^2} = 0.19 \quad (3.1)$$

しかしながら使用した 2ch 信号発振器の上限出力が  $10\text{V}_{pp}$  であったため、印加電圧振幅 5V で実験を行った。サイドバンドの確認のために、NPRO の piezo 素子によりレーザー周波数を振った時の、共振器からの透過光強度を図 3.17 に示す。

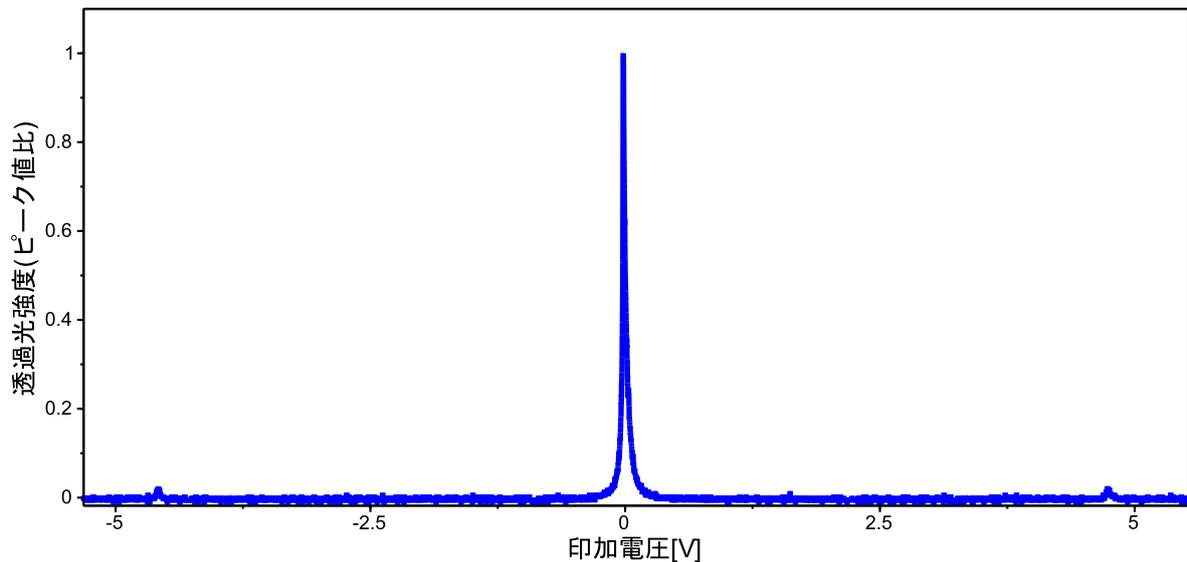


図 3.17: piezo 端子への印加電圧に対する透過光強度

### 3.6 高周波用光検出器

本研究では Menlo Systems 社製 FPD510-F を用いた。3dB バンド幅は 200MHz、ゲインは仕様書上では  $4 \times 10^4 \text{V/W}$  であるが、飽和光量付近では非線形性を示す。図 3.19 はメーカー側で行った性能評価実験の結果である。[19]PD 素子面はわずか 0.3mm ほどしかなく、ビーム径を全て収めるのは困難であったため、実験では検出器からの DC 出力が 0.7V である程度にビーム径をしぼめるまでにとどめた。

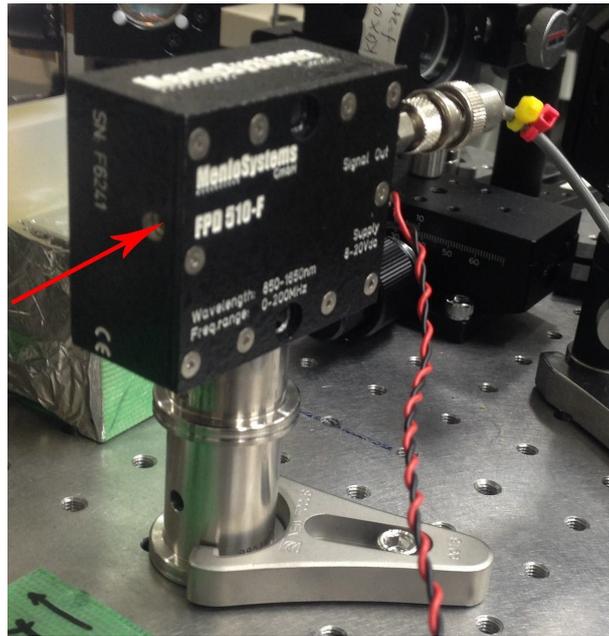


図 3.18: 反射光用光検出器の外観

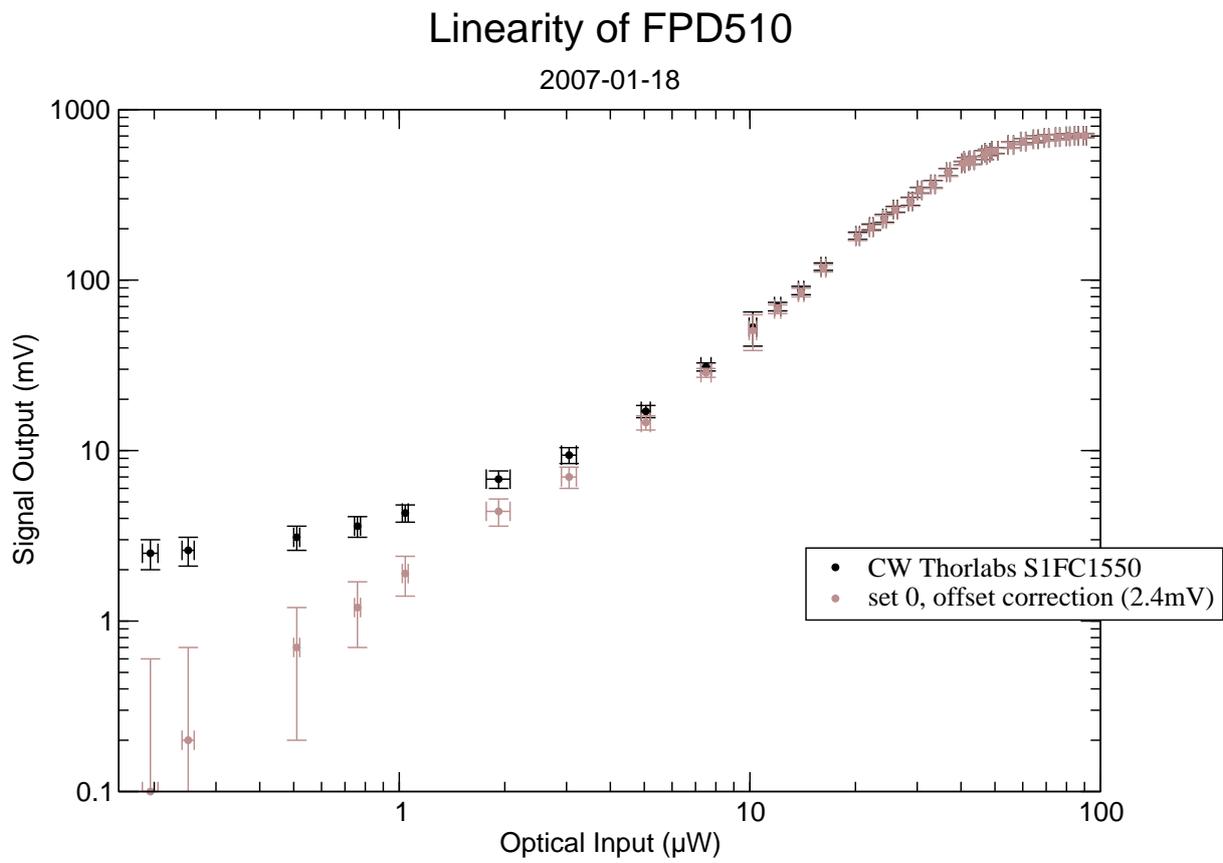


図 3.19: 入射光量に対する出力電圧のプロット

### 3.7 透過光プロファイラー

光共振器の透過光の横モードを確認するためにビームプロファイラーを用いた。共振器にロックしている横モードが透過光として現れるため、このプロファイラーで  $TEM_{00}$  モードが確認されるように誤差信号のオフセットを調整した。CCD カメラは COHU 社製 6400 シリーズで、それをビームプロファイラーソフトウェアに接続して使用した。プロファイラーで確認された透過光の  $TEM_{00}$  及び  $TEM_{01}$  モードを図 3.21, 3.22 に載せる。

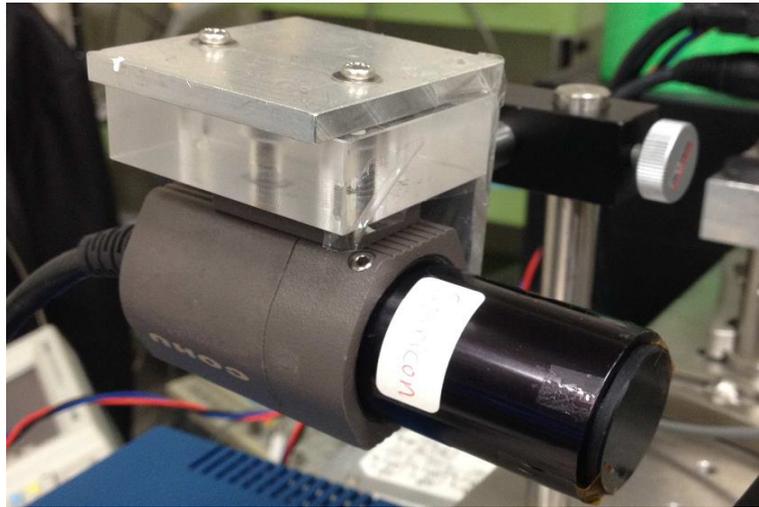


図 3.20: CCD カメラの外観

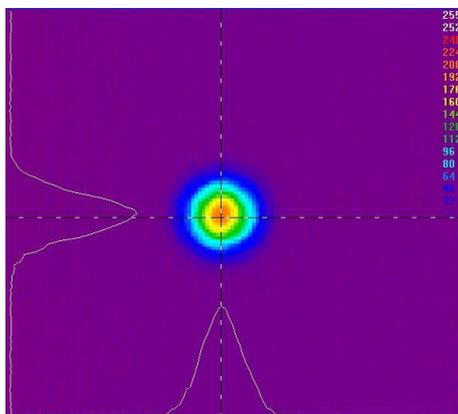


図 3.21:  $TEM_{00}$  モードの観察

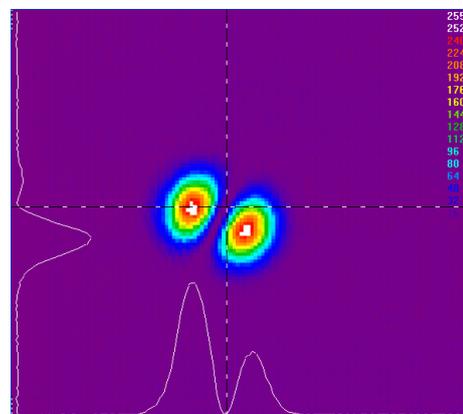


図 3.22:  $TEM_{01}$  モードの観察

## 第4章 光共振器の光学特性の測定

光共振器が設計値通りに機能しているかを評価するため、各光学特性の測定を行った。

### 4.1 FSR 及び鏡の曲率半径の測定

NPRO の温調端子に三角波信号を入力し、透過光に現れるピーク間の時間経過によって FSR と TMS を測定した。実験系の構成は図 4.1 であり、三角波信号は振幅  $1V_{pp}$ 、周波数 20mHz で入力された。共振器の透過光信号及び、誤差信号と三角波の加算信号の時間変化

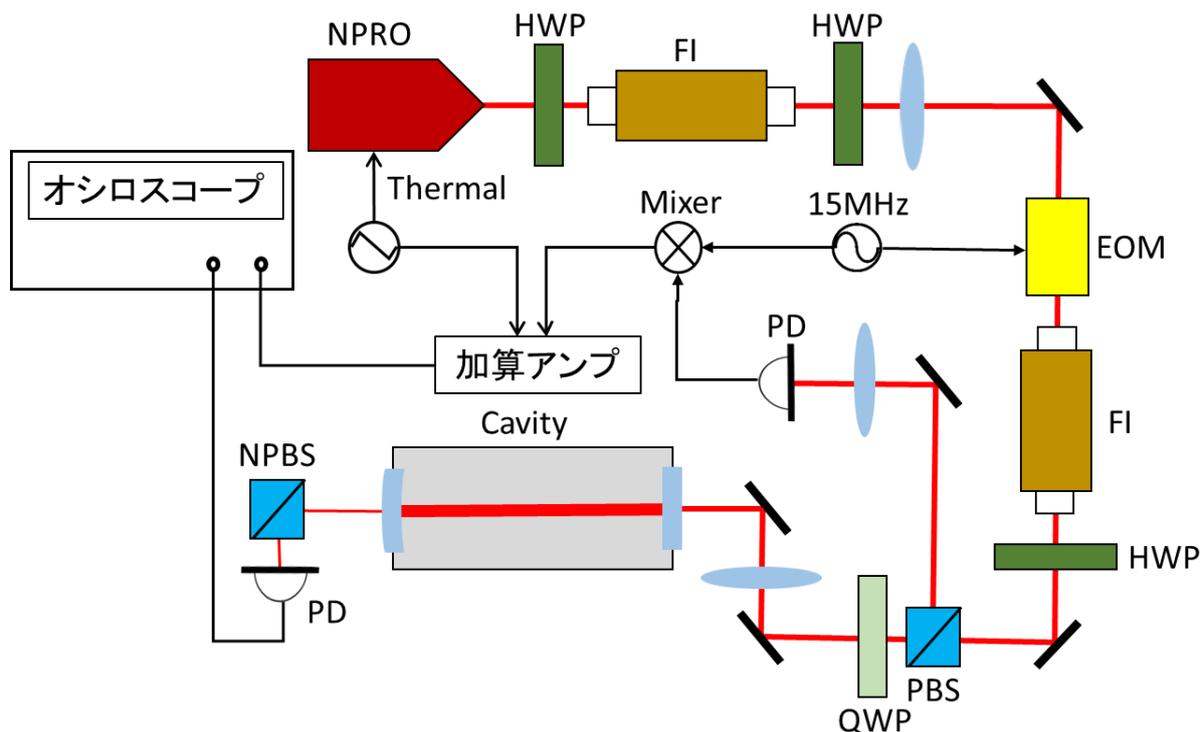


図 4.1: FSR と TMS の測定系

を図 4.2 に示す。透過光信号とプロファイラーでの横モードの観察のみによって、各ピークと横モードのおおよその対応付けは可能であった。だが測定にはレーザー周波数と測定

時間のカリブレーションが必要なため、誤差信号上でのサイドバンドピークが用いられた。加えて、透過光信号では多くのピークが現れるため、TEM<sub>00</sub>モードのみで強いピークを示す誤差信号の方がFSRの測定に向いている。またNPROに入力した三角波信号を誤差信号に加算したのは、三角波1周期分の境界を知るためである。というのも三角波は周期の境界で不連続になるため、レーザー周波数は過渡応答を示し、透過光ピークは周期的ではなくなるからである。入力信号の観察の下、過渡応答が表れないような隣り合うTEM<sub>00</sub>モードのピーク間(図4.2)を測定し、そこから $\Delta f_{FSR}$ を得る。一方で、一回の測定から $\Delta f_{TMS}$ の平均値を得ることができ、その際平均値の算出法として以下の式を採用した。

$$\overline{\Delta f_{FSR}} = K \overline{t_{TMS}} \quad (4.1)$$

$$= K \frac{\sum_{n=0}^5 (n - \bar{n}) \cdot (t_n - \bar{t})}{\sum_{n=0}^5 (n - \bar{n})^2} \quad (4.2)$$

$t_n$ は図で見るとように $n$ 次ピークが現れたの時刻[s]、 $\bar{t}$ は各 $t_n$ の平均値、 $\bar{n}$ は0~6の平均値すなわち3である。 $K$ はプロット上の測定時間を周波数に変換する係数である。また、§2.3式2.77と $g$ -factorの定義式から

$$R_2 = \frac{c}{2\Delta f_{FSR} \left\{ 1 - \cos^2 \left( \frac{\Delta f_{TMS}}{\Delta f_{FSR}} \pi \right) \right\}} \quad (4.3)$$

ここで入射鏡が平面であることから、 $R_1 = \infty$ と近似した。各測定での $\Delta f_{FSR}$ 、 $\overline{\Delta f_{TMS}}$ 、そしてそれから算出される出射鏡の曲率半径 $R_2$ と合わせて表4.1にまとめる。

測定試行	1	2	3	4	5	6
$\Delta f_{FSR}$ [GHz]	1.471	1.468	1.468	1.463	1.468	1.467
$\overline{\Delta f_{TMS}}$ [MHz]	216.0	216.2	216.2	214.9	216.0	215.7
$R_2$ [cm]	51.5	51.3	51.3	51.7	51.4	51.5
測定試行	7	8	9	10	平均値	標準偏差
$\Delta f_{FSR}$ [GHz]	1.468	1.472	1.468	1.472	1.468	0.003
$\overline{\Delta f_{TMS}}$ [MHz]	216.5	216.2	215.8	216.4	216.0	0.5
$R_2$ [cm]	51.2	51.4	51.5	51.3	51.4	0.02

表 4.1: 各測定での $\Delta f_{FSR}$ 、 $\overline{\Delta f_{TMS}}$ 、 $R_2$ と最終値

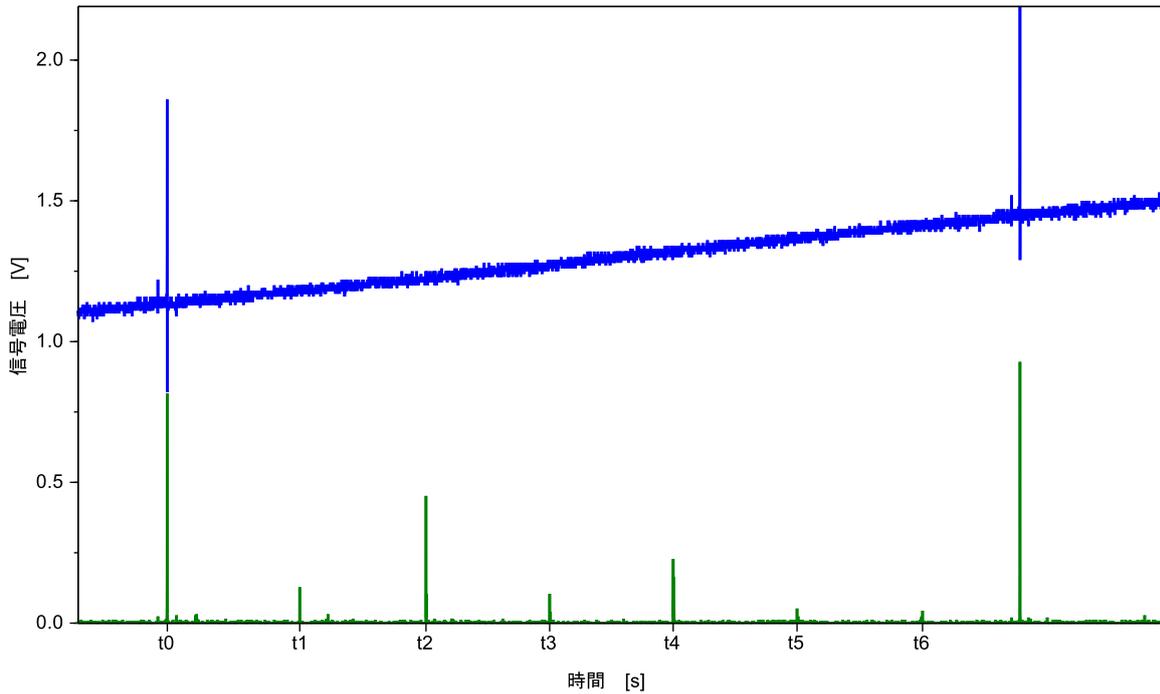


図 4.2: 透過光信号、誤差信号+三角波信号の時間変化

## 4.2 フィネスの測定

フィネスの測定には数種類の方法が確立しているが、今回は入射光を瞬間的に遮断した後の透過光のリングダウン信号から測定を試みた。しかしながら、測定の際に種々の問題点が浮上し、最終的に有意な結果を得るまでに至らなかった。この節ではまず理論的背景を解説し、実際の問題点を述べる。

### 4.2.1 測定における信号処理論

共振している光共振器は、内部で光が無数に往復し実効パワーが高まっている。今、共振器の出射鏡を透過する直前の光強度を考えると、§2.3.2 式 2.53 を参考にして

$$\frac{I_{cav}}{I_{in}} = \frac{t_1^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2} = t_1^2 K \quad (4.4)$$

$$\text{where } K(=k^2) \equiv \frac{1}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad (4.5)$$

と書ける。ここで入射光が微小時間のうちに遮断されたとすると、遮断後も内部の光は鏡の間で往復を繰り返しながら減衰し、最終的に消滅する。 $n$  回共振器を往復した光強度は式 4.6 のようになる。

$$\frac{I_{cav}(n)}{I_{in}} = t_1^2 K (r_1 r_2)^{2n} \quad (4.6)$$

測定時間の原点  $t = 0$  で入射光が遮断されたとすると、光が往復後に出射鏡に到達した時の時刻  $t$  と往復回数との間に

$$t = \frac{2l}{c} \cdot n \quad (4.7)$$

の関係が成り立つ。光が1往復する時間  $2l/c$  は十分小さいので、式4.6を連続時間  $t$  を含んだ形に拡張すると

$$\frac{I_{cav}(t)}{I_{in}} = t_1^2 K(r_1 r_2)^{\Delta f_{FSR} t} = t_1^2 K e^{-\frac{t}{\tau_{cav}}} \quad (4.8)$$

$$\text{where } \tau_{cav} \equiv -\frac{1}{2\Delta f_{FSR} \log(r_1 r_2)} \approx \frac{k}{2\Delta f_{FSR}} \quad (4.9)$$

$\tau_{cav}$  は減衰する光量の時定数を意味する。したがって、フィネスは時定数とFSRによって表せる。

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (4.10)$$

$$= \pi \cdot 2\tau_{cav} \Delta f_{FSR} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2\tau_{cav} \Delta f_{FSR}}} \quad (4.11)$$

$$\approx 2\pi \tau_{cav} \Delta f_{FSR} \quad (4.12)$$

ここまでは理想的な光検出器を仮定して、光共振器によるリングダウンのみを議論した。しかしながら、現実の検出器や光を遮断するスイッチもある時定数  $\tau_s, \tau_{PD}$  でのリングダウン信号を示す。精度良い測定には、 $\tau_s, \tau_{PD}$  が共振器による時定数より十分小さい必要があり、これ以降は測定系による雑音も考慮に入れて考えていく。リングダウンの測定は図4.3の構成で行い、光の遮断はNPROのLDスイッチのON/OFFで行われた。

まずNPROから理想的なパルス波が入射された時の、PDで検出されるインパルス応答を考える。図4.4で示すように、一般的に時定数  $\tau$  で減衰するインパルス応答を持つ線形システムは

$$H(f) = \frac{1}{1 + i\tau f} \quad (4.13)$$

と、 $1/\tau$  をカットオフ周波数とする一次ローパスフィルターとして働く。単純のためレーザースイッチとPDのもつ時定数の長いほうを雑音になる時定数  $\tau_n$  として考慮すると、PDで検出されるインパルス応答は、逆ラプラス変換と畳み込み定理から式4.16となる。

$$g(t) = \frac{1}{\tau_{cav} \tau_n} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \tau_{cav}^{-1}} \cdot \frac{1}{s + \tau_n^{-1}} \right] \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{\tau_{cav} \tau_n} \int_0^t h_{cav}(t') h_n(t - t') dt' \quad (4.15)$$

$$= \frac{e^{-\frac{t}{\tau_{cav}}} - e^{-\frac{t}{\tau_n}}}{\tau_{cav} - \tau_n} \quad (4.16)$$

また線形応答理論から、インパルス応答関数  $g(t)$  と緩和関数  $\Phi(t)$  の間には

$$g(t) = -\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \quad (4.17)$$

の関係があるので、最終的に緩和関数  $\Phi(t)$  は以下の形で表される。

$$\Phi(t) = \int_0^t -g(t') dt' \quad (4.18)$$

$$= \frac{\tau_{cav} e^{-\frac{t}{\tau_{cav}}} - \tau_n e^{-\frac{t}{\tau_n}}}{\tau_{cav} - \tau_n} \quad (4.19)$$

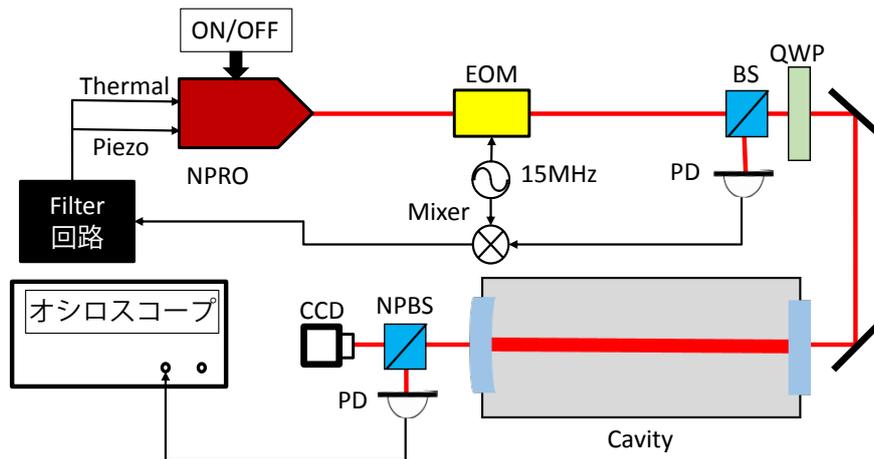


図 4.3: リングダウン信号の測定系

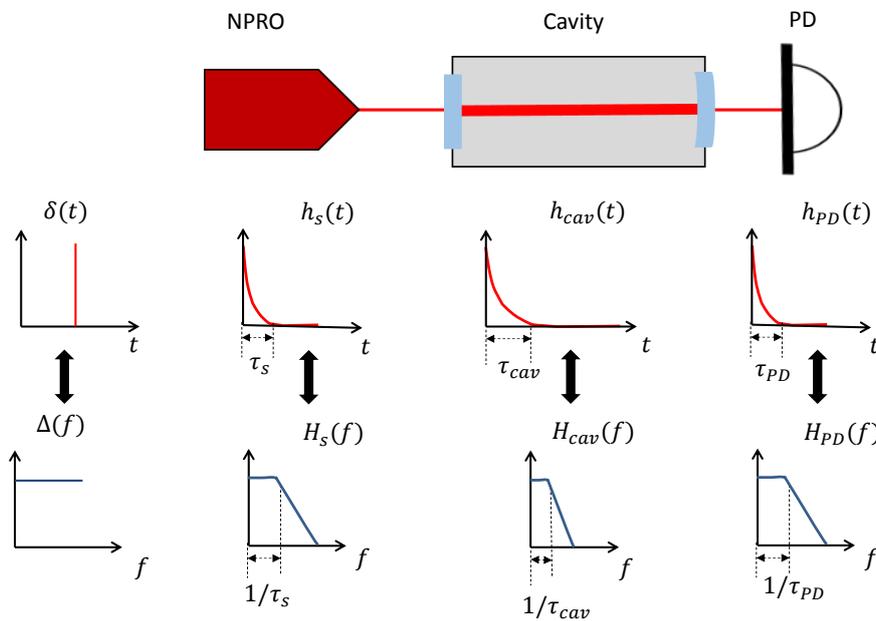


図 4.4: 測定系の線形応答

## 4.2.2 測定での問題点

- 過小な測定結果

今回の測定では PD の十分速い応答速度を保証するため、当初反射光用に用いていた menlosystem 社製の FPD510-F でリングダウン信号を取得した。共振器が示す時定数の理論値は、 $FSR=1.5GHz$  と強度反射率  $r^2=99.99\%$  から  $\tau_{cav} = 3.5[\mu s]$  と求まるので、PD 及び共振器+PD のリングダウン信号と理論曲線を図 4.5 に示す。測定されたリングダウン信号は、共振器透過後にも関わらず理論曲線と比べて明らかに速く減衰していた。

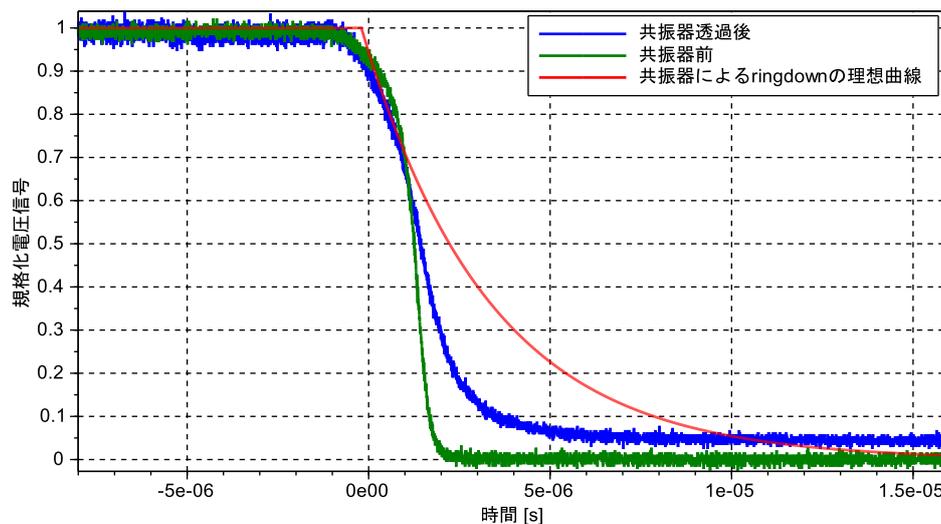


図 4.5: FPD510-F でのリングダウン信号の観察

青のプロットは TEM<sub>00</sub> モードのロック後に取得したリングダウン信号、緑のプロットは共振器の前に置いた同一 PD から得られたリングダウン信号、赤の曲線は時定数 3.5[ $\mu s$ ] に従った共振器の理想的なリングダウン信号である。

加えて、式 4.19 にオフセットを加えた関数でフィッティングした結果の一例を図 4.6 に示す。同様の信号を 3 回測定し、フィネスは  $7768 \pm 130$  で設計値 33000 の 1/5 程度に留まっていた。また  $\tau_n$  のフィッティング結果は  $0.57 \pm 0.015[\mu s]$  であり、PD のみのリングダウン信号から測定した時定数およそ  $0.49[\mu s]$  と同程度であるといえる。使用した PD が 3dB バンド幅 200MHz(時定数 5[ns] に相当) を有していることを考えると、 $\tau_n$  はレーザースイッチによるものであると推測される。今後の課題として、より正確な測定のために  $\sim ns$  の高速スイッチの機構を付け加えたい。測定されたフィネス値の妥当性についてだが、参照共振器を発注してから今回の研究で使用するまで 3 年ほど経過したことを考えると、鏡が経年劣化していた可能性は否めない。裏付けのために他のフィネス測定法も試みたが、有意な結果は得られなかった<sup>1</sup>。

そこでフィネスの真値が設計値であると仮定し、測定によって得られた鏡のパワー反射率  $R_m$  とパワー透過率の設計値  $T_{def}(0.0093\%)$  を用いて、鏡の反射におけるロ

<sup>1</sup>レーザー周波数をピエゾでスイープさせ透過光の応答から HMF<sub>W</sub> を計測したが、スイープ速度に応じて計測結果が大きくズレてしまった。

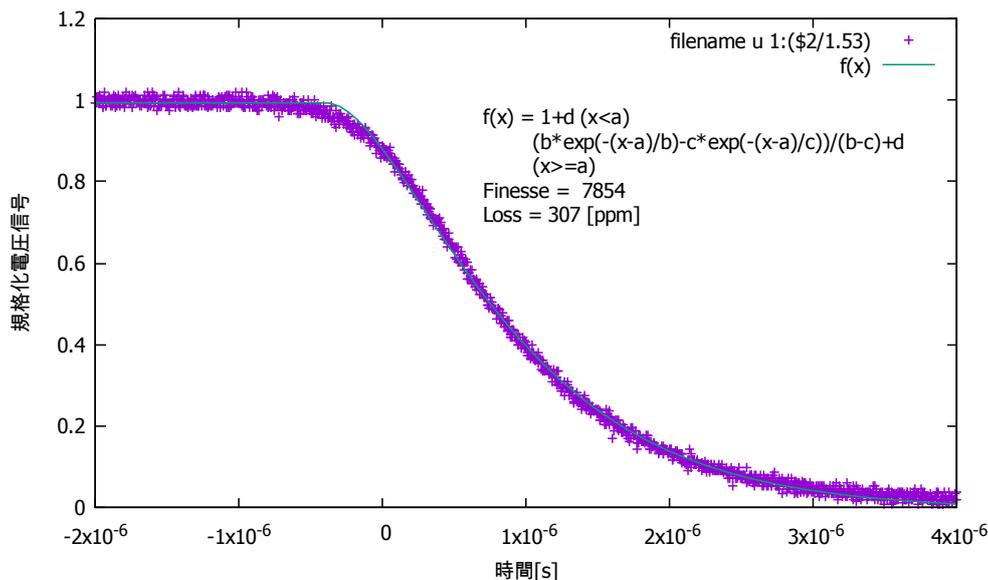


図 4.6: リングダウン信号のフィッティング結果

スを

$$L \equiv 1 - R_m - T_{def} \quad (4.20)$$

から算出した。 $R_m$  はリングダウンの時定数のフィッティング結果から

$$R_m = r_m^2 \quad (4.21)$$

$$= \left( \frac{\sqrt{\pi^2 + 4\mathcal{F}^2} - \pi}{2\mathcal{F}} \right)^2 \quad (4.22)$$

$$\approx \left( 1 - \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \right)^2 = \left( 1 - \frac{1}{4\tau_{cav}\Delta f_{FSR}} \right)^2 \quad (4.23)$$

$$= 99.96\% \quad (4.24)$$

と求まる。3回の測定でロスはいずれも 300ppm 前後であり、ビーム強度が鏡の径からはみ出ることによる回折損失では説明できないほど大きい値であった。

いずれにせよ、誤差の少ないフィネス測定により原因究明することを今後の課題としたい。

- 横モードによる時定数の違い

TEM<sub>00</sub> モードのほか TEM<sub>01</sub> モードにもロックをし、リングダウンの測定を行った。TEM<sub>00</sub> モードとの比較とフィッティング結果を図 4.7, 4.8 に示す。TEM<sub>01</sub> モードで測定したフィネスは 22000 程度で設計値により近くなっているが、フィネスが高く見積もられるということは、共振器内でのパワーロスが小さいことを示している。しかしながらこの測定結果は、TEM<sub>01</sub> モードの空間分布が TEM<sub>00</sub> より大きいことを考えると矛盾する。これにはさらなる測定と考察の必要があるとみられ、今後の課題としたい。

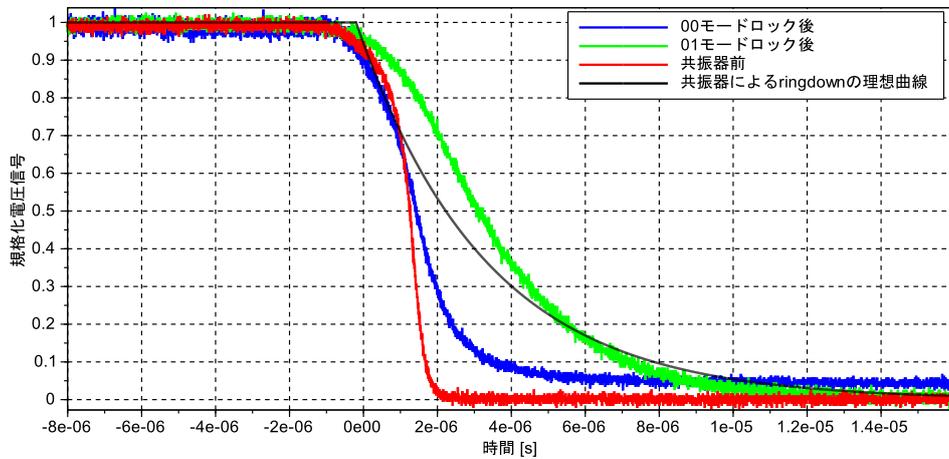


図 4.7: 横モードによるリングダウン信号の比較

青と緑のプロットはそれぞれ  $TEM_{00}$  モード及び  $TEM_{01}$  モードのロック後に取得したリングダウン信号、赤のプロットは共振器の前に置いた同一 PD から得られたリングダウン信号、黒の曲線は時定数  $3.5[\mu s]$  に従った共振器の理想的なリングダウン信号である。

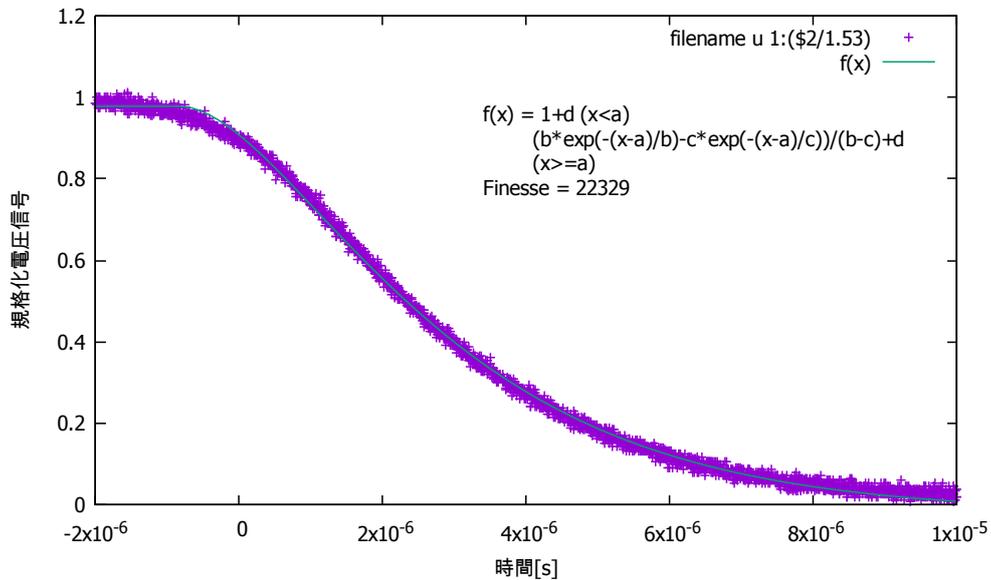


図 4.8:  $TEM_{01}$  にロック時のリングダウン信号に対するフィッティング結果

## 第5章 レーザー周波数の安定化

### 5.1 PDH法の誤差信号の観察

以下の系で誤差信号の観察を行った。ピエゾ端子のチューニング効率が約4MHz/V に対してサイドバンド間は30MHz であるので、§2.5.1の図2.17を得るためには10V<sub>pp</sub>の入力が必要である。しかし信号発振器のレンジが足りなかったため、信号発振器の出力を1V<sub>pp</sub>として10倍のゲインを持つプリアンプを通してレーザー周波数を三角波状に振った。非共振の状態では誤差信号は0であるはずだが、EOMにより15MHzでの強度変調がかすかに起こっていたために、非共振でも値を持っていたと思われる。[14]実際に計測した誤差信号の概形を図5.2に示す。

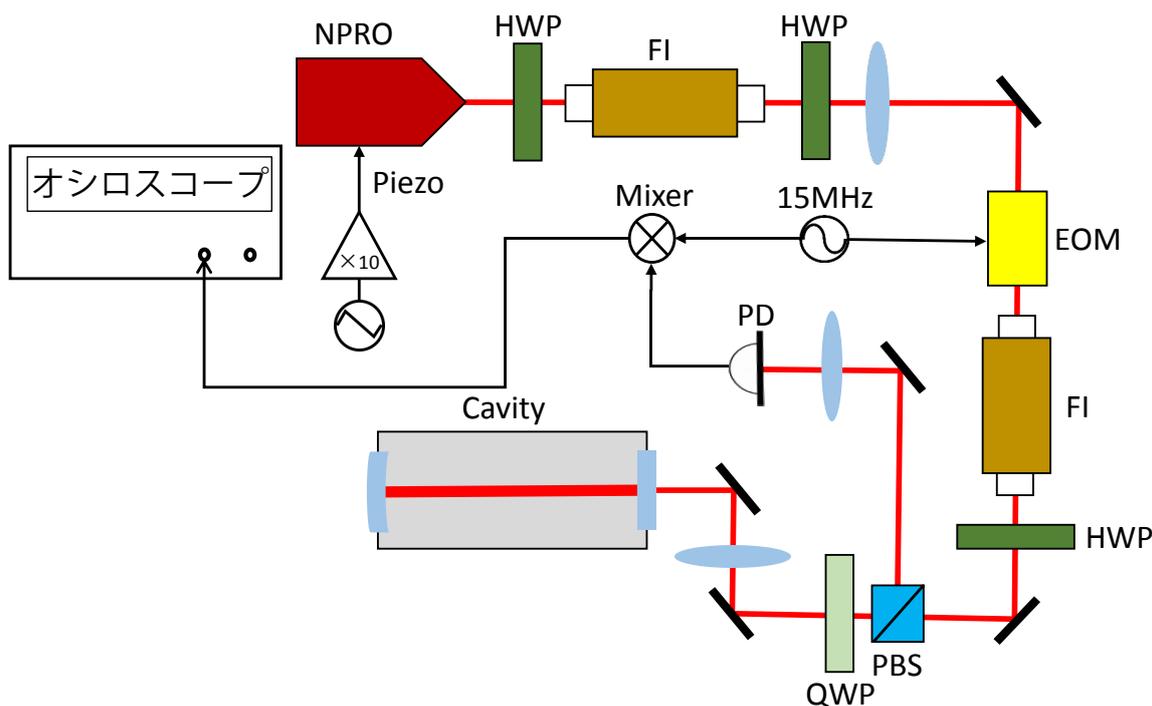


図 5.1: 誤差信号の測定系

### 5.2 サーボ系の伝達関数の測定

まず実験系のブロックダイアグラムをもとに、レーザー周波数ゆらぎがどの信号に現れるかを議論する。 $\delta f, \delta f'$ は共振周波数に対する安定化前後のレーザー周波数特性、 $H$

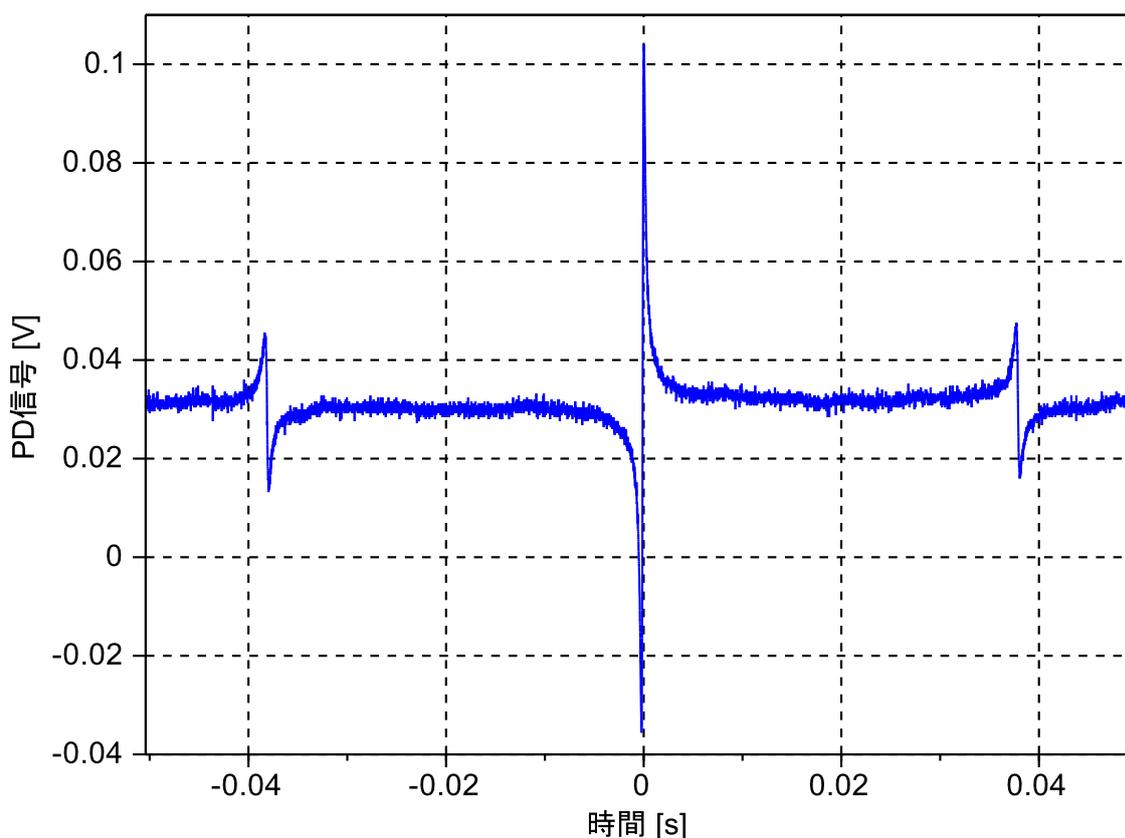


図 5.2: 観察した誤差信号

は PDH 法の伝達関数 (§2.5.2 参照)、 $F_P, F_T$  はピエゾ端子及び温調端子への Filter 回路の伝達関数である。また  $H_P, H_T$  はピエゾ、温調端子での電圧-周波数変換係数で、それぞれ 3.4MHz/V と 2.9GHz/V に対応し、周波数に変換された後の制御信号をそれぞれ  $x_P, x_T$  とする。ピエゾ、温調のサーボ系それぞれに対して

$$x_P = CF_P H_P (\delta f - x_P - x_T) \quad (5.1)$$

$$x_T = CF_T H_T (\delta f - x_P - x_T) \quad (5.2)$$

が成り立つ。この 2 式を足し合わせて  $x = x_P + x_T$  とおくと

$$x = C(F_P H_P + F_T H_T) (\delta f - x) \quad (5.3)$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{C(F_P H_P + F_T H_T)}{1 + C(F_P H_P + F_T H_T)} \delta f \approx \delta f \quad (5.4)$$

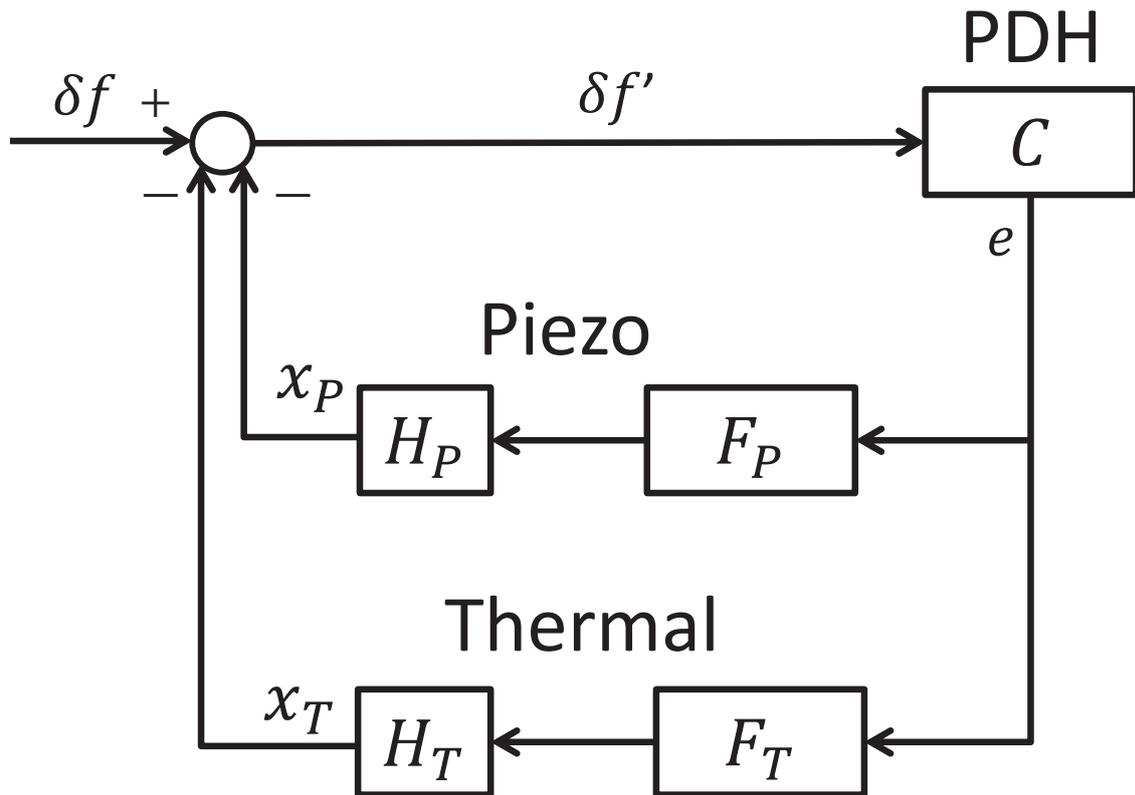


図 5.3: サーボ系のブロックダイアグラム

よってオープンループゲインが1より十分大きい帯域では、制御信号がレーザー周波数ゆらぎとほぼ等価になる。また  $x_P$  に限って表すと、

$$x_P = \frac{CF_P H_P}{1 + C(F_P H_P + F_T H_T)} \delta f \quad (5.5)$$

$$\approx \frac{F_P H_P}{F_P H_P + F_T H_T} \delta f \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{1 + F_T H_T / F_P H_P} \approx \delta f \quad (5.7)$$

オープンループゲインが1より十分大きいかつ、ピエゾのサーボ系のオープンループゲインが温調のそれより十分大きい場合はピエゾ端子への制御信号からレーザー周波数ゆらぎがわかる。

また、安定化後の周波数ゆらぎはブロックダイアグラムの  $\delta f'$  なので式 5.8 で表せる。

$$\delta f' \approx \frac{1}{CF_P H_P} x_P \quad (5.8)$$

ピエゾ端子のみによるフィードバックでは  $H_T=0$  とすればよいので、式 5.7, 式 5.8 はもちろん成り立つ。

### 5.2.1 Filter 回路の伝達関数

図 5.4 の測定系で Piezo 端子用、温調端子用の Filter 回路の伝達関数を測定した。サーボアナライザは図 5.4 中の ch2/ch1 を算出している。以下の結果から、どちらの Filter 回路も設計通り動作していることがわかる。

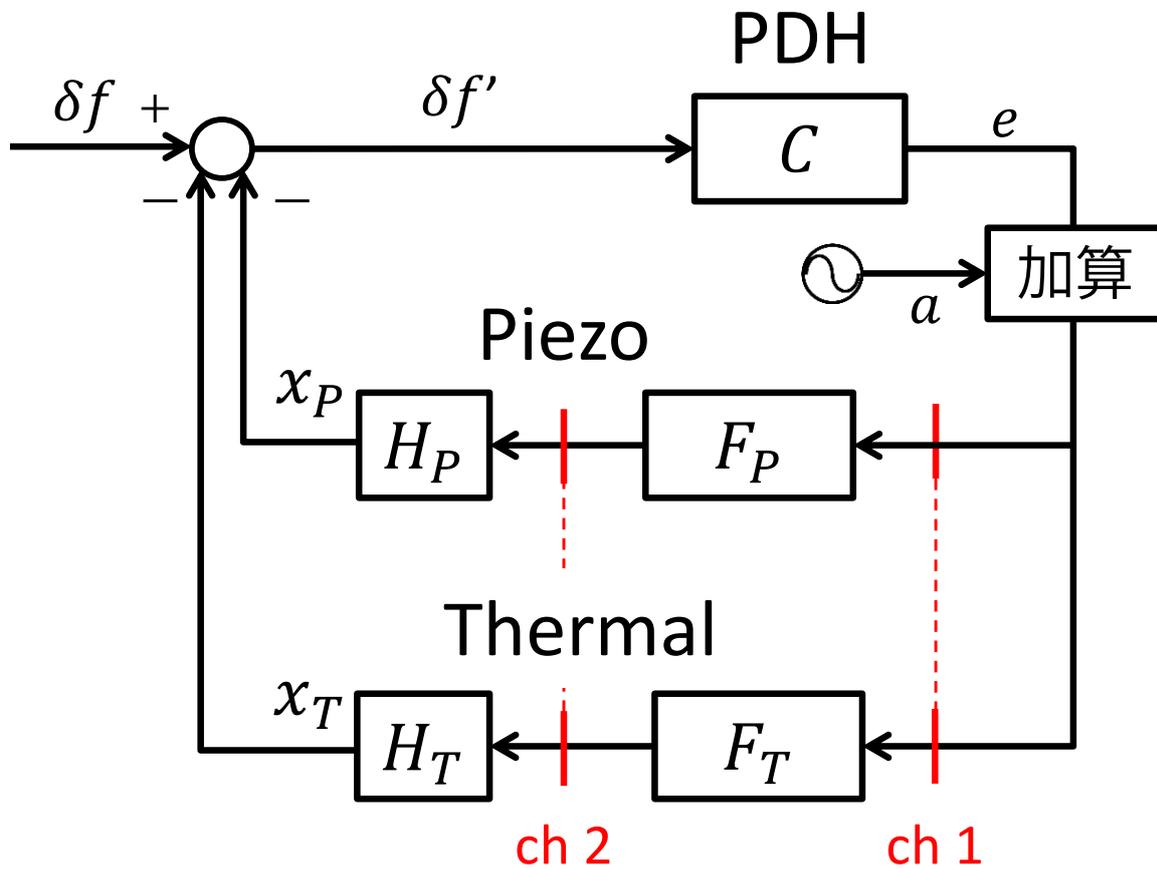


図 5.4: Filter 回路の伝達関数の測定系

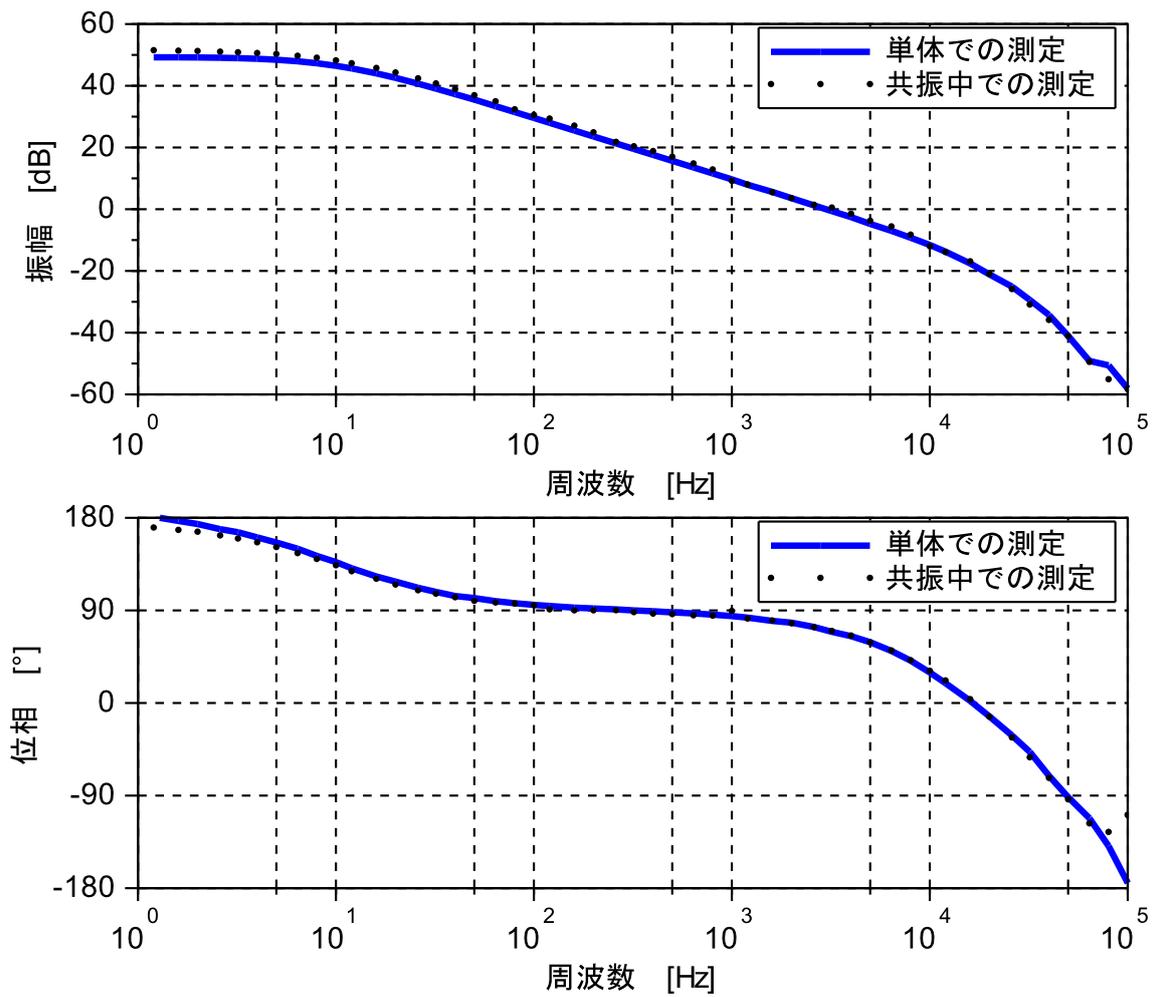


図 5.5: 共振中の piezo 用フィルター回路の伝達関数

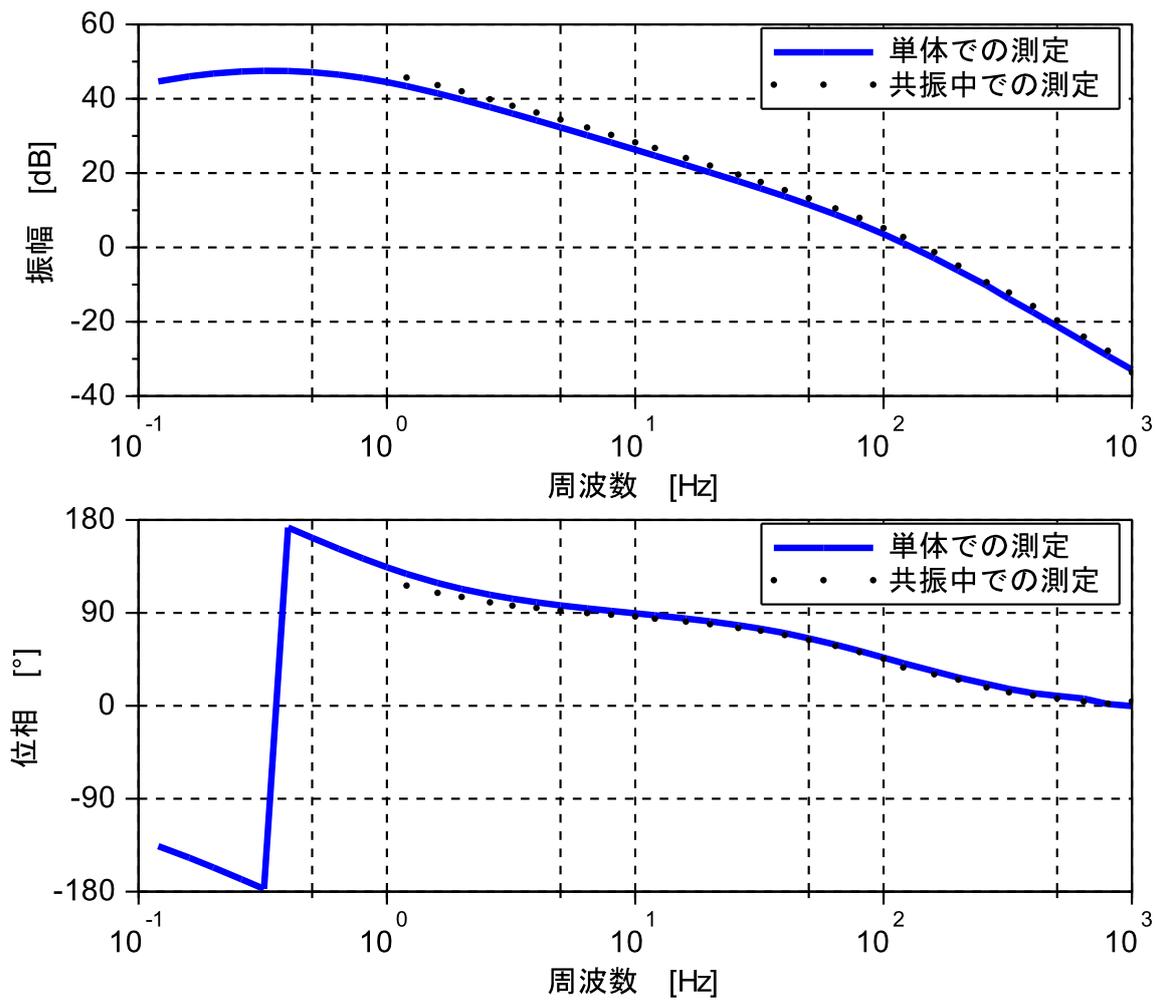


図 5.6: 共振中の温調用フィルター回路の伝達関数

## 5.2.2 オープンループ伝達関数

### ピエゾ用サーボ系

図 5.7 の測定系でピエゾサーボ系のオープンループ伝達関数を測定した。

$$e = \frac{C}{1 + CF_p H_p} (\delta f - H_p a) \quad (5.9)$$

が成り立つので、

$$\frac{\text{ch2}}{\text{ch1}} = \frac{F_p e}{F_p e + a} = \frac{C(\delta f - H_p F_p a)}{F_p(C\delta f + a)} \quad (5.10)$$

$$= \frac{F_p C \delta f - H_p F_p C a}{F_p C \delta f + a} \xrightarrow{a \gg \delta f} -CF_p H_p \quad (5.11)$$

よってオープンループ伝達関数が求まる。

ここで

$$H_p = 3.4 \text{MHz/V} \quad (5.12)$$

$$F_p(f) = 500 \cdot \frac{1}{1 + if/10\text{kHz}} \cdot \frac{1}{1 + if/34\text{kHz}} \cdot \frac{1}{1 + if/10\text{Hz}} \quad (5.13)$$

$$C(f) = \frac{A}{1 + if/f_c} \quad (5.14)$$

と置いて、 $A, f_c$  のフィッティングをした結果を図 5.8 に示す。フィッティング結果は

$$A = 1.0 \times 10^{-6} \pm 0.04 \times 10^{-6} \quad (5.15)$$

$$f_c = 8 \times 10^4 \pm 2.3 \times 10^4 \quad (5.16)$$

である。フィッティングによると 80kHz 付近に伝達関数の極が一つ存在しているが、誤差が大きいことを考えるとフィッティングの有意性は低いことになる。また 80kHz という値から、考えられる可能性として

- 光共振器の cavity pole(設計値 22kHz)ではなく、ピエゾ端子の入力インピーダンスによるフィルター効果である。
- フィネスの測定 §4.2 での測定値 7500 が実際のフィネスだと仮定すると、cavity pole は 97kHz となりこれがフィッティング結果に現れた。

いずれにせよ、100kHz 以降の伝達関数を測りフィッティングの有意性をより高める必要があるだろう。また、位相特性の 10kHz 以降のズレは、フィルター回路由来のものとなる。(図 3.15 参照)10Hz 以下で位相特性がフィッティング曲線から外れているのは、PDH 法の伝達関数の影響である。(図 5.13 参照)

フィッティング曲線のオープンループ伝達関数であらわされるフィードバック系のゲイン余裕、位相余裕はそれぞれ 16.6dB, 4.6° である。このフィードバック系では 10kHz まで周波数の安定化がなされている。

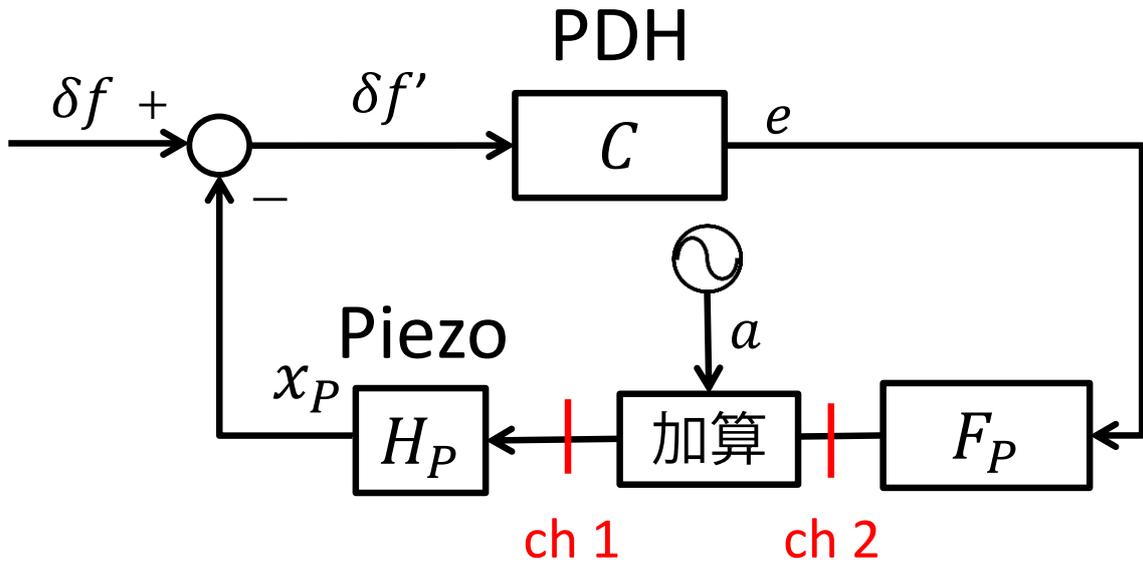


図 5.7: ピエゾサーボ系のオープンループ伝達関数の測定系

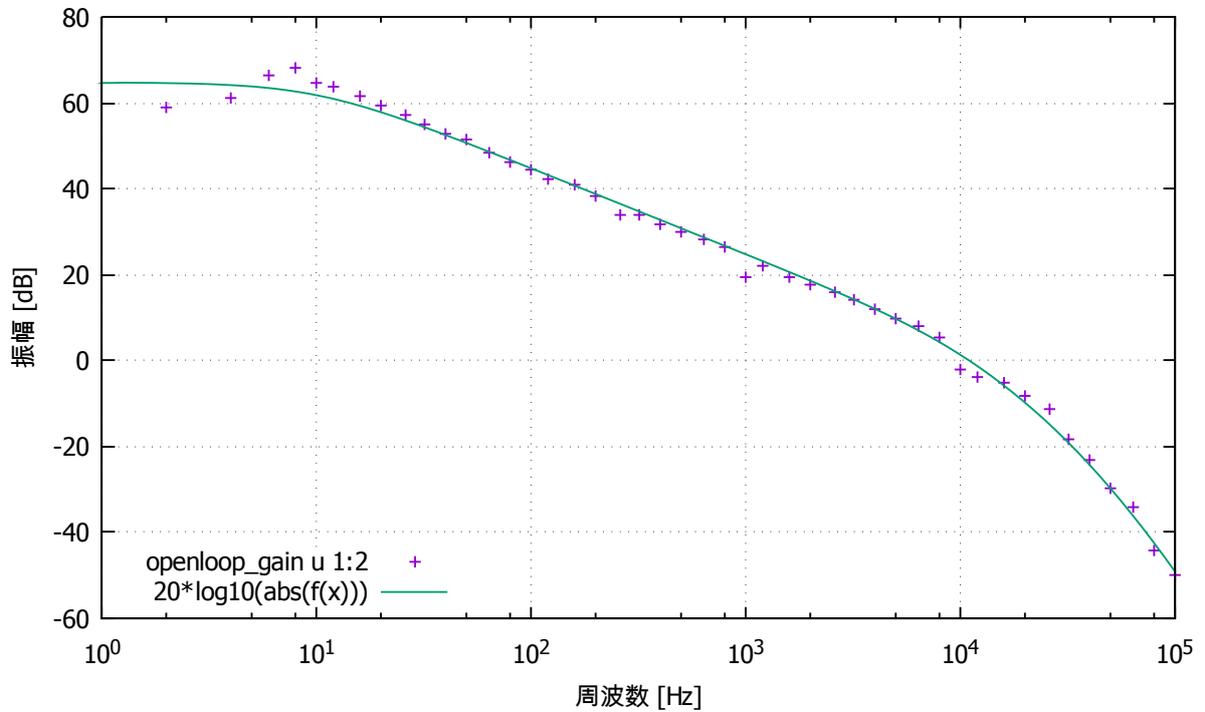


図 5.8: ピエゾサーボ系のゲイン特性とフィッティング結果

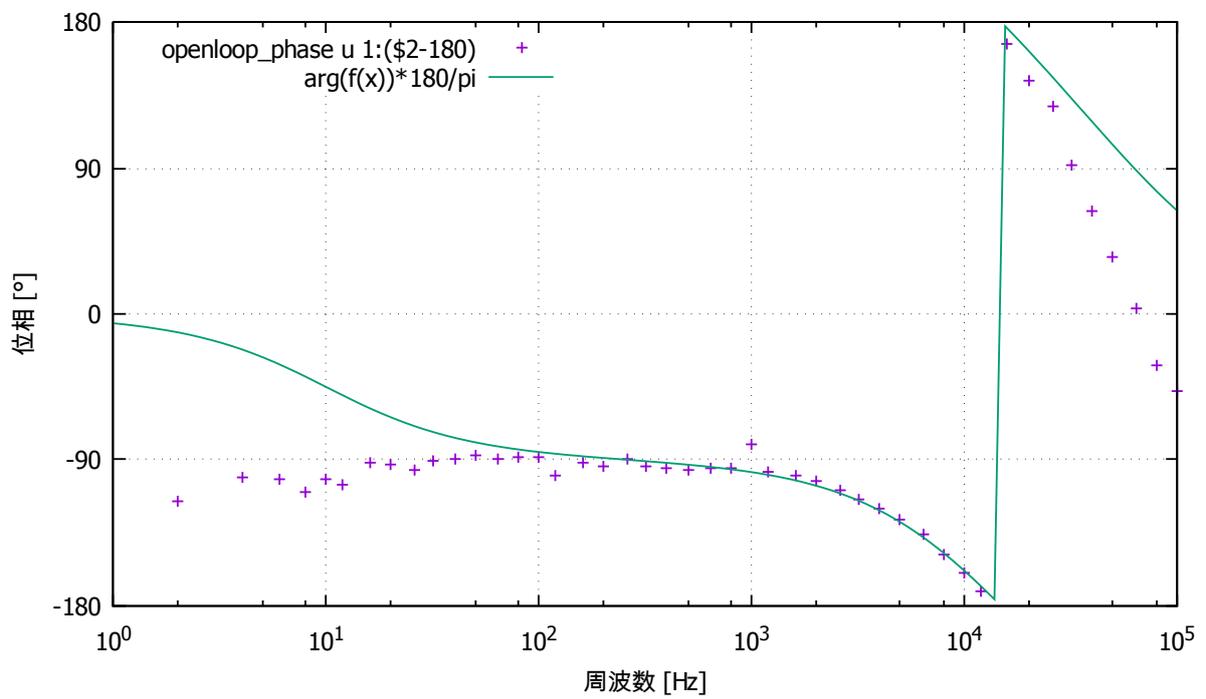


図 5.9: ピエゾサーボ系の位相特性とフィッティング結果

ピエゾ+温調用サーボ系

図 5.10 の測定系でピエゾ+温調サーボ系全体のオープンループ伝達関数を測定した。  
フィードバック要素の線形システム全体を  $H = H_P F_P + H_T F_T$  とおいて

$$e = \frac{C}{1+CG}(\delta f - Ga) \tag{5.17}$$

が成り立つので、

$$\frac{\text{ch2}}{\text{ch1}} = \frac{e}{e+a} = \frac{C(\delta f - Ga)}{C\delta f + a} \tag{5.18}$$

$$\xrightarrow{a \gg \delta f} -CG = -C(H_P F_P + H_T F_T) \tag{5.19}$$

よってピエゾと温調系を加算したオープンループ伝達関数が求まる。測定結果を図 5.11 に示す。フィッティング関数は複雑なため収束性が低かったので、ゲイン余裕と位相余裕を測定プロットからおおよそ 10dB, 50°それぞれ見積もった。制御帯域はおおよそ ~10kHz である。

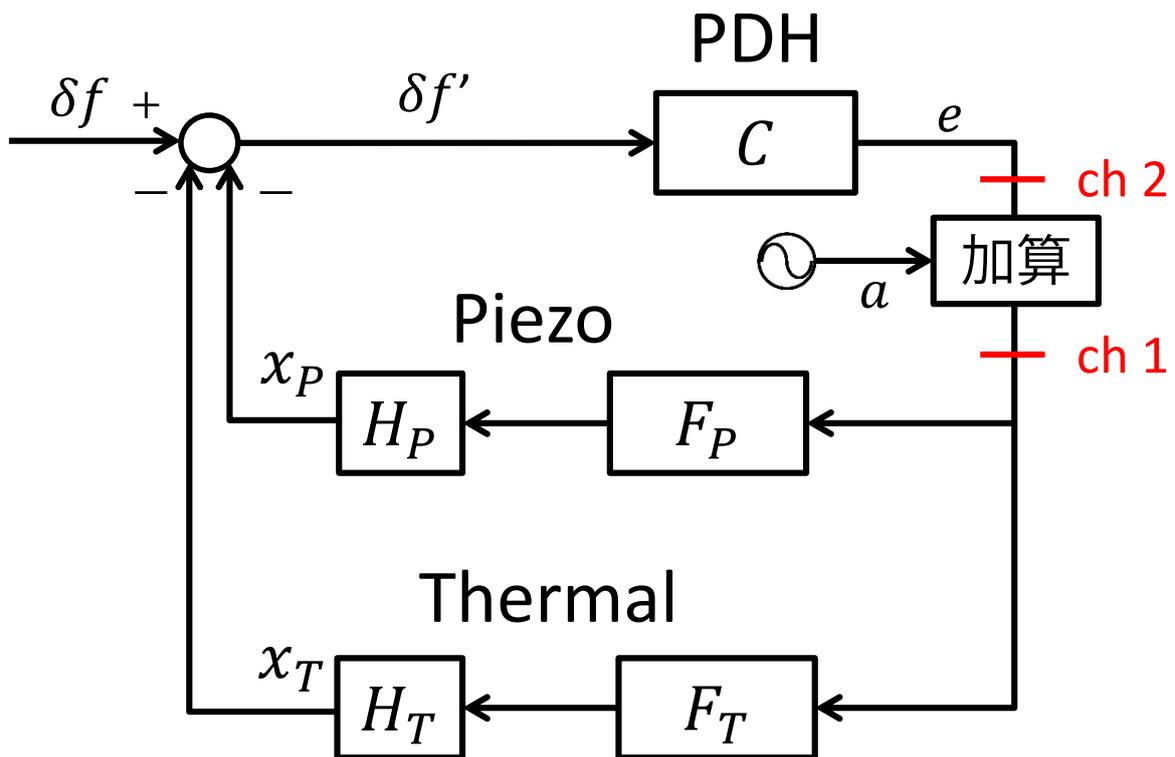


図 5.10: サーボ系全体のオープンループ伝達関数の測定系

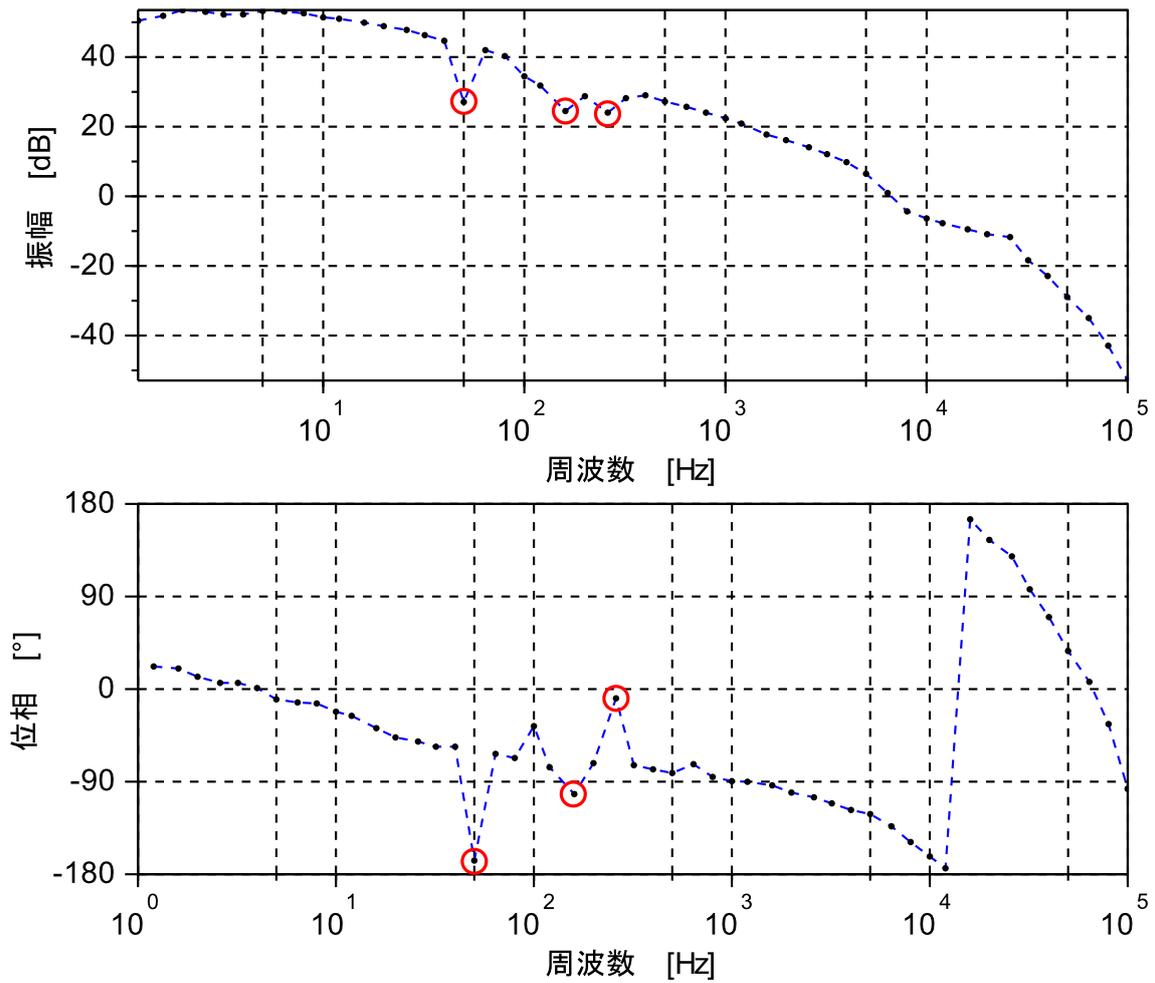


図 5.11: サーボ系全体のオープンループ伝達関数のプロット  
赤丸はコヒーレンスが悪く信頼性に欠ける点である。

### 5.2.3 PDH法の伝達関数

以下の測定系で、PDH法とピエゾ端子における電圧-周波数変換の合成系の伝達関数(図5.12より)を測定した。 $a$ はサーボアナライザからの入力信号で、サーボアナライザ

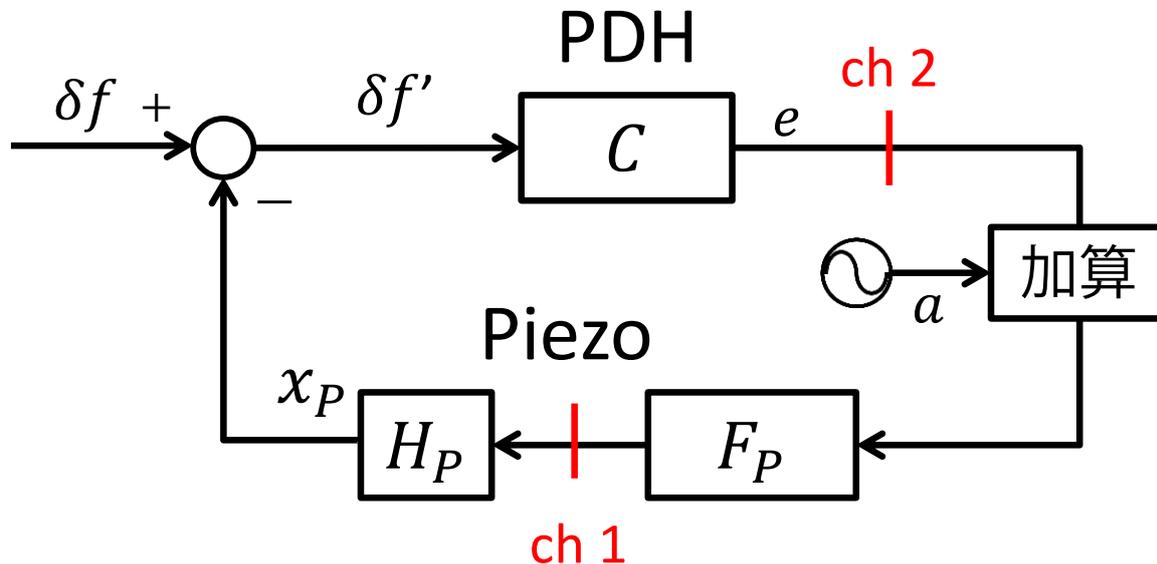


図 5.12: PDH法の伝達関数の測定系

は  $ch2/ch1$  を算出している。図 5.12 から

$$e = \frac{C}{1 + CH_P F_P} (\delta f - H_P F_P a) \quad (5.20)$$

なので、 $ch2/ch1$  は周波数ゆらぎに対して大きい入力信号の下、以下のように近似できる。

$$\frac{ch2}{ch1} = \frac{e}{F_P(e+a)} = \frac{C(\delta f - H_P F_P a)}{F_P(C\delta f + a)} \quad (5.21)$$

$$= \frac{C(\delta f/a - H_P F_P)}{F_P(C\delta f/a + 1)} \xrightarrow{a \gg \delta f} -H_P C \quad (5.22)$$

伝達関数は電圧信号からのみ測定でき、PDH法の伝達関数のみ分離することは実質不可能であったので、電圧-周波数変換係数を一定と仮定しPDH法の伝達関数を導出した。上述の測定結果と、ピエゾ用オープンループゲイン及びフィルターのゲイン特性から求めたPDH法伝達関数の算出結果を図5.13に示す。プロットを見る限り、両者ともに cavity pole 設計値 22kHz をカットオフ周波数とした一次LPFとしては機能していない。ここでオープンループ伝達関数のフィッティング結果によって得られた cavity pole:80kHz を仮定すると、プロットで示した帯域上ではほぼ平坦であることと矛盾しない。また 10Hz 以下の帯域で位相遅れが生じていることによって、オープンループ伝達関数の位相特性も同じ帯域で理論曲線から乖離していると言える。(図 5.9 参照) しかしながら、位相差が生じている原因は未だ特定されていない。

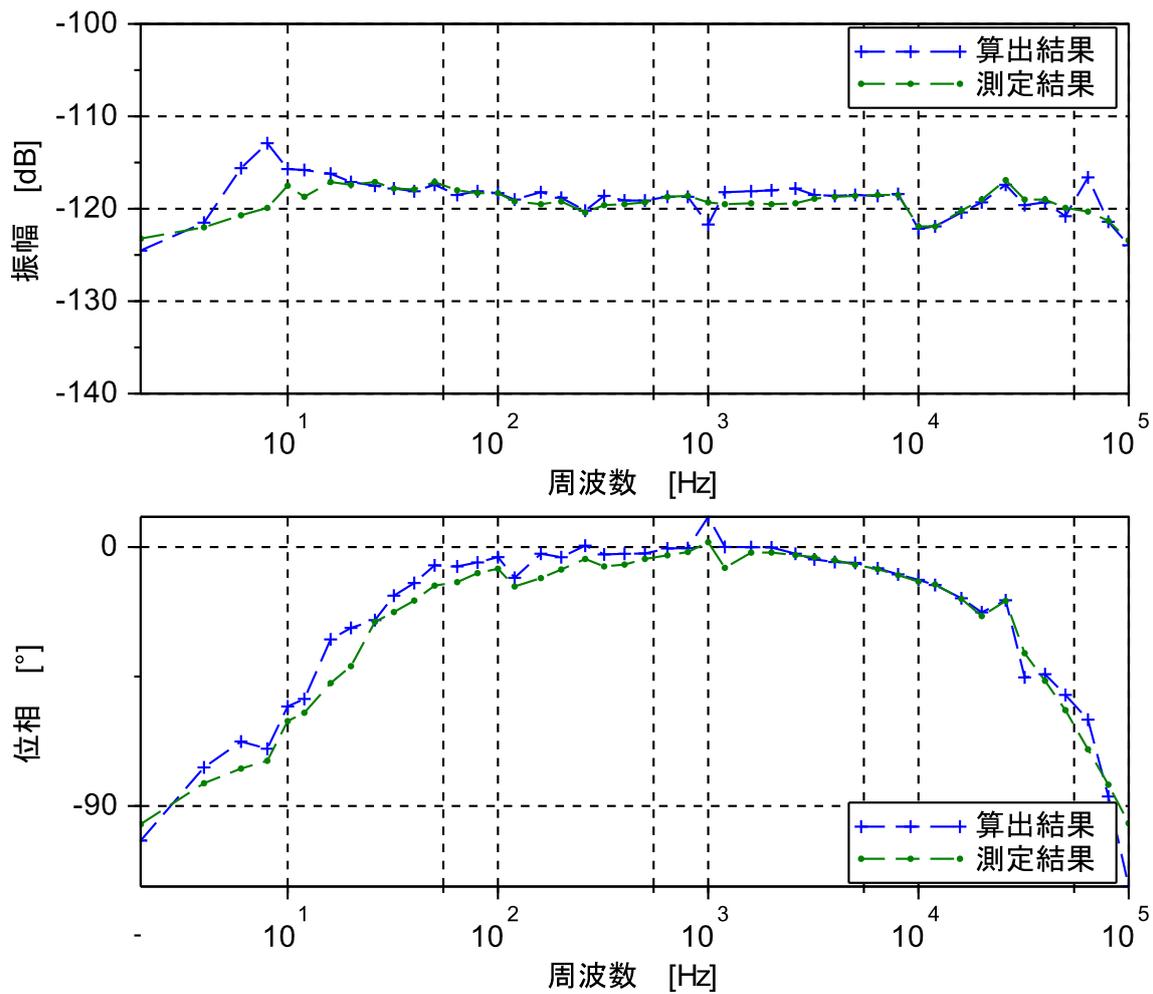


図 5.13: PDH 法の伝達関数

10Hz 以下の帯域ではオープンループ伝達関数のコヒーレンスが十分でなく特に乖離が大きい。

### 5.3 周波数ドリフトの測定

ピエゾ端子でのみのフィードバック系で、制御信号のドリフトを観測した。ピエゾ入力端子での電圧-周波数変換を  $3.4\text{MHz/V}$  として、電圧信号からレーザー周波数変化に換算したプロットを図 5.14, 図 5.15 に示す。1 秒当たりの平均ドリフトはそれぞれ  $18.4\text{kHz/s}$ ,  $3.72\text{kHz/s}$  である。この信号は、共振器とレーザーの周波数ドリフトの差分であるが、長期安定度の要求条件  $100\text{mHz/sec}$  がいかに厳しい制限かがわかる。また、共振器がレーザーの周波数雑音より安定でレーザー周波数のドリフトが現れていると仮定すると、NPRO レーザーの仕様書でのスペック  $13.9\text{kHz/hour}$ [15] と同程度である。

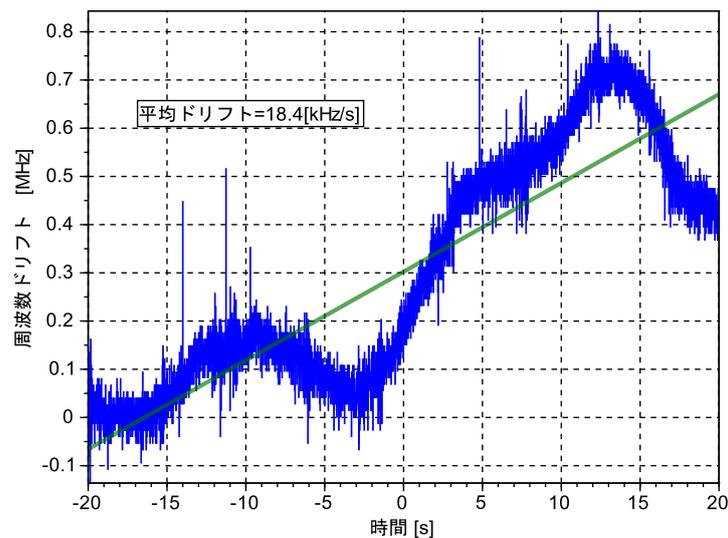


図 5.14: 周波数ドリフトの様子 (20s)

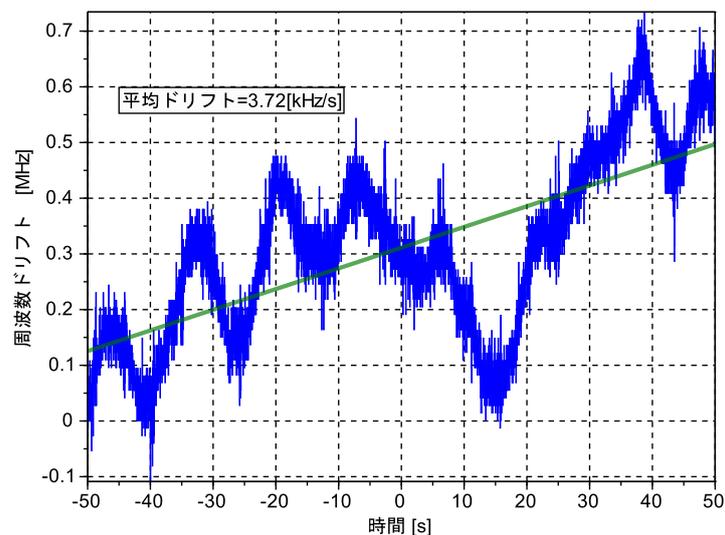


図 5.15: 周波数ドリフトの様子 (100s)

また温調端子へフィードバックをした系での、 piezo端子へのドリフト信号も観察した。温調端子はpiezo端子の約1000倍のチューニング効率をもっているためダイナミックレンジが広く、piezo端子への入力信号がダイナミックレンジを超えることを抑制する。図5.16からpiezoへのフィードバックのみの場合より、ドリフト信号が小さくとどまっていることがわかる。piezo端子のみでの共振器ロックでは、piezo端子のダイナミックレンジが外れる前に温調用ハンドルでオフセットを手動調整する必要があったが、温調端子への制御信号によりこの作業が自動化され、より長時間のロックが可能になった。

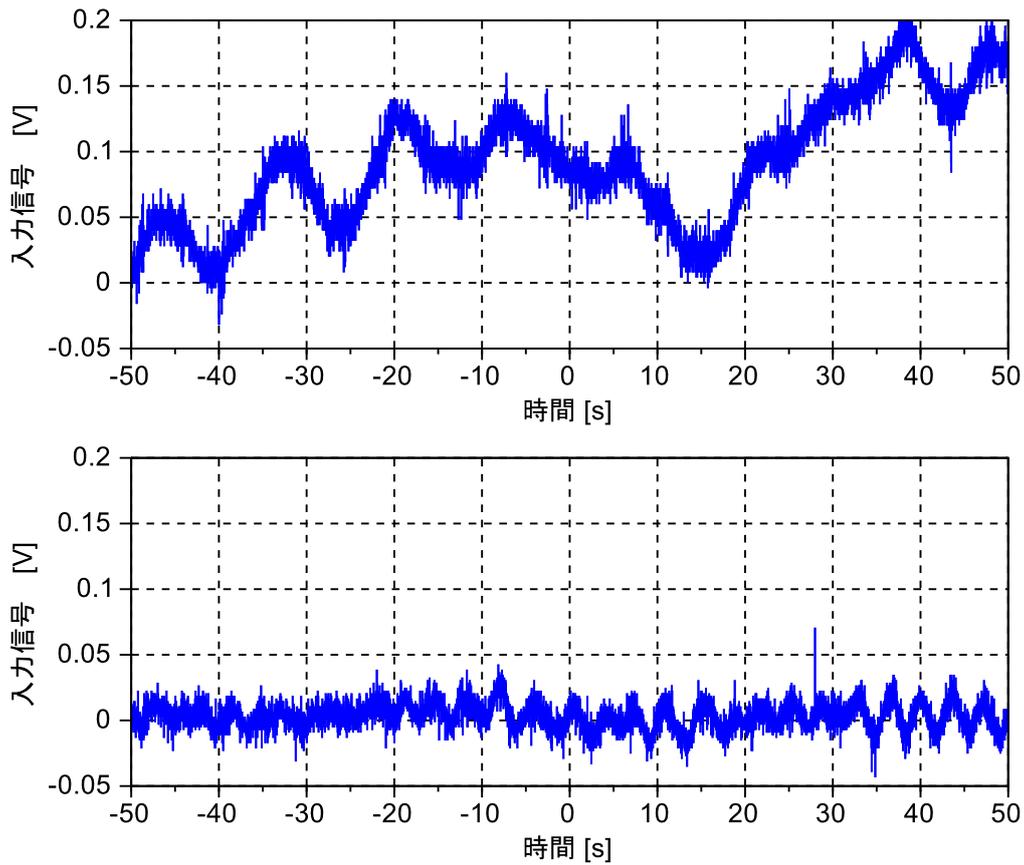


図 5.16: フィードバック系による周波数ドリフトの違い

## 5.4 周波数雑音のスペクトル測定

ピエゾ端子のみフィードバックをかけた系で、端子への制御信号(図 5.17 中の  $x_P$ ) と誤差信号(図 5.17 中の  $e$ ) のスペクトルを測定した。フィルター回路からの雑音も含めて、図 5.18 に示す。1kHz 以降ではオープンループゲインが小さくなるため、どちらの信号でもフィルター回路からの雑音が支配的になっている。

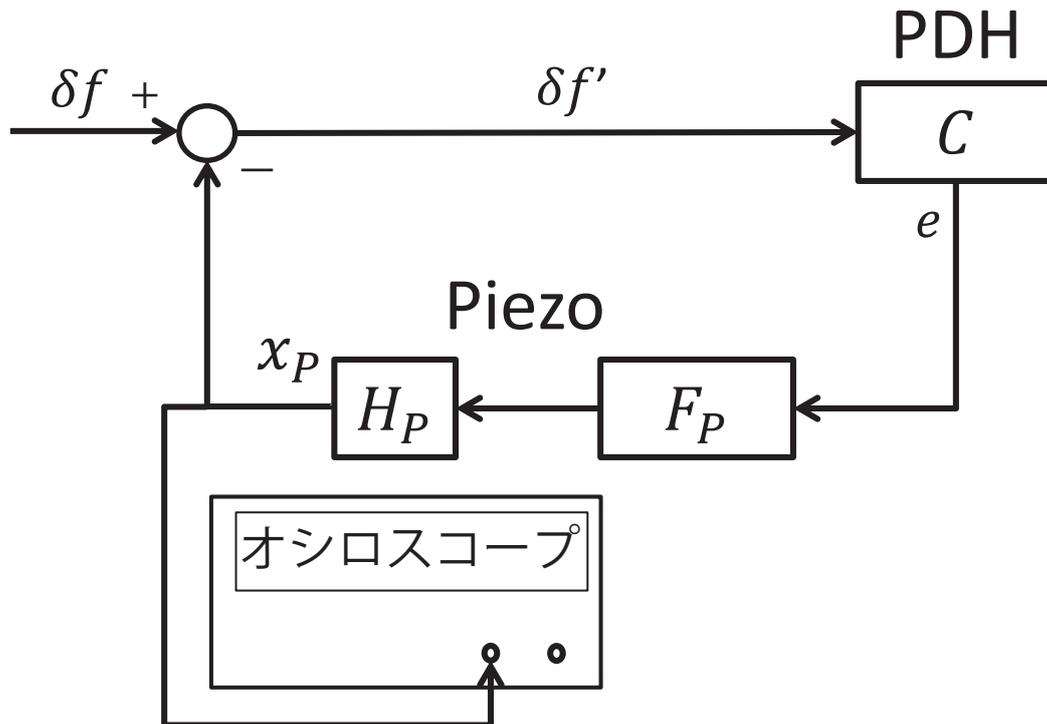


図 5.17: 周波数雑音スペクトル測定系のブロックダイアグラム  
 $\delta f$  は共振器とレーザーの周波数雑音の差分信号。

よって、低周波帯で S/N 比が高い制御信号から安定化前後のレーザー周波数雑音  $\delta f, \delta f'$  を算出した。§2.6 での議論と同様、図 5.17 において

$$x_P = H_P F_P C (\delta f - x_P) \quad (5.23)$$

$$\Leftrightarrow x_P = \frac{H_P F_P C}{1 + H_P F_P C} \delta f \quad (5.24)$$

であるので、 $\delta f, \delta f'$  はそれぞれ以下の式で算出される。

$$\delta f = \left( 1 + \frac{1}{H_P F_P C} \right) x_P \quad (5.25)$$

$$\delta f' = \frac{1}{H_P F_P C} x_P \quad (5.26)$$

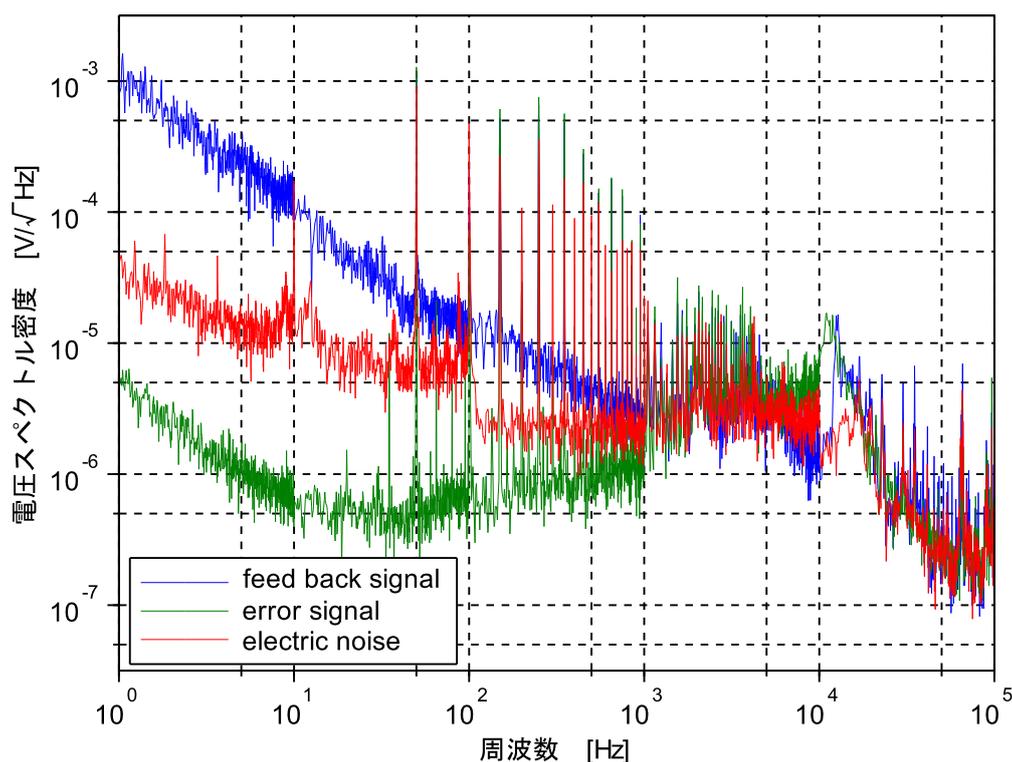


図 5.18: 制御信号、誤差信号、フィルター回路雑音のスペクトル

このときオープンループゲインは §5.2.2 でフィッティングされた結果を用いた。算出結果のプロットを図 5.19 に示す。今回、参照共振器のみを用いて誤差信号を取得しただけなので、青線のスペクトルは共振器の共振周波数と NPRO レーザー本来の周波数雑音を含んでいる。実際、1~100Hz の帯域では NPRO に典型的な  $1/f$  雑音が見て取れる。真空チャンバーすら用いず直置きしただけの共振器でレーザー周波数雑音が観察されたので、参照共振器の安定度が想定以上に高いことが定性的に分かる。また 10kHz 以降はユニティゲイン帯域外の上に雑音が多いので、レーザー雑音は測定されていない。

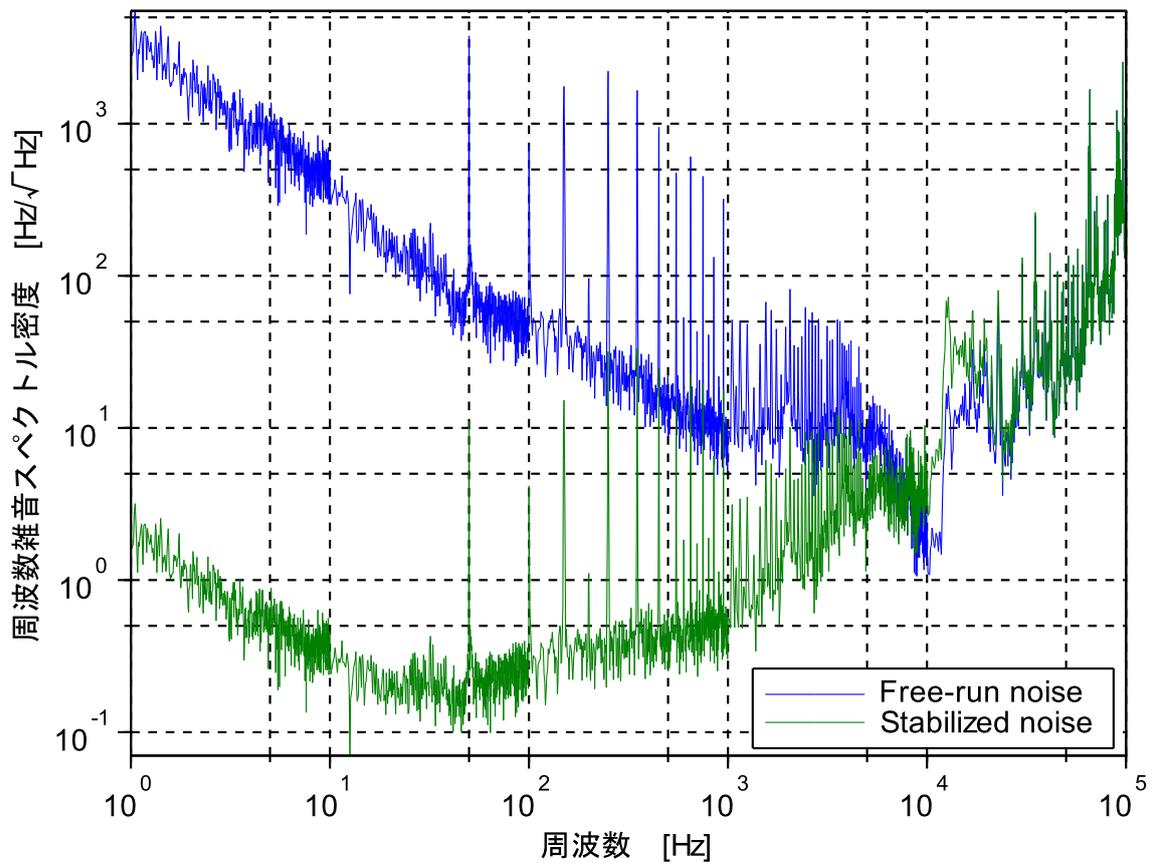


図 5.19: 安定化前後の周波数雑音スペクトルのプロット

## 第6章 考察

### 6.1 共振器の安定度要求条件に対する達成度の評価

シミュレーションにより導かれた参照共振器の安定度における要求値と、測定された in-loop 周波数雑音を図 6.1 に示す。図 6.1 のプロットから読み取れることを以下にまと

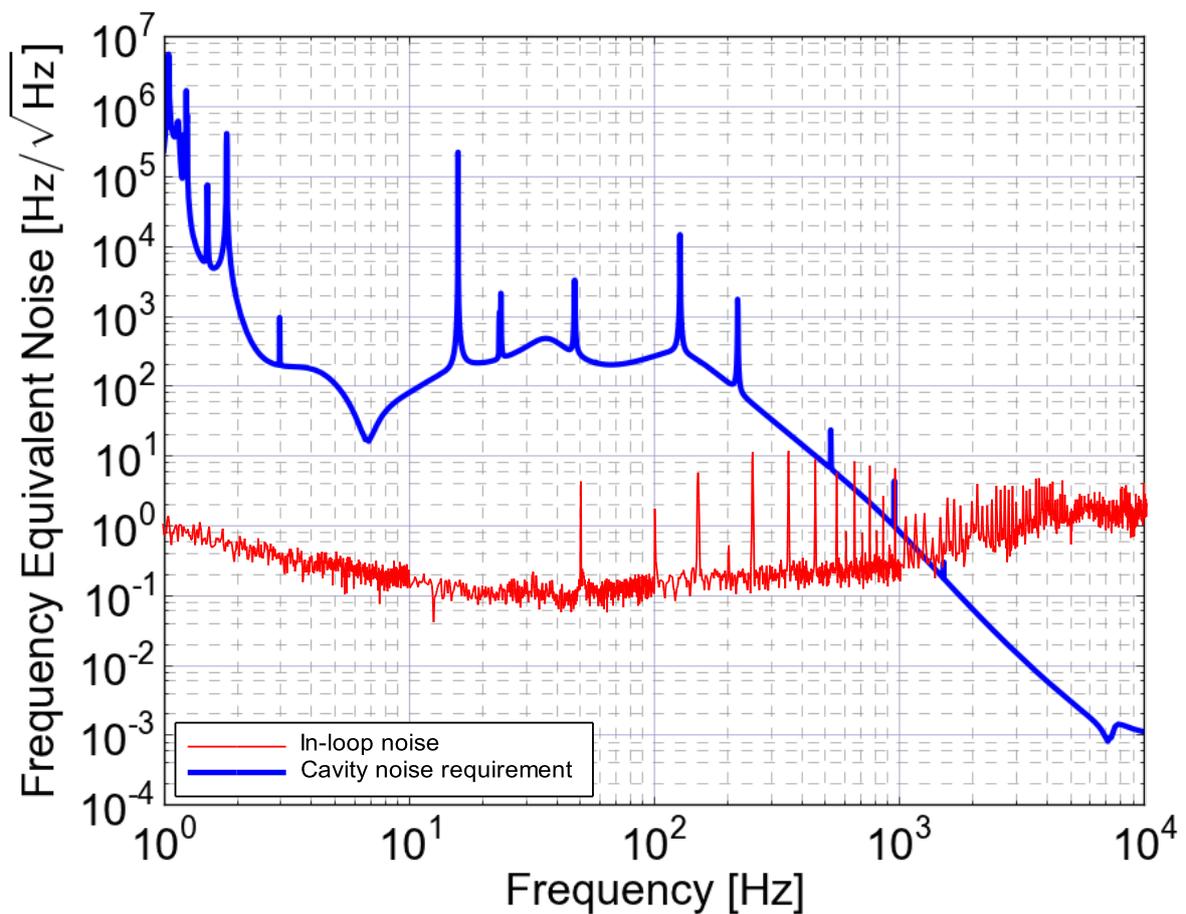


図 6.1: In-loop 周波数雑音と共振器安定度の要求値のプロット

める。

- 1~1kHz の帯域でオープンループゲインが十分にあり、In-loop レーザ周波数雑音が要求値を達成していることが確認された。

- 1kHz 以上の高周波帯域では、オープンループゲインが小さい上にフィルター回路からの雑音で制限されてしまっている。
- 次段フィードバック系を用いての共振器の安定度評価のために、フィルター回路の制御帯域を広げゲイン余裕を設ける必要がある。

## 6.2 PDH 法誤差関数の理論値との比較

誤差信号の理論式は §2.5.1 の式 2.116 で与えられたが、実際はこれに mixer と PD の変換効率(それぞれ  $g^1$ ,  $\gamma$  とする) がかけられている。誤差信号に関わるパラメータは測定から

$$P_c = 5.4 \mu\text{W} \quad (6.1)$$

$$P_s = 0.14 \mu\text{W} \quad (6.2)$$

$$g = 2.3 \quad (6.3)$$

$$\gamma = 2.95 \times 10^4 [\text{V/W}] \text{ (データシート値)} \quad (6.4)$$

となった。 $P_c P_s$  に関しては、反射光用 PD の飽和光量が  $100 \mu\text{W}$  だったので ND フィルターで 0.3% まで低減させている。これらの量に基づき算出した理論曲線と実際の測定値を図 6.2 に示す。TEM<sub>00</sub> モードとサイドバンドのピークともに理論曲線に達しておらず、原因として考えられるのは以下の 2 点である。

- 用いた PD の素子面が  $\phi=0.3\text{mm}$  だったために、十分なビーム系が PD とカップリングしていなかった。このときピーク値比からカップリングファクターは 0.6 程度である。
- PD のゲインは非線形性を示すため、測定時の入射光量では十分なゲインが得られなかった。

また図 6.3 のように、理論曲線の TEM<sub>00</sub> モードのピークを測定値でスケールリングしてみると、サイドバンドピークの理論値との比はさらに低下していることがわかる。理論的には上記に示した 4 つのパラメータに関わらず、TEM<sub>00</sub> モードとサイドバンドのピーク値比は 2:1 になるため、何かしらのずれが生じている。しかしながら、測定値でこの比が保たれていない原因はいまだ特定されていない。

---

<sup>1</sup> $g$  は mixer の出力/入力で定義する。

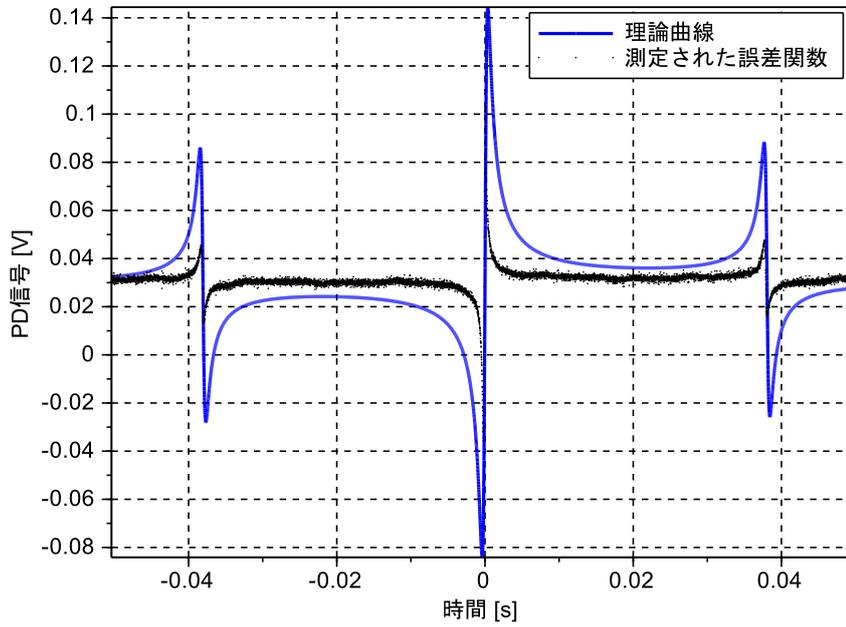


図 6.2: 誤差信号の理論曲線と測定値  
理論曲線には測定値と同じのオフセット補正をした。

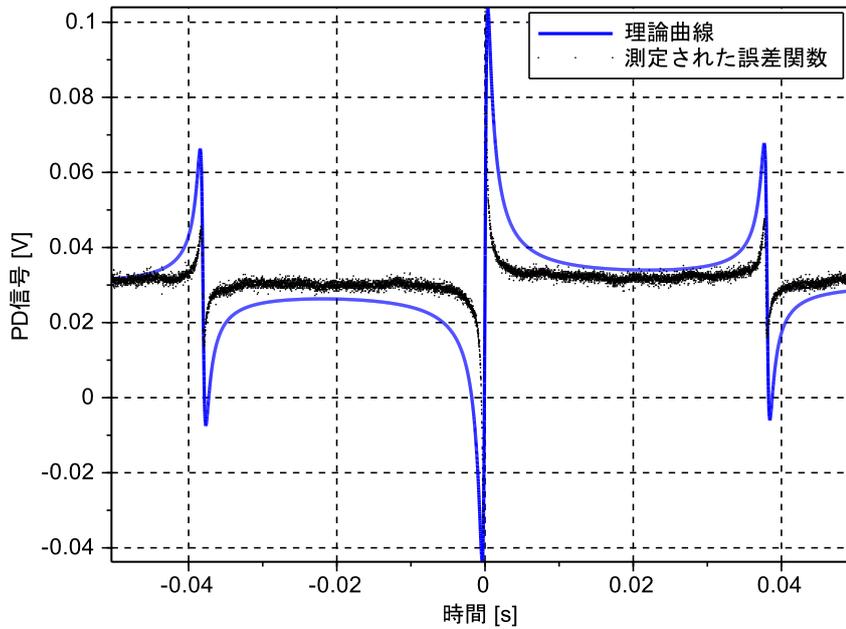


図 6.3: TEM<sub>00</sub> モードのピークでスケーリングされた誤差信号の理論曲線と測定値

## 第7章 結論と今後の課題

今回の研究で得られた結論を以下にまとめる

- 参照共振器の FSR、TMS は設計値と同程度の値で機能している。
- フィネス値は設計値より過小に見積もられ、他の測定法による裏付けが必要である。
- 参照共振器は真空チャンバーに装填せずとも、少なくとも $\sim 1\text{kHz}$ の帯域でレーザー周波数雑音より安定である。
- 設計した制御系は $10\text{kHz}$ まで制御帯域を持ち、周波数安定化が機能していることを $1\text{kHz}$ 付近まで確認した。
- $\sim 1\text{kHz}$ の帯域において、In-loop周波数雑音が要求値を満たしていることを確認した。

また今後の課題として数点説明する。

- 真空チャンバーを用いた周波数安定化  
真空チャンバーを用いることで共振周波数ゆらぎがより安定し、より S/N 比のよいレーザー雑音の検出と、高度の周波数安定化が可能になる。
- シングルモードファイバーを用いて、モードマッチングの向上  
モードマッチングは PDH 法の S/N 比に強く影響しているが、今回の実験では 13% 程度とまだ改善の余地は多く残されている。モードマッチングが低くなってしまった原因としては、使用した NPRO レーザーの元々のモード劣化が著しいことが考えられる。したがってシングルモードファイバーとカップリングさせることで、入射光のうちの  $\text{TEM}_{00}$  の割合を高めモードマッチングを向上できるだろう。
- AOM を用いた伝達関数測定法による cavity pole 及びフィネスの見積もり  
今回試行したフィネス測定法では有意な結果を得ることができなかったが、まだ Acoustic Optic Modulator (AOM) で強度変調させる測定法が残されている。今回はアライメント調整の単純化のため、AOM を用いることができなかったが、KAGRA 予定されている光学系に類似させるためにも AOM の導入は必要である。
- フィルター回路を再設計し、周波数安定化のゲインを  $10\text{kHz}$  以降まで高める。  
今回得た周波数雑音のスペクトルでの問題点は、 $1\text{kHz}$  以降で回路の雑音が大きくなっていることと、ユニティゲイン帯域が足りないことである。雑音の低減、制御帯域の拡張のいずれにせよフィルター回路の再設計に努めなければならない。

- 波長計による参照共振器の安定度評価

§2.6で説明したように、共振器の安定度を評価するには In-loop noise の測定では不十分である。安定化後のレーザーを別の共振器にロックさせ次段のフィードバック系で測定することができる。また要求の高い長期安定度に関してはヨウ素安定化レーザーなどの超安定のレーザーと干渉させ、そのビート信号から計測することができるであろう。

## 参考文献

- [1] T.H.Maiman, "Stimulated Optical Radiation in Ruby," *Nature*, Vol.187, pp.493-494, 1960.
- [2] <http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/>
- [3] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 (編) . 「重力波をとらえる: 存在の証明から検出へ」 . 京都大学学術出版会, 1998.
- [4] R. A. Hulse and J. H. Taylor, "Discovery of a Pulsar in a Binary System", *Astrophys. J.*, Vol.195, L51-L53, 1975.
- [5] B. P. Abbott *et al.*, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", *Physical Review Letters*, 116, 061102, 2016.
- [6] <http://www.ligo.org/index.php>
- [7] <http://www.ego-gw.it/index.aspx>
- [8] 中野雅之, 「重力波検出器 KAGRA のための量子雑音低減技術の開発における光共振器の光学機械的制御」, 修士論文、東京大学, 2014.
- [9] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward, "Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator", *Appl. Phys.*, Vol.B 31, pp.97, 1983.
- [10] P.Kwee *et al.*, "Stabilized high-power laser system for the gravitational wave detector advanced LIGO", *OPTICS EXPRESS*, Vol. 20, No.10, 2012.
- [11] Yuta Michimura, "bKAGRA PSL Design Study"(JGW-T1503547), <http://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/cgi-bin/DocDB/ShowDocument?docid=3547>, 2015.
- [12] 鈴木健一郎, 「レーザー増幅とコヒーレント加算を用いた重力波検出器 KAGRA のためのレーザー光源開発」, 修士論文、東京大学, 2014.
- [13] N. Ohmae, "Laser System for Second-Generation Gravitational-Wave Detectors", PhD thesis, University of Tokyo, 2011.
- [14] 頼本賢治, 「Fabry-Perot 共振器を用いた半導体レーザー冷機 Nd:YAG レーザーの周波数安定化」, 修士論文、東京大学, 1999.
- [15] "LIGHTWAVE 社 SERIES 125/126 USER ' S MANUAL"

- [16] "USER'S GUIDE DC-250MHz Electro-Optic Phase Modulators"
- [17] "Menlo System 社 FPD510-F Operating Manual"
- [18] 麻生洋一 他, 「重力波検出器 KAGRA の主干渉計開発」 (JGW-G1402302-v2), <http://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/cgi-bin/DocDB/ShowDocument?docid=2302>, 2014.
- [19] Ludwig Blumel, Personal communication, 2015/11/12.
- [20] 光貿易株式会社, "Assembly Of Cylinder Cavity".
- [21] B. P. Abbott *et al.*, "THE RATE OF BINARY BLACK HOLE MERGERS INFERRED FROM ADVANCED LIGO OBSERVATIONS SURROUNDING GW150914", arXiv:1602.03842v1, 2016.

## 付録 A 重力波の初検出

本論文の初稿提出後にあたる 2016 年 2 月 12 日、アメリカの重力波検出プロジェクトである LIGO グループにより、史上初めてである重力波の直接検出が公式に発表された [5]。今回の検出が物理学全体に及ぼす影響は大きく、また本論文の根底にかかわる事項であるため概要を追記の形で記す。

2015 年 9 月 14 日の協定世界時 09:50:45、アメリカの重力波検出器 LIGO の 2 台で図 A.1 の上段に示された波形が検出された。

今回の重力波源として考えられているものは、二つのブラックホールが対をなしている

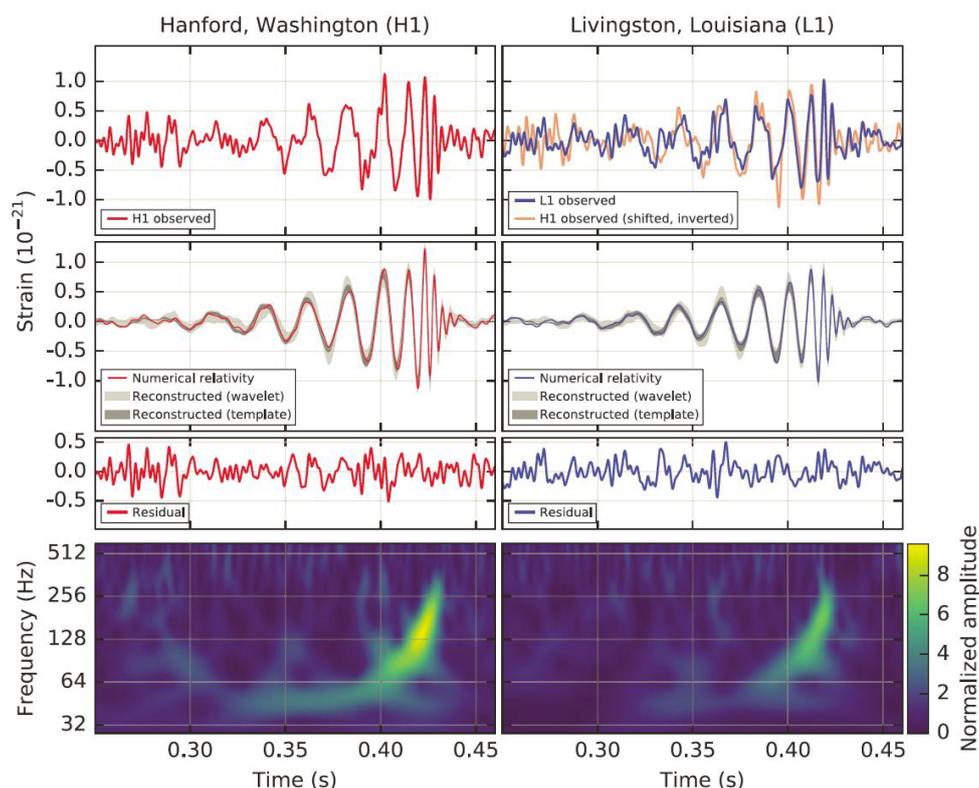


図 A.1: LIGO 各サイトでの重力波信号、再構築後の波形および残差、時間-周波数空間での強度分布  
時間-周波数空間での分布の形が、時間経過とともに周波数が単調増加することを表し、連星合  
体の典型的な波形であることを示している。

連星系である。電磁波以外を用いた初めてのブラックホール観測であり、ブラックホール連星に関しては史上初の観測となる。それぞれのブラックホールは連星系の重心の周りを公転し、重力波の放出とともにエネルギーを失う。その結果ブラックホールの運動量は減りお互いに近づき、最終的には合体した後に、より巨大なブラックホールへと落ち着く

と考えられており今回それが実証された。波形の解析により今回観測した連星は、 $36M_{\odot}$ と $29M_{\odot}$ のブラックホールが合体後、 $62M_{\odot}$ のブラックホールとなり、残りの $3M_{\odot}$ に相当する重力波が外部に放出されたことがわかっている。

具体的には、連星系の Inspiral 期での波形から連星質量の関数形である (chirp mass と呼

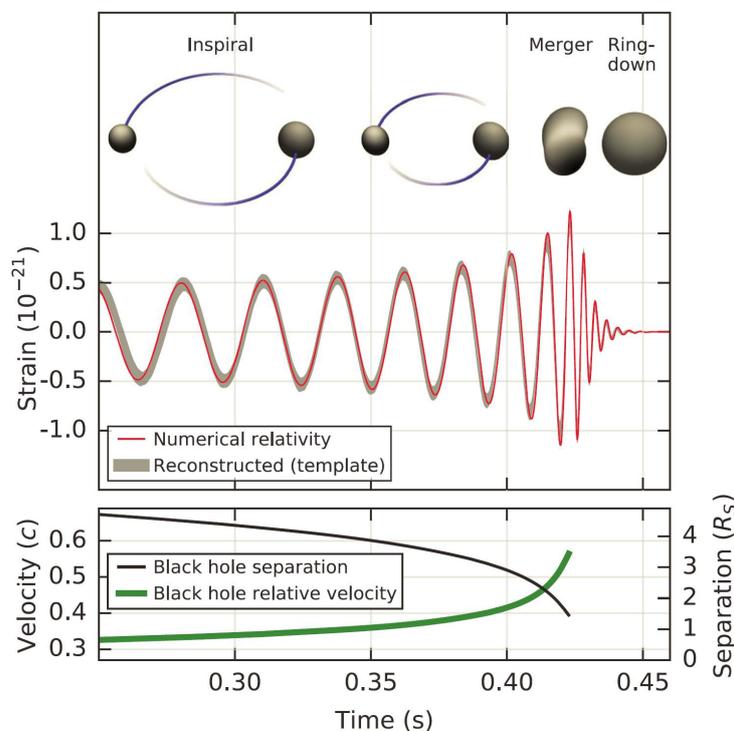


図 A.2: ブラックホール連星の合体と検出された信号の対応および公転速度の時間依存性

ばれる) パラメータ  $\mathcal{M}$  が以下の式で与えられる。

$$\mathcal{M} \equiv \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{c^3}{G} \left[ \frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right]^{3/5} \quad (\text{A.2})$$

ここで  $m_1, m_2$  はそれぞれ連星系をなす天体の質量、 $f$  は Inspiral 期での重力波の周波数  $\dot{f}$  はその時間微分、 $c$  は光速、 $G$  は重力定数を表す。このパラメータから、連星の質量和が求まる。また図 A.2 の下段のように公転速度の時間依存性も解析にわかっているため、連星合体の瞬間の公転速度が重力波周波数 (150Hz) の半分である性質を用いて、連星系それぞれの半径が見積もられる。それらのパラメータの値は、中性子星連星または中性子ブラックホール連星では満たされず、ブラックホール連星であることがわかった。

データ解析に関しては、様々な手法が独立で行われた。主なるものとして、Generic transient search と Binary coalescence search がある。前者は2台の検出器で得たデータのうち相関のある信号から最尤推定法に従い信号の再構築を行う。そしてそれぞれ再構築された信号の相関性のある信号のエネルギーと残差分のエネルギーの比から S/N 比を定義する。最終的には、長期に渡って得た検出器雑音のバックグラウンドで同等の S/N 比の信号を得

る確率から有意度を得る。一方後者は、各パラメータに依存する連星合体の重力波波形のテンプレートを用意するので、モデル依存性がある。そして *matched filter* 法に基づき実際のデータとの相関を S/N 比として定義し、S/N 比が最大になるようにパラメータの最適化を行う。有意度は、前者と同様の議論で雑音バックグラウンドとの比較で得られる。S/N 比と有意度はそれぞれの解析手法で、SNR=20, 有意度  $4.6\sigma$  以上及び SNR=24, 有意度  $5.1\sigma$  以上と見積もられた。

今回の検出によりブラックホール連星のイベントレートは  $2-53/\text{Gpc}^3/\text{yr}$  と見積もられ [21]、今まで想像上でさえあったブラックホール連星合体が定常的に観測される可能性が高いことがわかった。これは重力波天文学の創出への確証となり、天文学発展に向けた大いなる第一歩となった。

# 付録B フィルター回路の回路図

§3.4の図3.14で示したフィルター回路の詳細な回路図を以下に示す。

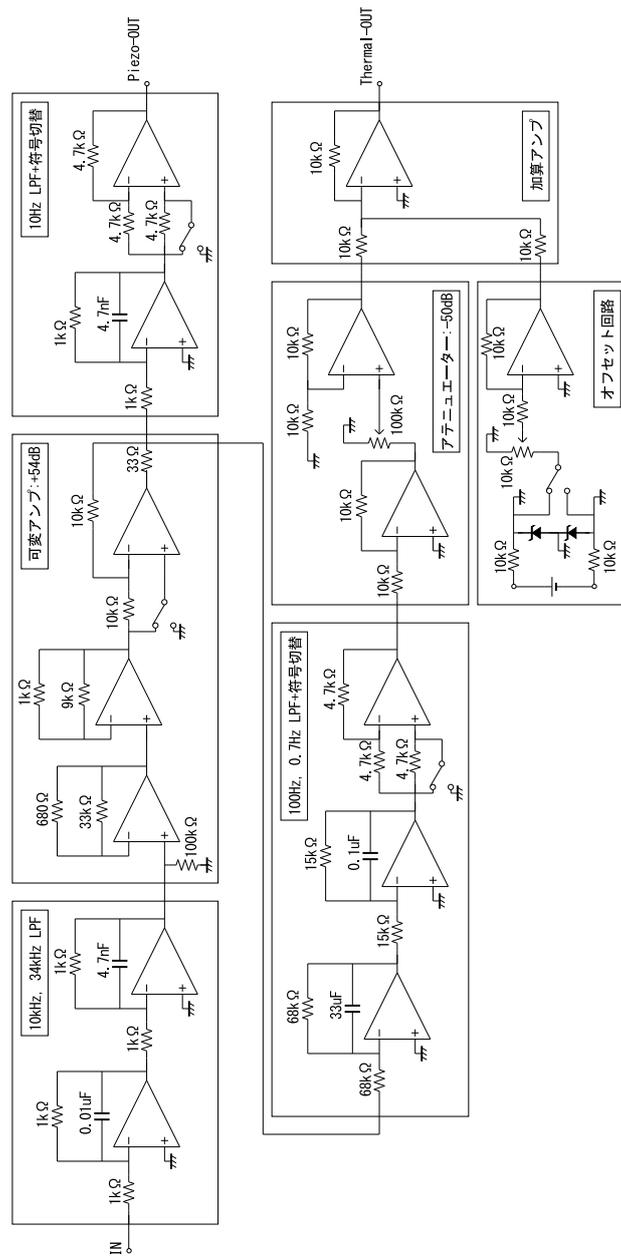


図 B.1: フィルター回路の回路図

# 謝辞

本卒業論文を執筆するにあたって多くの方々にご協力していただき、一つ一つの貢献の大きさには筆舌に尽くしがたいものがあります。ご尽力していただいた全ての人にまず感謝の意を表したいと思います。ここでは特に数人を抜粋し謝辞とさせていただきます。

三尾典克特任教授には研究のテーマ選びから論文の書き方まで、包括的な指導をしていただき、三尾特任教授なしには今回の研究はあり得ません。特に10月に研究がふりだしに戻った際、テーマ探しに奔走していただき、結果著者にとって、KAGRAにとっても有意義なテーマに従事することができました。また著者のアメリカ大学院留学にも大変ご尽力していただき、奨学金及び出願用の推薦状執筆にもお時間を割いてくださりました。このように感謝を述べ始めますと、枚挙の暇がございません。

理学部物理学系研究科安東研究室の安東正樹准教授と道村唯太助教授からは有意義な研究テーマをいただきました。特に道村助教授には、実験と論文執筆を進めるにあたって数多くの指導をしていただき、三尾研究室で不足した光学装置も快く貸してくださいました。ご自身の研究もあるにもかかわらず質問一つ一つに丁寧に答えていただき、その真摯な姿勢には研究者としてのみならず、教育者として尊敬しています。

本研究室修士課程2年西内良太氏には、光学系組み立ての基礎に始まり、研究に関わるあらゆる事項を教えてくださいました。特に著者が実験で悩んでいると、時間をかけて解決のために励んでくださり、その献身的な気性を個人的に先輩の理想像ととらえています。大変お世話になりました。

修士課程2年水谷彬氏、1年柳光孝紀氏はその親しみやすい人柄から研究室外でもいろいろな相談に乗っていただきました。行っている研究分野は異なりますが大変興味深いもので、多様性のある研究環境のもと研究を行うことができました。

修士課程1年池田浩太氏、中村亮介氏は勤勉な態度と幅広い知識でゼミでの建設的な議論に貢献していただきました。特に中村氏の卒業論文におけるPDH法の明快な記述は今でも心に残っています。

同期の金堂晃久氏とは、研究内容は違えど、お互い鼓舞しあい1年間の研究室生活を乗り越える原動力となりました。学部生にして光物性のプロジェクト立ち上げに従事する氏の勤勉な姿勢は尊敬に値します。

研究室OBの大前宣昭氏(現・香取研究室所属、特任研究員)とは、卒論発表に向けた最終的な議論を通して、様々な助言をいただきました。氏が本研究室に所属していた頃に、本研究で用いた光共振器を購入したこともあり、仕様に関して把握されていて著者の疑問全てに明快に答えてくださったことに感動しています。さらには共振器安定度評価に向けた指針までご教授していただいたので、今後の課題に取り組む際に大いに参考にさせていただきます。

宇宙線研究所の川村静児教授、博士課程2年中野雅之氏からは有益なアドバイスをい

ただき、大変勉強になりました。特に同研究所で行われている川村教授の重力波講義は、重力波検出への直感的かつ包括的な理解につながりました。

最後に、人生において時間ほど価値のある物事はない中で、本論文は上述した優秀な方々から貴重なお時間を頂戴して成り立っています。研究室に配属直後の未熟な著者自身を振り返り、多くの御恩によって人は育つという実感とともに、このような御恩の連鎖で科学研究は発展していくのだと学びました。そして森羅万象を司るエネルギー保存則と同じく、得られたものを還元しなければならないという使命感の下、本研究室の後輩の勉強材料になればと思い極力丁寧に記述をしました。まだ見ぬ後輩の成長のためになることを願いつつ、本論文の結びとさせていただきます。