

# ビームスプリッターにおける磁場雑音の計算

下田智文

2015年12月6日

## 1 概要

KAGRA ではアクチュエータのため鏡に小さな磁石が接着されている。また、鏡自身も外部磁場によって磁化されている。この磁石や磁化は環境磁場との相互作用によりトルクや力を受けるが、環境磁場の変動によりこれらのトルク・力も変動し、鏡の変位雑音となる。このように磁場の変動に従って生じる雑音のことを磁場雑音と呼ぶ。

磁場雑音のうち、磁石が受けるトルクによるものは既に見積もりが行われている [1]。ここでは磁石と磁化が受ける力による雑音の見積もりを行う。計算は特にビームスプリッターに関して行う。

## 2 磁場から受ける力

磁気双極子モーメント  $\vec{\mu}$  が外部磁場  $\vec{B}$  から受ける力は次の式で与えられる。

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (1)$$

この力による鏡の並進変動は、鏡に加えた力から鏡の変位への伝達関数を  $\tilde{H}(f)$  として、

$$\tilde{x} = \tilde{H} \cdot \tilde{F} \quad (2)$$

となる。振り子の共振周波数より高い周波数では、 $\tilde{H}(f) \simeq 1/(M_{mir}(2\pi f)^2)$  である ( $M_{mir}$  は鏡の質量)。BS に関しては図 1 のようになる。

また力 (1) は、後で述べるように鏡全体としてはトルクにもなりうる。トルクを受けると鏡は回転するが、ビームスポットが鏡の中心からズレていると、鏡の回転が光路長の変化にカップルし変位雑音となる。鏡が受けるトルクを  $\tilde{N}_i$  ( $i = \text{yaw, pitch}$ )、トルクから回転角への伝達関数を  $\tilde{H}_i$ 、ビームスポットのズレを  $\Delta x_{bs}$  とすると、

$$\tilde{x}_\alpha = \frac{\Delta x_{bs}}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{H}_\alpha \cdot \tilde{N}_\alpha \quad (\alpha = \text{yaw, pitch}) \quad (3)$$

( $\sqrt{2}$  で割っているのは BS が光軸に対して 45 度傾いていることによる。) 共振周波数より高い周波数では、鏡の yaw, pitch 方向の慣性モーメントを  $I_{mir}$  とすると、 $\tilde{H}_\alpha(f) \simeq 1/(I_{mir}(2\pi f)^2)$  と書ける。より詳細には図 2 のようになる。

### 2.1 磁石と磁場変動のカップル

鏡に取り付けられた磁石と外部磁場  $B$  の相互作用を考える。干渉計の光軸方向を  $z$  軸とする。磁石は光軸に対して水平方向に取り付けられているため、 $\vec{\mu} = (0, 0, \mu)$  として (1) に代入すると、1 つの磁石に対して光軸に平行な方向にはたらく力は、

$$f_z = \mu \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (4)$$

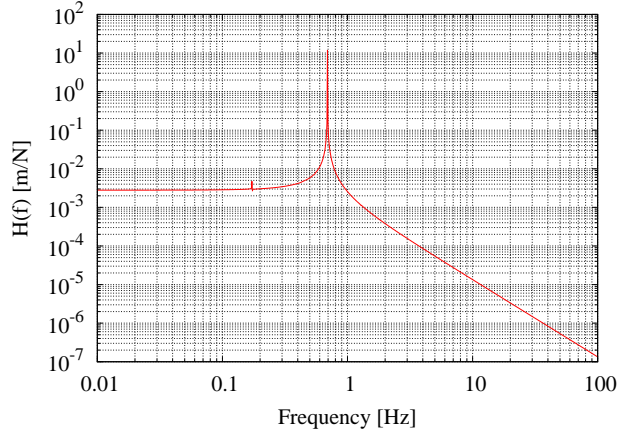


図1 力 変位の伝達関数 (BS)

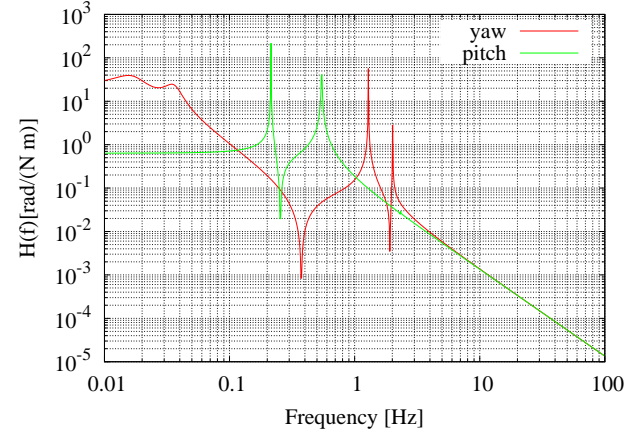


図2 トルク 回転角の伝達関数 (BS)

表1 パラメータ

		値	単位
鏡 (BS)	直径 $\phi_{\text{mir}}$	0.37	m
	厚み $l_{\text{mir}}$	0.08	m
	質量 $M_{\text{mir}}$	18.9	kg
	慣性モーメント (yaw,pitch) $I_{\text{mir}}$	0.17	kg · m <sup>2</sup>
	磁化率 (Fused Silica) $\chi_m$	$1.37 \times 10^{-5}$	-
	ビームスポット精度 $\Delta x_{\text{bs}}$	0.001	m
磁石	磁気モーメント $\mu_{\text{mag}}$	0.074	A · m <sup>2</sup>
	ばらつき $\frac{\delta\mu_{\text{mag}}}{\mu_{\text{mag}}}$	~ 0.2	
	取り付け数	4	個
	取り付け位置 $x_{\text{mag}}$	0.13	m
	取り付け位置精度 $\delta x_{\text{mag}}$	0.001	m

と書ける。(以下、簡単のため力  $f_z$  は  $f$ 、磁場勾配  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  は  $\nabla B$  と表す。)

KAGRA では磁石は鏡に対して対称な位置に 4 つ取り付けられる。4 つの磁石にはたらく力の和を式で書くと、

$$F_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^4 f_i = \sum_{i=1}^4 \mu_{\text{mag},i} \cdot \nabla B_i \quad (5)$$

( $\mu_{\text{mag},i}, \nabla B_i$  は各磁石の双極子モーメントおよびその位置での磁場勾配)

また各磁石にはたらく力は、鏡の重心周りのトルクとなる。このトルクの和を同様に式で表すと、

$$N_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^4 f_i \cdot x_{\text{mag},i} = \sum_{i=1}^4 \mu_{\text{mag},i} \cdot \nabla B_i \cdot x_{\text{mag},i} \quad (6)$$

( $x_{\text{mag},i}$  は各磁石の位置座標 (Yaw 回転を考える場合は鏡にそって水平な座標、Pitch 回転の場合は垂直))

4 つの磁石は互い違いの向きに取り付けられるため、理想的には力・トルクともに打ち消し合い 0 となる。しかし実際には磁石の双極子モーメント、取り付け位置における磁場勾配、および取り付け位置にばらつきがあるためわずかに力・トルクは残る。各因子を理想的な値とそこからのずれに分けて次のように表す：

$$\mu_{\text{mag},i} = \pm\mu_{\text{mag}} + \delta\mu_{\text{mag}} \quad (\pm \text{は取付方向を表す}) \quad (7)$$

$$\nabla B_i = \nabla B + \delta(\nabla B) \quad (8)$$

$$x_{\text{mag},i} = \pm x_{\text{mag}} + \delta x_{\text{mag}} \quad (9)$$

これらを式 (5) に代入して計算すると次のようになる。

$$F_{tot} = \sum_{i=1}^4 (\pm\mu_{\text{mag}} + \delta\mu_{\text{mag}}) \cdot (\nabla B + \delta(\nabla B)) \quad (10)$$

$$\simeq 2 \cdot \delta\mu_{\text{mag}} \cdot \nabla B + 2 \cdot \mu_{\text{mag}} \cdot \delta(\nabla B) \quad (11)$$

$$= 2 \cdot \delta\mu_{\text{mag}} \cdot \nabla B + 2 \cdot \mu_{\text{mag}} \cdot \frac{\delta(\nabla B)}{\nabla B} \cdot \nabla B \quad (12)$$

第一項が双極子モーメントのばらつきによって生じる力、第二項は磁場勾配の非一様性によって生じる力を表す。ここで、磁場勾配の非一様性を表す因子  $\frac{\delta(\nabla B)}{\nabla B}$  は一定であるとする。このとき第一項、第二項をそれぞれを  $F_1, F_2$  とおくと、その変動スペクトルは、

$$\tilde{F}_1 = 2 \cdot \delta\mu_{\text{mag}} \cdot \widetilde{\nabla B} \quad (13)$$

$$\tilde{F}_2 = 2 \cdot \mu_{\text{mag}} \cdot \frac{\delta(\nabla B)}{\nabla B} \cdot \widetilde{\nabla B} \quad (14)$$

と表される。

同様に式 (6) よりトルクも計算すると、

$$N_{tot} = \sum_{i=1}^4 (\pm\mu_{\text{mag}} + \delta\mu_{\text{mag}}) \cdot (\nabla B + \delta(\nabla B)) \cdot (\pm x_{\text{mag}} + \delta x_{\text{mag}}) \quad (15)$$

$$\simeq 2 \cdot \delta\mu_{\text{mag}} \cdot \nabla B \cdot x_{\text{mag}} + 2 \cdot \mu_{\text{mag}} \cdot \frac{\delta(\nabla B)}{\nabla B} \cdot \nabla B \cdot x_{\text{mag}} + 2 \cdot \mu_{\text{mag}} \cdot \nabla B \cdot \delta x_{\text{mag}} \quad (16)$$

第一項、第二項は力の場合と同様にそれぞれ双極子モーメントと磁場勾配のばらつきによるトルクを表す。第三項は磁石の取り付け位置のずれに起因するトルクである。これらをそれぞれ  $N_1, N_2, N_3$  とおくと、その変動スペクトルは、

$$\tilde{N}_1 = 2 \cdot \delta\mu_{\text{mag}} \cdot \widetilde{\nabla B} \cdot x_{\text{mag}} \quad (17)$$

$$\tilde{N}_2 = 2 \cdot \mu_{\text{mag}} \cdot \frac{\delta(\nabla B)}{\nabla B} \cdot \widetilde{\nabla B} \cdot x_{\text{mag}} \quad (18)$$

$$\tilde{N}_3 = 2 \cdot \mu_{\text{mag}} \cdot \widetilde{\nabla B} \cdot \delta x_{\text{mag}} \quad (19)$$

となる。

今回は、双極子モーメントのばらつき  $\delta\mu_{\text{mag}}$  は  $\mu_{\text{mag}}$  に対して 20 % 程度 ([2]、ただし各磁石のモーメントを実測し選定することで更に小さくできると思われる)、磁場勾配の非一様性を表す因子  $\delta(\nabla B)/\nabla B$  は 0.1 程度 ([2] では 20% としている。やや over estimate)、磁石の取り付け精度は約 1mm、と見積もって計算を行う (表 1、表 2)。

## 2.2 鏡の磁化と磁場変動のカップル

鏡自身も地磁気などの外部磁場によって磁化され、双極子モーメントをもつ。鏡の磁化率を  $\chi_m$  とすると、磁化により鏡が持つ双極子モーメントは  $\mu = \frac{\chi_m B}{\mu_0} V$  で与えられ、鏡が受ける力は、

$$F = \frac{\chi_m B}{\mu_0} V_{\text{mir}} \cdot \nabla B \quad (20)$$

となる ( $V_{\text{mir}}$  は鏡体積)。磁場及び磁場勾配の変動が力の変動となり、雑音になることが分かる。それぞれの効果を  $F_3$  及び  $F_4$  とすると、

$$\tilde{F}_3 = \frac{\chi_m}{\mu_0} V_{\text{mir}} \cdot \tilde{B} \cdot \overline{\nabla B} \quad (21)$$

$$\tilde{F}_4 = \frac{\chi_m}{\mu_0} V_{\text{mir}} \cdot \overline{B} \cdot \widetilde{\nabla B} \quad (22)$$

と書ける ( $\overline{B}, \overline{\nabla B}$  はそれぞれ平均磁場、平均磁場勾配)。

### 3 雑音の計算

#### 3.1 磁場の見積もり

表 2 パラメータ (磁場)

	値	単位
平均磁場 $\bar{B}$	$4.74 \times 10^{-5}$	T
磁場変動 $\tilde{B}$	$5 \times 10^{-13}$ @10Hz	$\text{T}/\text{Hz}^{\frac{1}{2}}$
平均磁場勾配 $\overline{\nabla B}$	$4.74 \times 10^{-5}$	T/m
磁場勾配変動 $\widetilde{\nabla B}$	$5 \times 10^{-13}$ @10Hz	$\text{T}/\text{m}/\text{Hz}^{\frac{1}{2}}$
磁場勾配の非一様性 $\frac{\delta(\nabla B)}{\nabla B}$	$\sim 0.1$	

KAGRA 坑内で計測された磁場 [4] は  $\bar{B} = 4.74 \times 10^{-5} [\text{T}]$  であり、変動スペクトルは図 3 のようになっている。真空槽のシールド効果により鏡の位置での磁場はこれより小さくなると考えられるが、今回はこれを上限値として見積もりを行う。

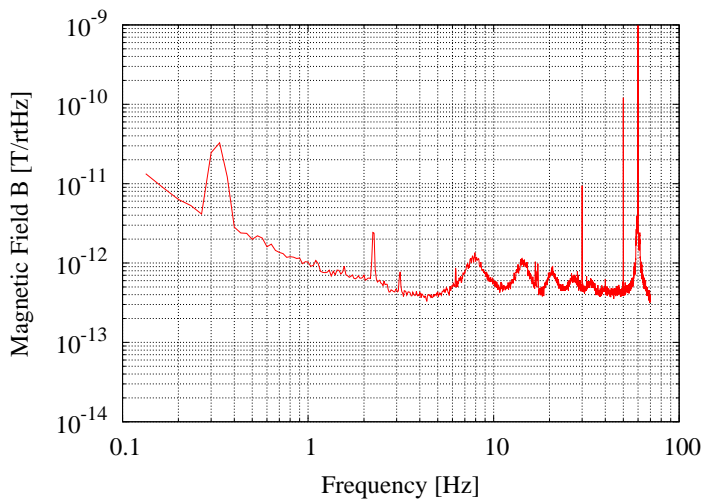


図 3 KAGRA 坑内 磁場の変動スペクトル

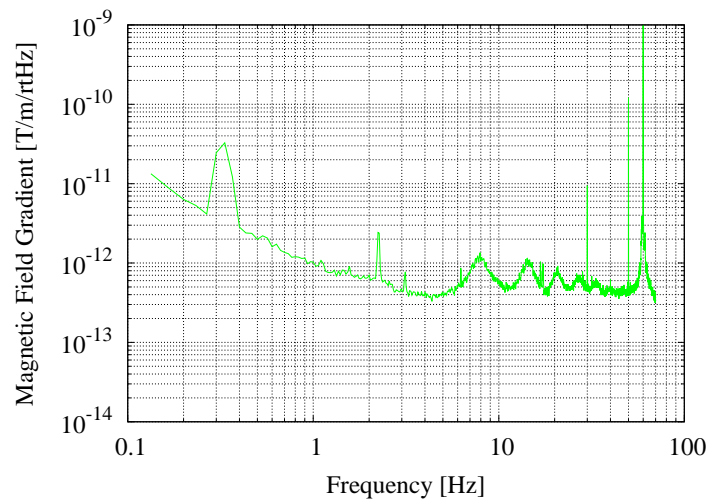


図 4 磁場勾配の変動スペクトル (見積もり)

雑音計算のためには磁場勾配とその変動スペクトルも知る必要がある。しかし今のところ磁場勾配の計測結果はないので、今回は磁場を典型的な空間スケールで割るという方法で勾配を概算する。典型的な空間スケールを  $\sim 1 [\text{m}]$  と仮定すると [3]、磁場勾配は  $\overline{\nabla B} \sim 4.74 \times 10^{-5} [\text{T}/\text{m}]$  となり、その変動スペクトルは図 4 のようになる。

#### 3.2 雑音の計算

以上のパラメータを用いて式 (13)(14)(21)(22) から力の変動スペクトル  $\tilde{F}_1 \sim \tilde{F}_4$  を、式 (17)(18)(19) からトルクの変動スペクトル  $\tilde{N}_1 \sim \tilde{N}_3$  をそれぞれ計算し、式 (2) と式 (3) で変位雑音に換算すると、次の図 5 のようになる。

要求値に対して、雑音は最も寄与の大きい  $F_1$  でも 1 桁程度下回っている。

### 4 結論

今回の計算結果によると、BS における磁場雑音は問題にならない。ただし今回の見積もりでは、特に磁場勾配に関する見積もりが大雑把であるため不定性も大きく、より正確には実際の計測値を用いて計算を行うべきである。

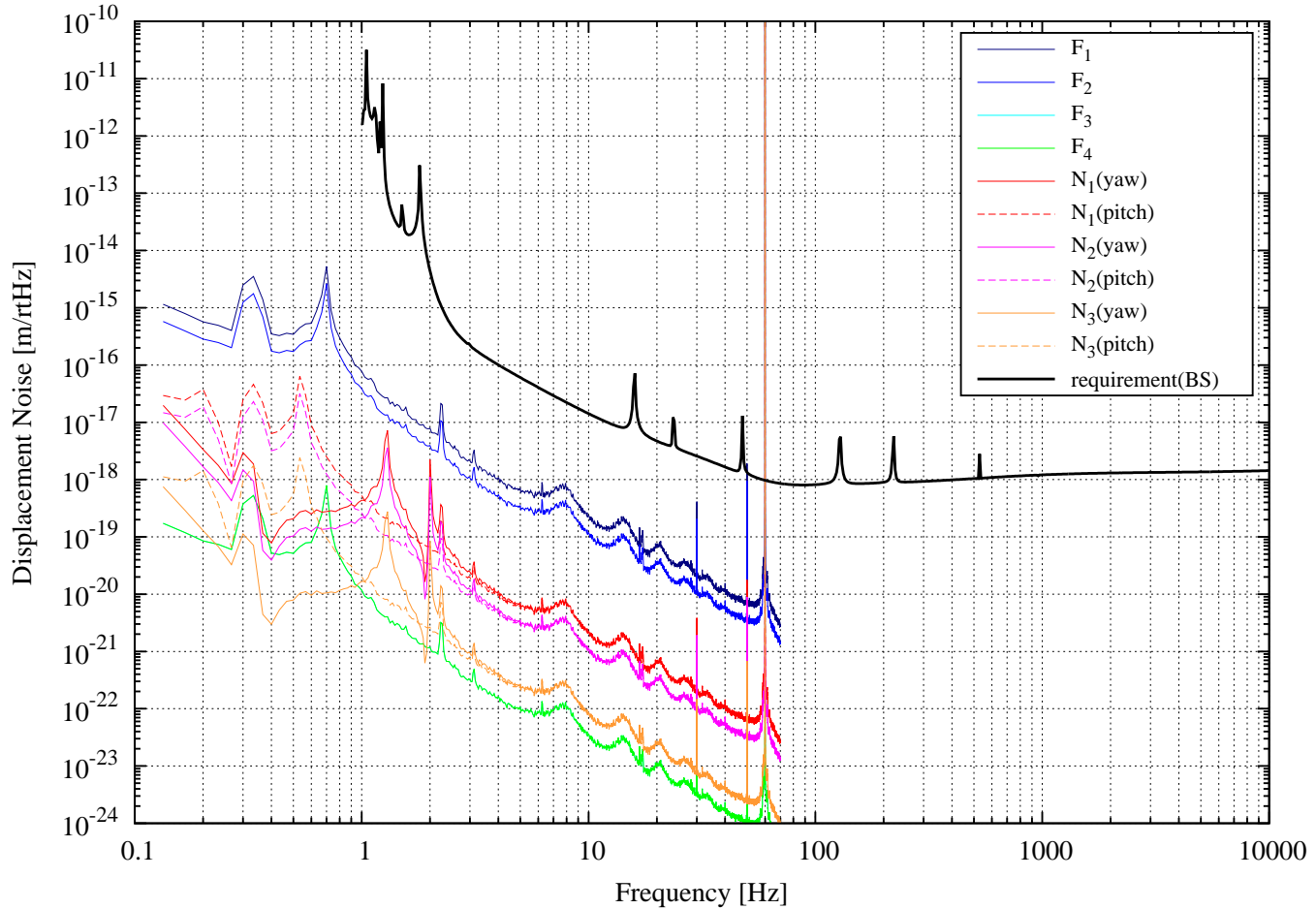


図 5 BS における磁場雑音の計算結果。 $F_1 \sim F_4, N_1 \sim N_3$  の寄与をそれぞれ異なる色で示した ( $F_3$  と  $F_4$  は重なっている)。  $N_1 \sim N_3$  に関しては、それぞれ鏡の yaw, pitch を通した寄与があるので、それらを実線 (yaw) と鎖線 (pitch) で表している。

## 付録 A 中段マスの磁場雑音

ビームスプリッター懸架系の中段マスにも磁石が取り付けられており、磁場勾配との相互作用により力を受ける。この力により中段マスは揺らされ、さらに中段マスの揺れは下段の鏡に伝達され雑音になる。このとき中段マスから鏡への伝達関数の分だけ振動は減衰される。

しかし中段マスに取り付けられた磁石は鏡と違い、磁場から受ける力を打ち消す配置になっていない ([5]Fig.3)。さらに磁石の双極子モーメントも鏡に取り付けられるものより 10 倍程度大きい (表 3)。これらの事情により中段マスが受ける変動も無視できないものとなるため、以下でその見積もりを行う。

表 3 中段マスのパラメータ

		値	単位
中段マス	質量 $M_{im}$	36.5	kg
磁石	磁気モーメント $\mu_{mag}$	0.69	$A \cdot m^2$

上に述べたように中段マスにおいては、磁石が受ける力がそのまま中段マスが受ける力に等しい (打ち消しの効果がない)。従って力の変動スペクトルは式 (4) をそのまま用いて次で与えられる。

$$\tilde{F}_{IM} = \mu_{mag} \cdot \widetilde{\nabla B} \quad (23)$$

これに伝達関数 (中段マスに加える力 鏡の変位) を乗じてプロットすると次のようになる。磁場は鏡の計算に用いた値と同じものを用いた。

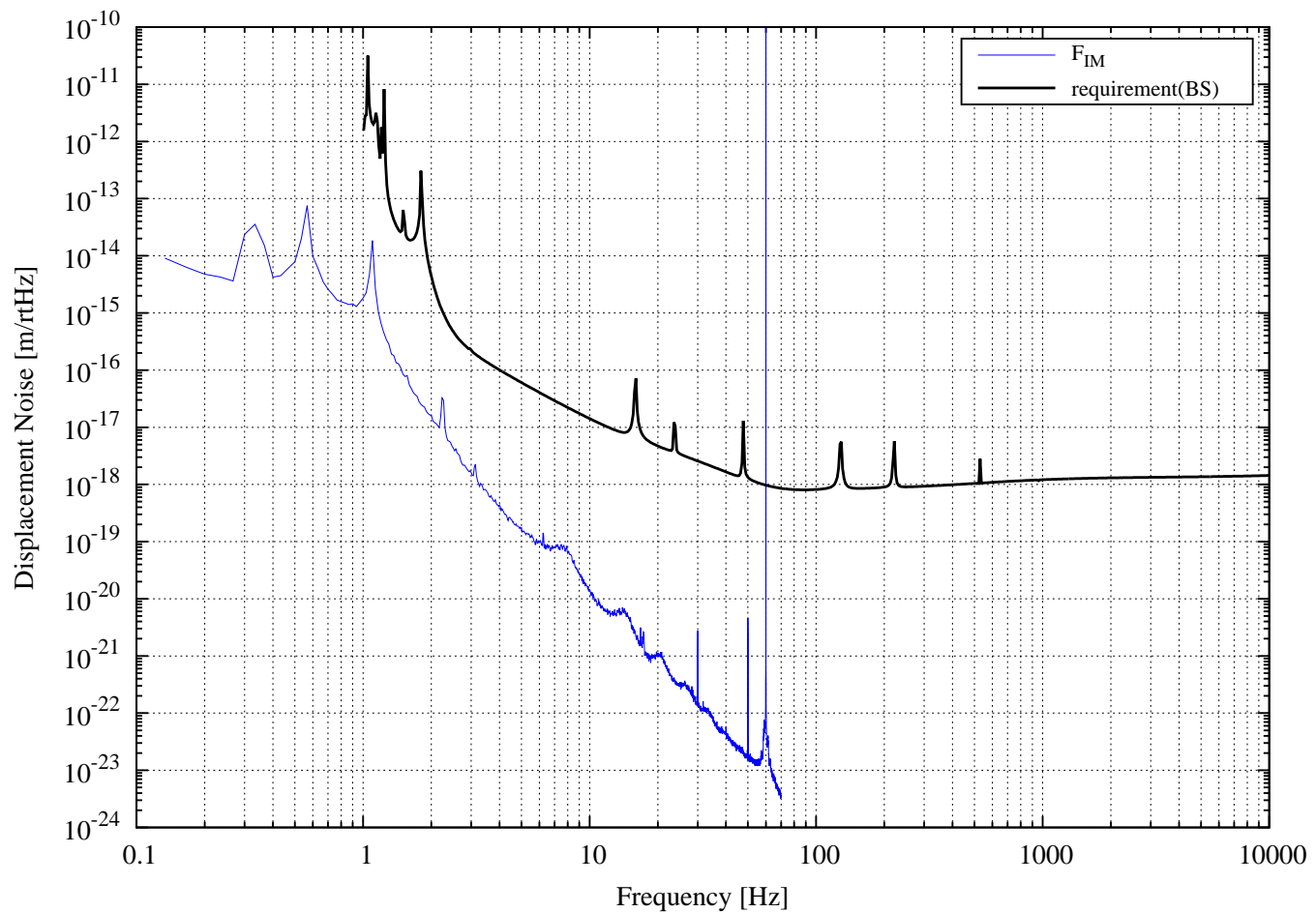


図6 BS懸架系の中段マスに加わる力による磁場雑音

10Hz 以上では 3 桁程度の余裕があり、大きな問題はないと思われる。

## 参考文献

- [1] Kenji Ono, Evaluation of BS and RM noise arisen from the AC component of geomagnetism field, JGW-T1503469-v1
- [2] I.Fiori et. al., Tentative upper limit of magnetic field distortion factor at AdV mirror actuation magnets, VIR-0171A-14
- [3] A. Conte, et. al., Study of the magnetic field gradient in the positions of the mirrors magnets for the Beam Splitter Payload, VIR-0363A-14
- [4] Kazuhiro Hayama, JGW-G1301997-v6
- [5] Takanori Sekiguchi, JGW-T1402170-v1