New estimation method for mass of an isolated neutron star using gravitational waves

Kenji Ono[†], Kazunari Eda[‡], Yousuke Itoh[‡]

Institute for Cosmic Ray Research (ICRR)[†]

Research Center for the Early Universe (RESCEU)[‡]

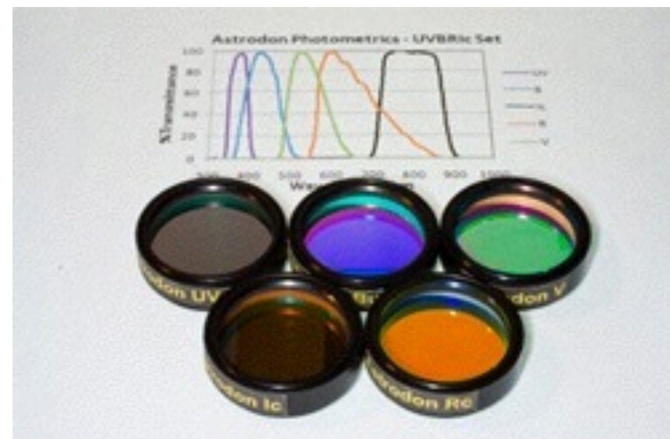
Phys. Rev. D 91, 084032

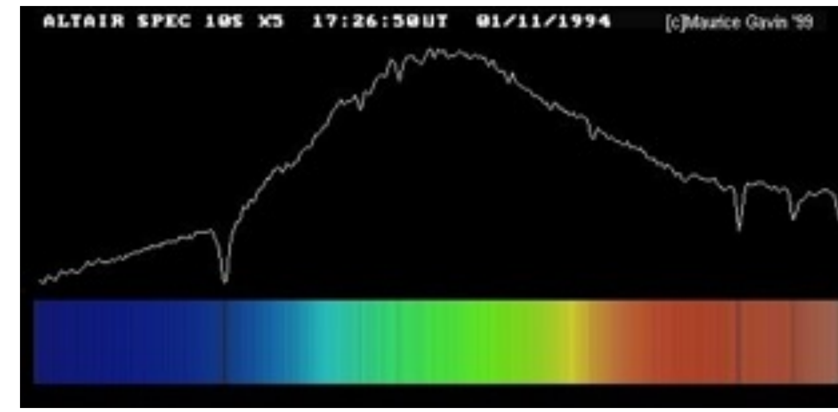
Introduction
天文学者は「何を」見ているか

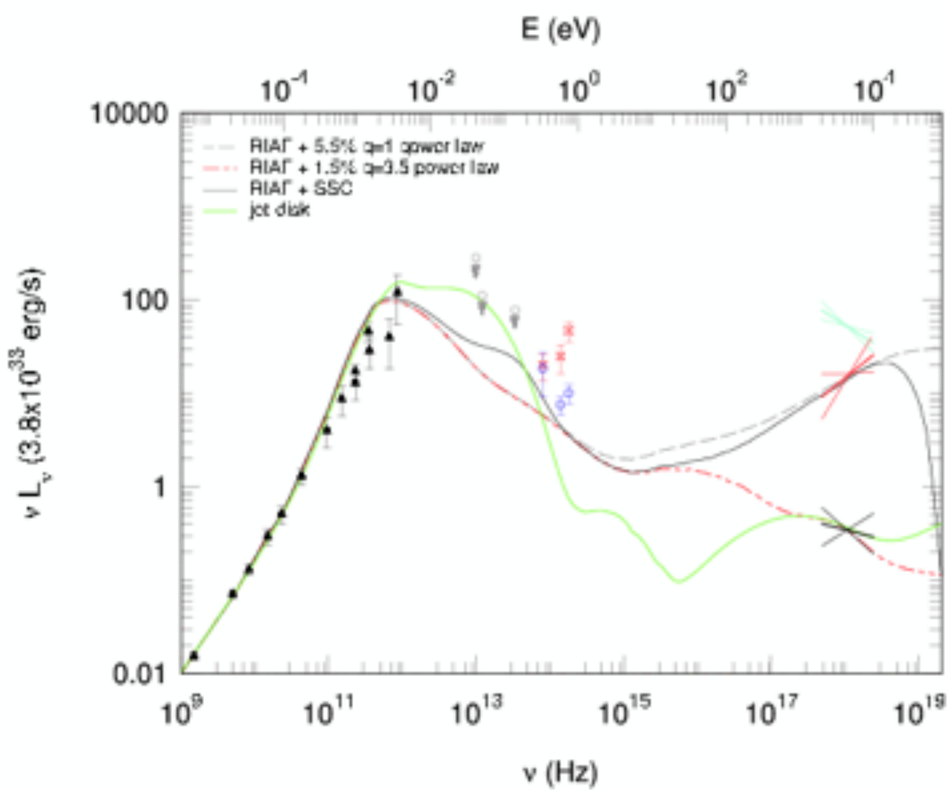

©JAXA

直接的に見ているもの

- 天体の色
- 天体の明るさ
- 天体軌道、周期
- 天体スペクトル
- ドップラー効果(赤方、青方偏移)
- エネルギースペクトル分布(SED)
- ・・・etcetc







「天文学者が」見ているもの

- 天体の絶対光度、色
  →HR図を通した星の分類、年齢、質量推定
- 天体軌道、周期
  →ケプラー則による星の質量推定
- 天体スペクトル、ドップラー効果
  →天体の構成元素探索、初期星の質量推定
- エネルギースペクトル分布
  →銀河質量推定、ブラックホール質量推定

「天文学者が」見ているもの

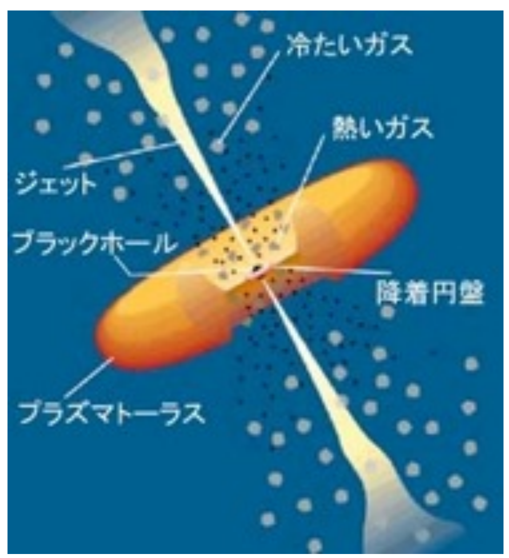
- 天体の絶対光度、色
  →HR図を通した星の分類、年齢、質量推定
- 天体軌道、周期
  →ケプラー則による星の質量推定
- 天体スペクトル、ドップラー効果
  →天体の構成元素探索、初期星の質量推定
- エネルギースペクトル分布
  →銀河質量推定、ブラックホール質量推定

天体質量は天文学における最重要物理量！

質量が分かると

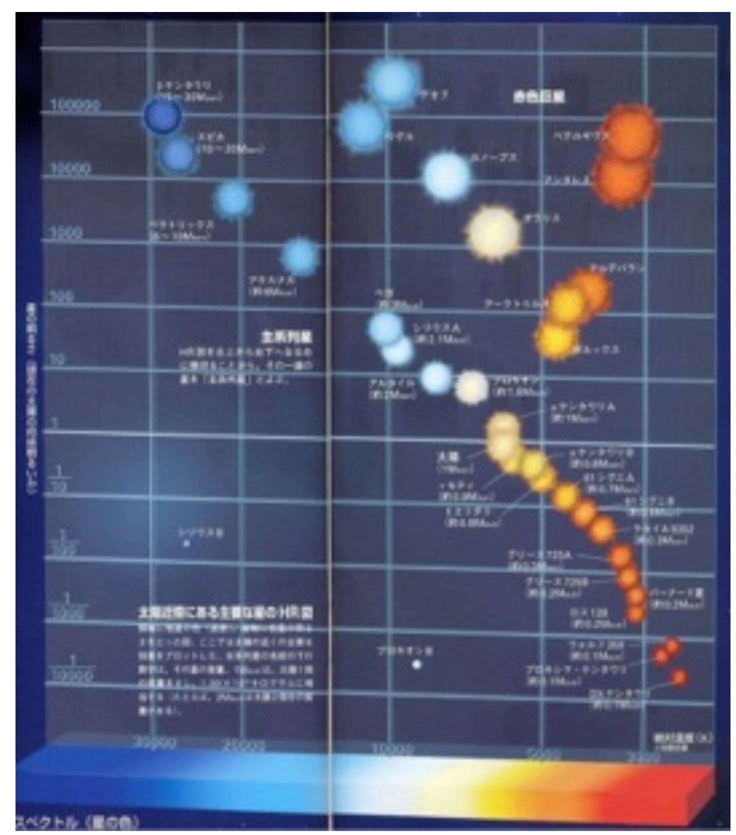
天体の性質が分かる

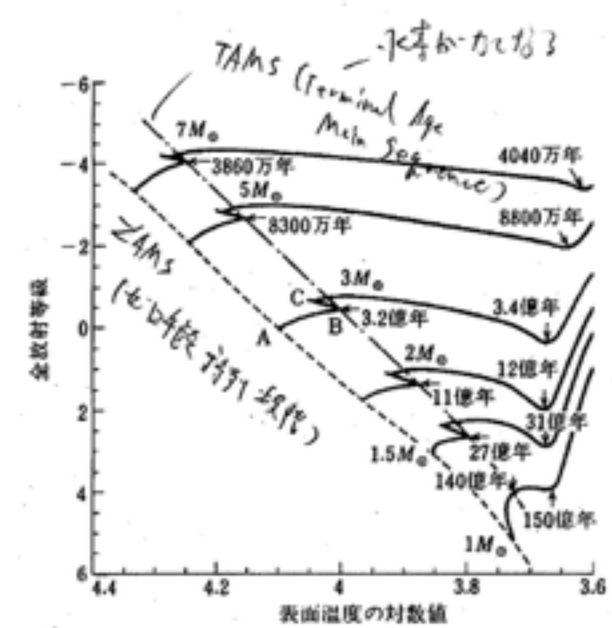
恒星質量
ブラックホール



大質量
ブラックホール

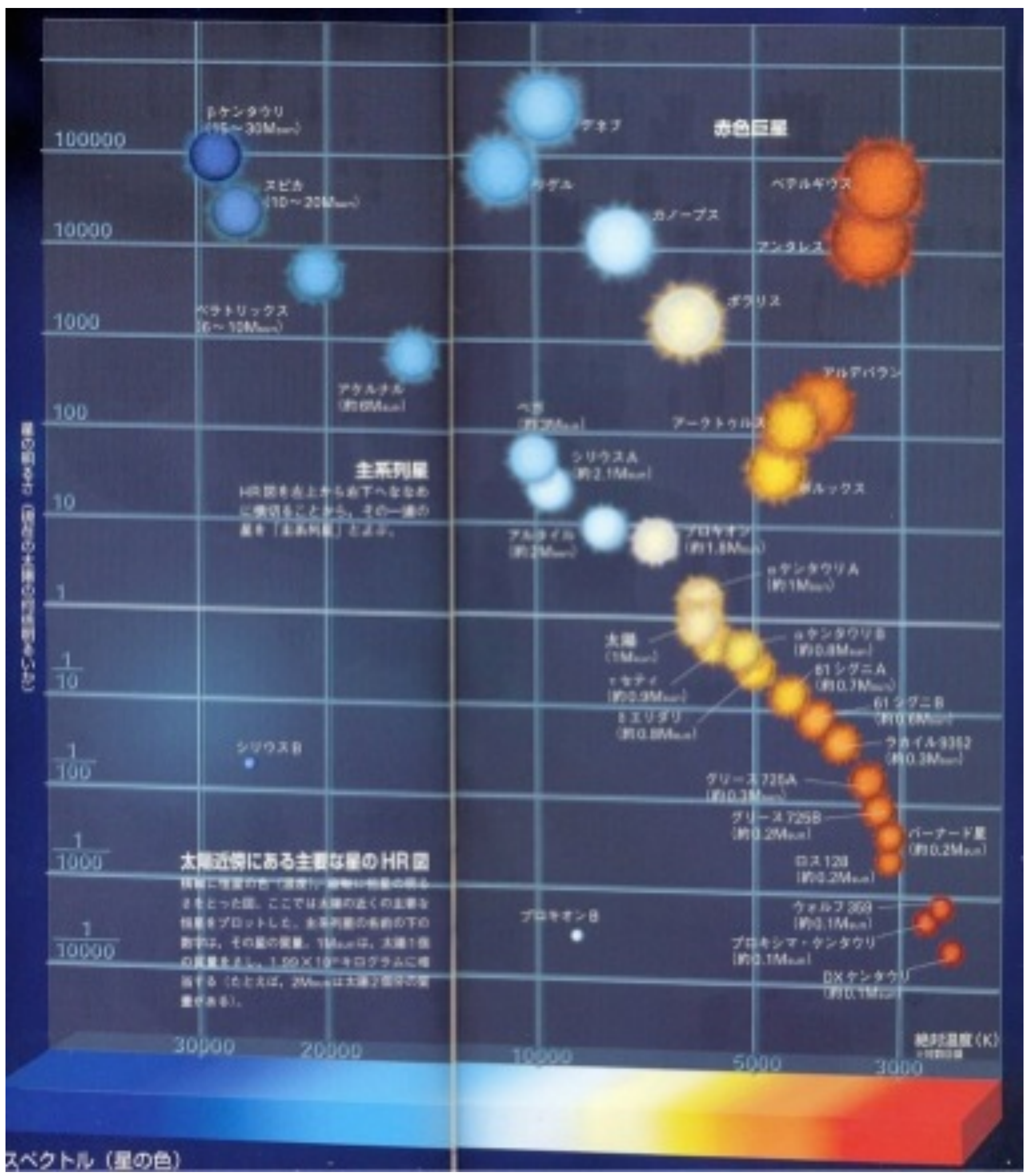
天体の進化が分かる



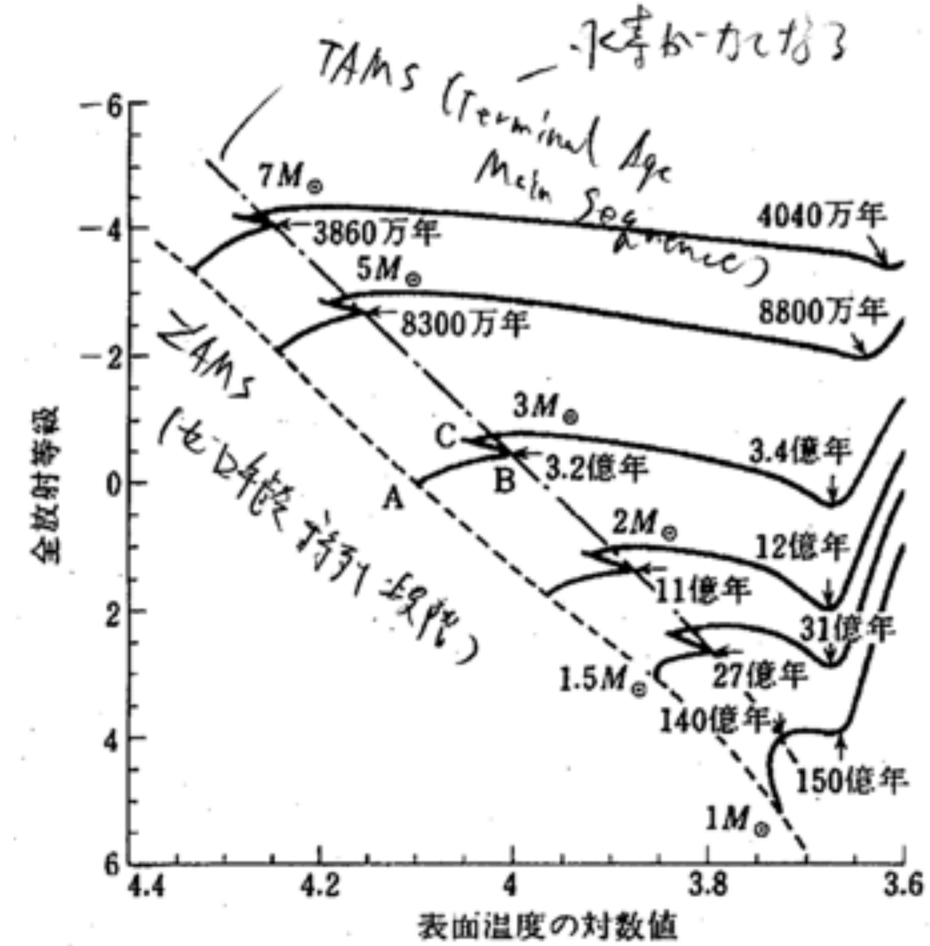


質量推定法:HR図

天体の絶対等級



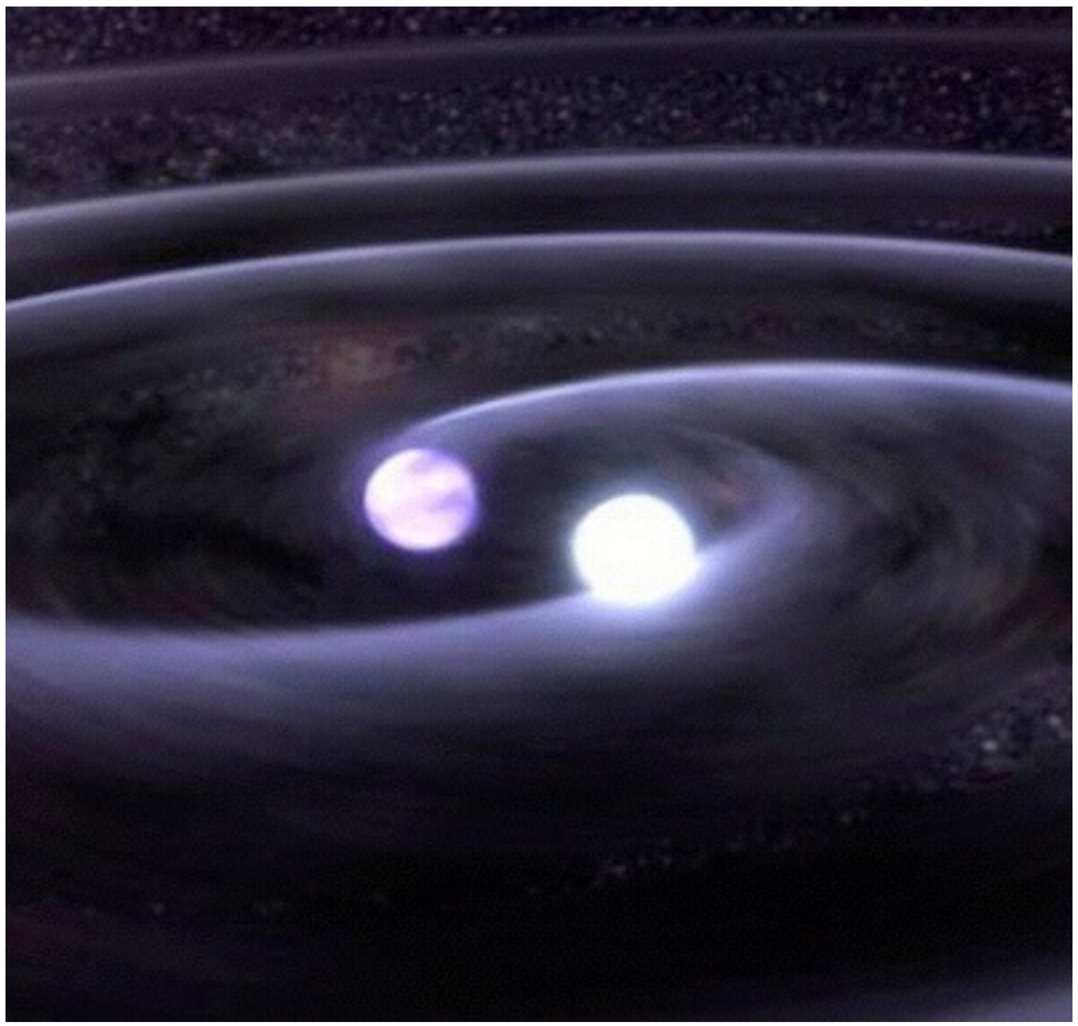
天体の色



間接検出

質量推定法:連星

ケプラー則、ドップラー効果



cf:中性子星連星

$$\frac{G(M_1+M_2)}{a^3}=\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2$$

$$\frac{(M_2\sin\iota)^3}{(M_1+M_2)^2}=\frac{Pv^3}{2\pi G}$$

P : 周期　v : 視線速度

ドップラー効果より

直接検出

質量推定法:降着円盤

ケプラー則、ドップラー効果

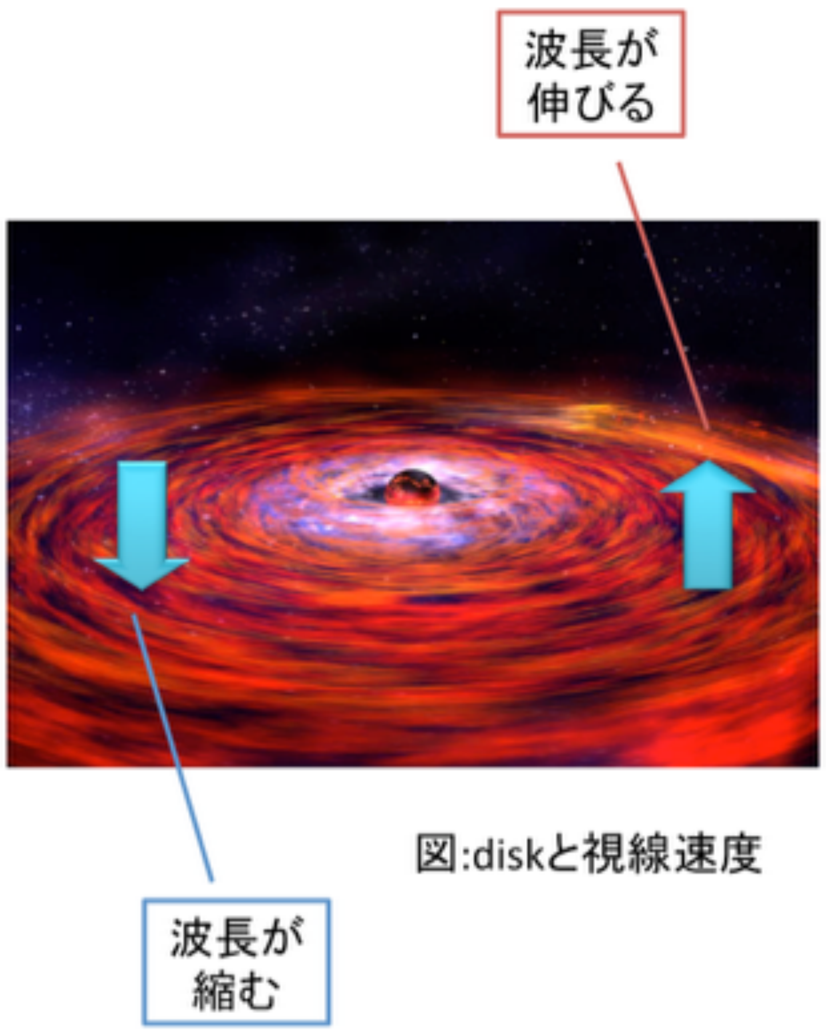
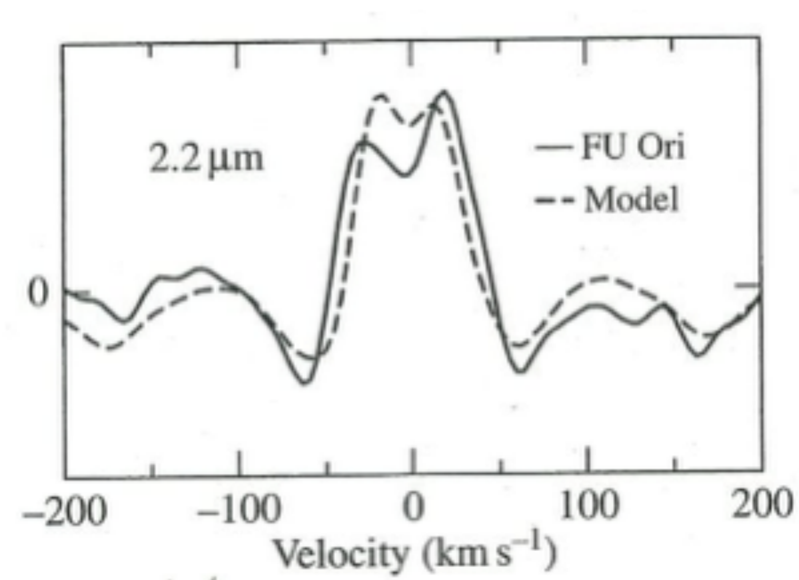


図:diskと視線速度

$$M \sin^2 \iota = \frac{a}{G} v^2$$

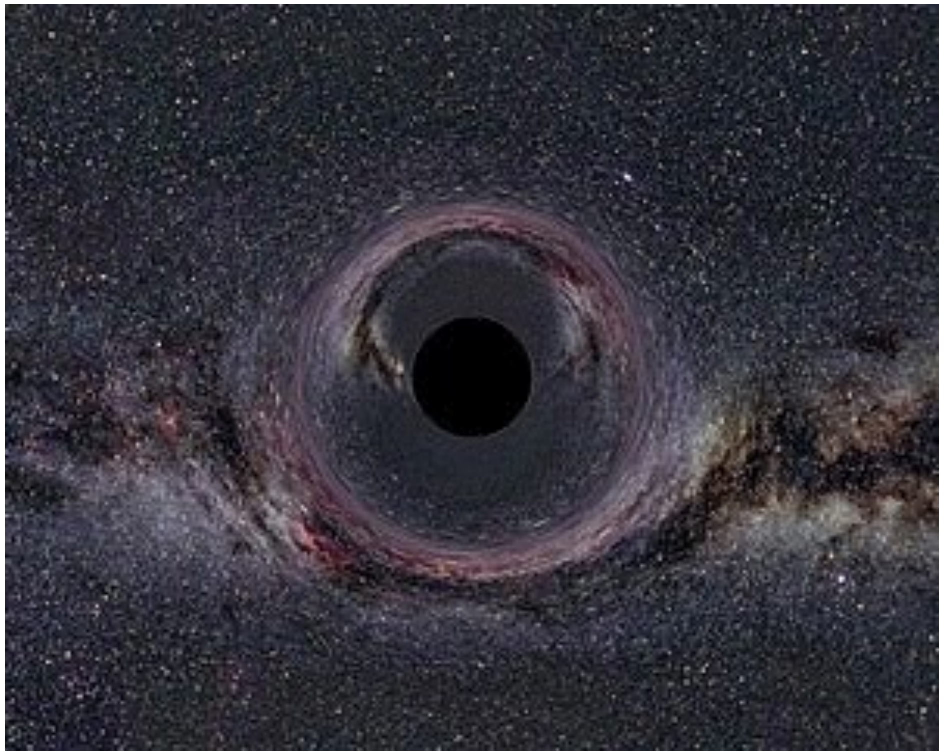


cf:初期星、ブラックホール

直接検出

以上！

「孤立」天体の質量直接検出



周りに物差しとなる物が存在しないので

光天文学では原理的に不可能

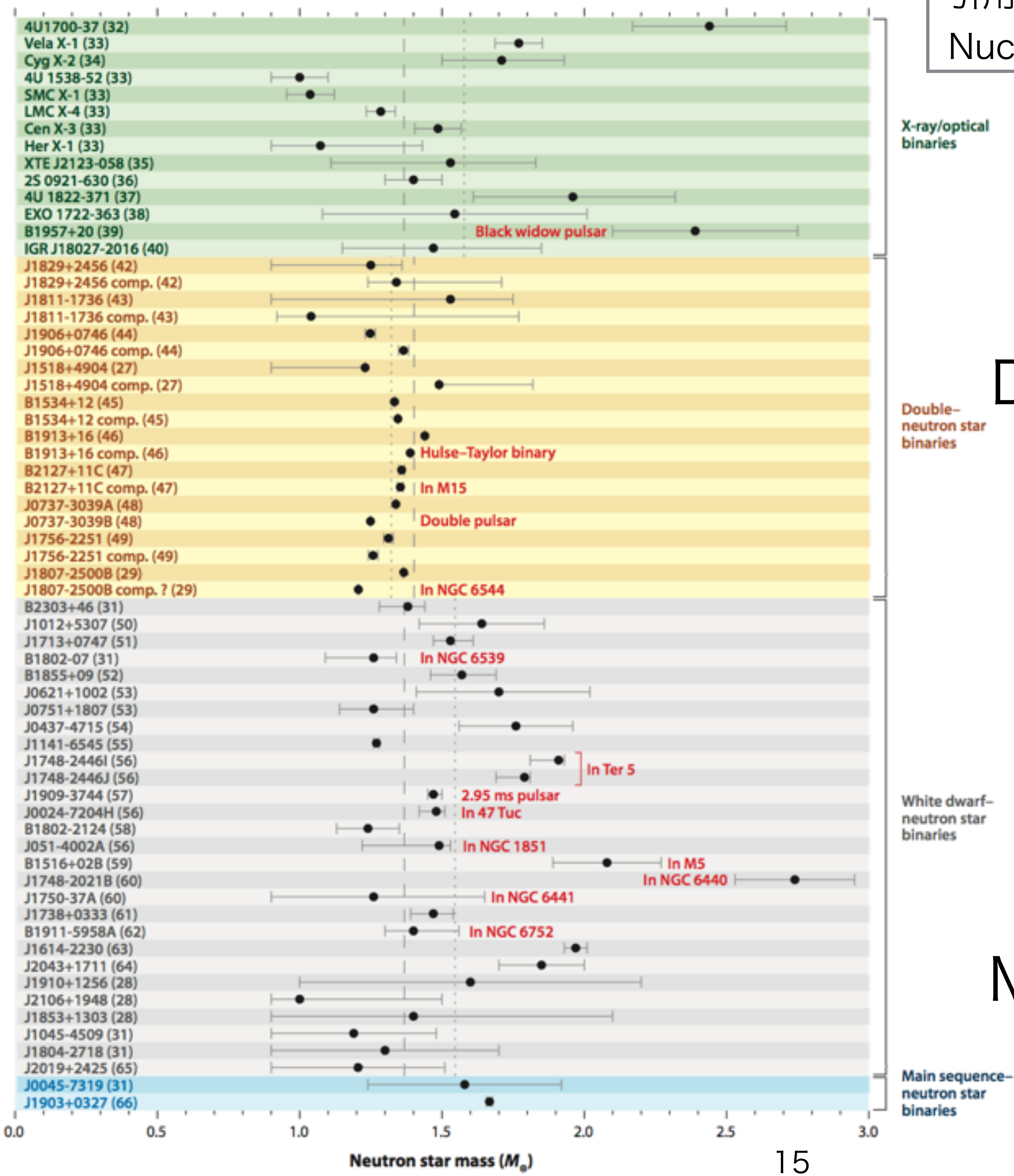
→重力波天文学では・・・？

Abstract

- 孤立中性子星は、自転による非対称運動により重力波を放出し、放出された重力波は、孤立中性子星の強い重力場により位相が歪められる。
- 孤立中性子星からの重力波モードは最低次のmass modeとしてwobble modeとquadrupole modeがあり、それぞれ位相の歪み方が異なる。
- wobble modeとquadrupole modeの歪められた位相差を見ることで、光学天文学ではできなかった孤立中性子星の重力場の情報=天体質量を知ることができることが分かった。
- シミュレーションを行うことにより、将来開発予定の第3世代重力波干渉計、Einstein Telescopeを用いることにより、孤立中性子星において質量を直接測定できる可能性があることを示した。
- 天体距離1kpc、回転周波数300Hz、1.4M_{solar}の中性子星において、50%の天体は20%の質量誤差で検出可能である。

Motivation

引用: J. M. Lattimer, Annual Review of Nuclear and Particle Science 62, 485



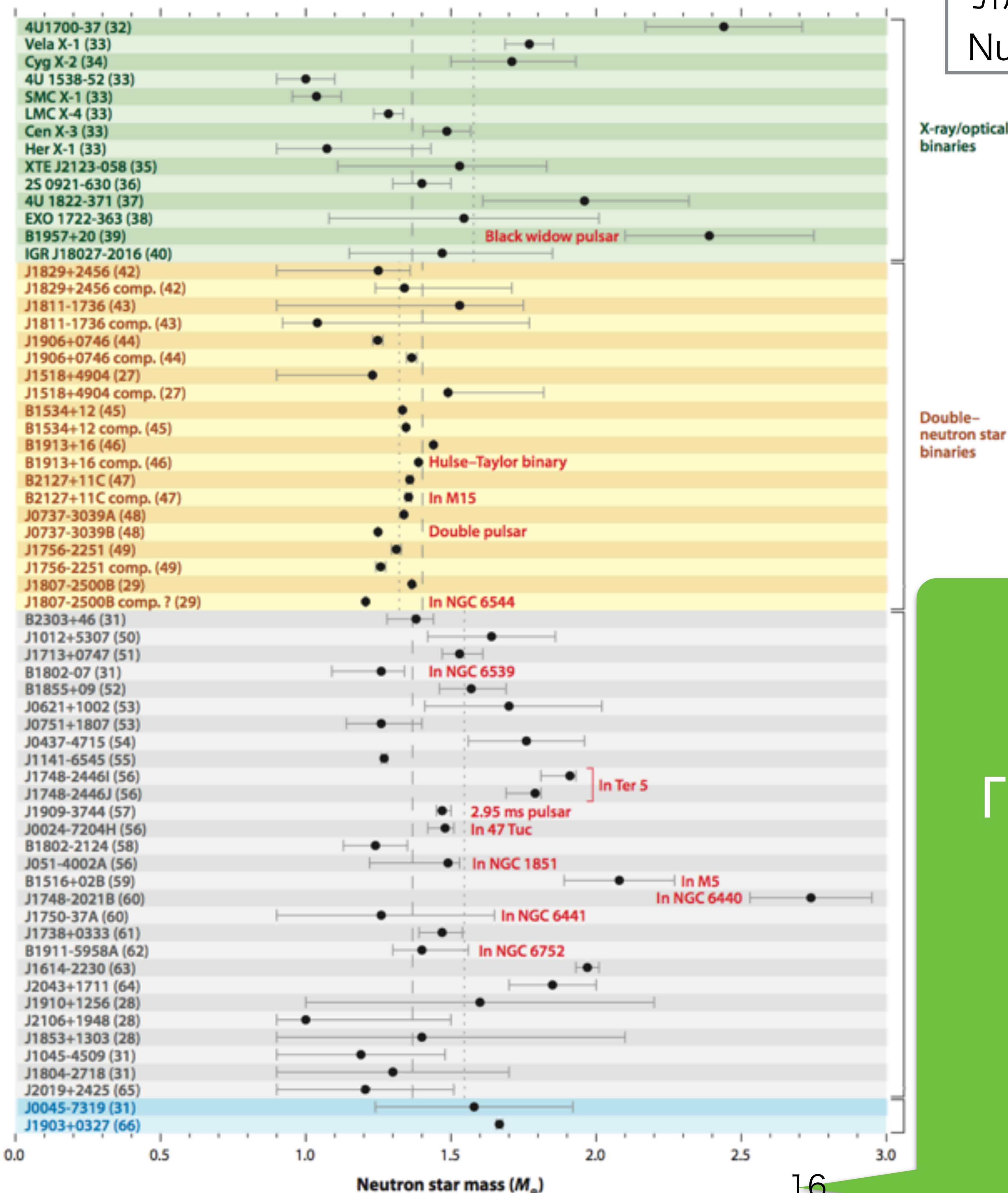
X-ray/optical binaries

Double neutron star binaries

White dwarf-neutron star binaries

Main sequence star-neutron star binaries

引用: J. M. Lattimer, Annual Review of Nuclear and Particle Science 62, 485



X-ray/optical binaries

Double neutron star binaries

ここに
「孤立」中性子星の
質量の測定結果
を加える

中性子星観測で得たい情報は何か？

→ 中性子星の状態方程式

複数ある状態方程式のモデルのどれが正しいかを調べる

・中性子星の内部構造
・高エネルギー物理学
・核物理学

etc…

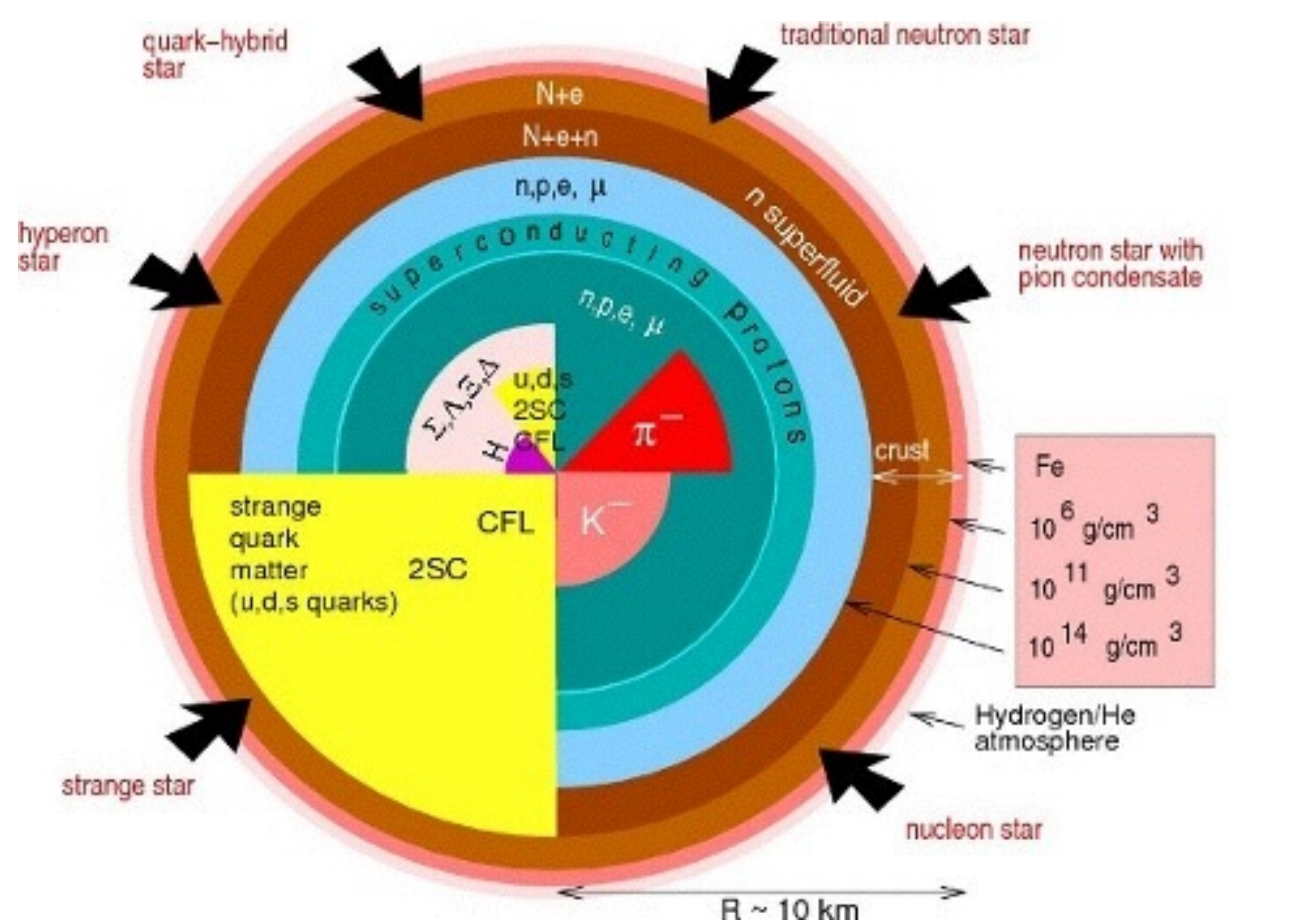
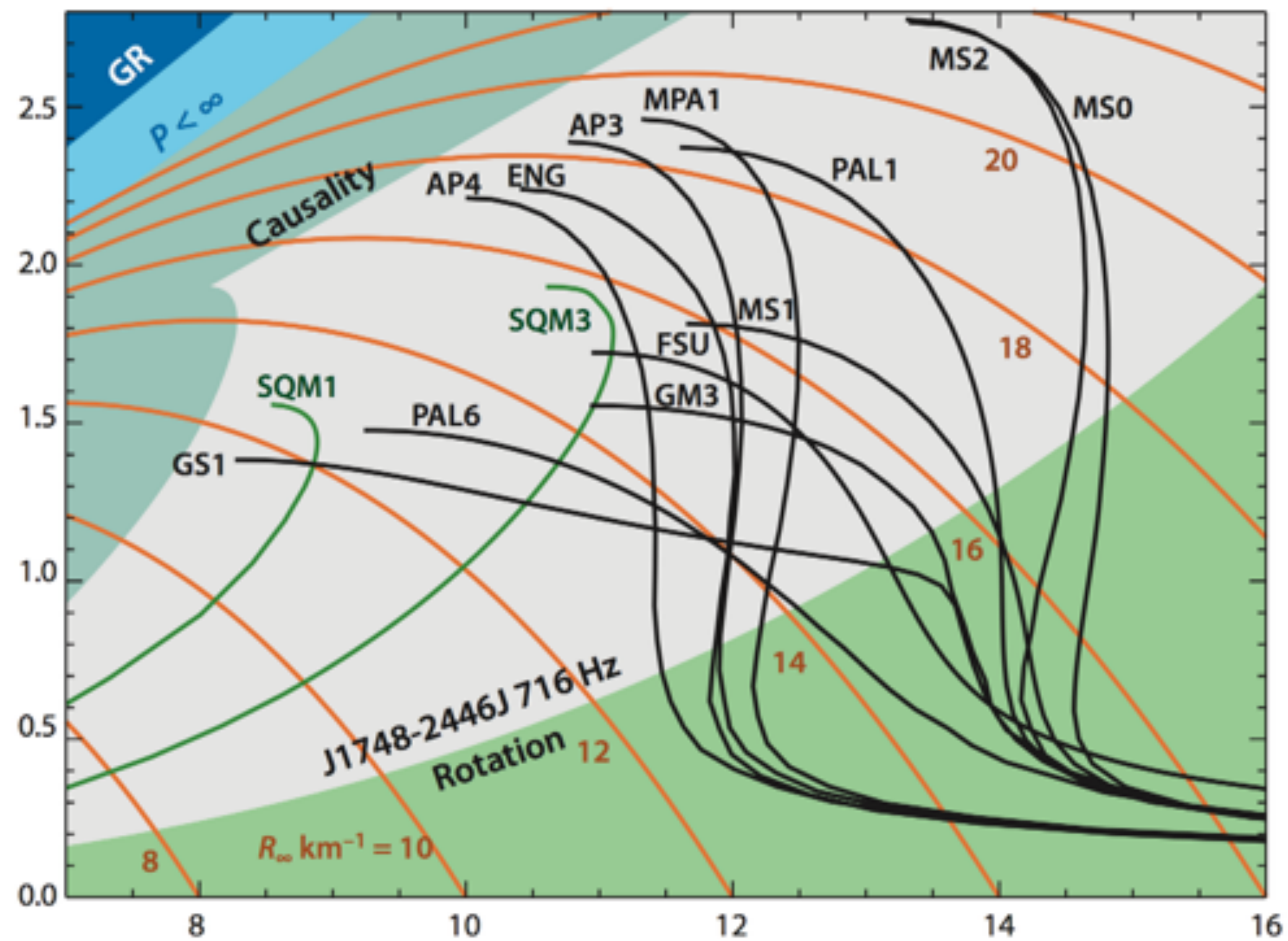


図:http://www.ct.infn.it/home/burgio/index.php/2-uncategorised

状態方程式の”観測”



質量(Msolar)

半径(km)

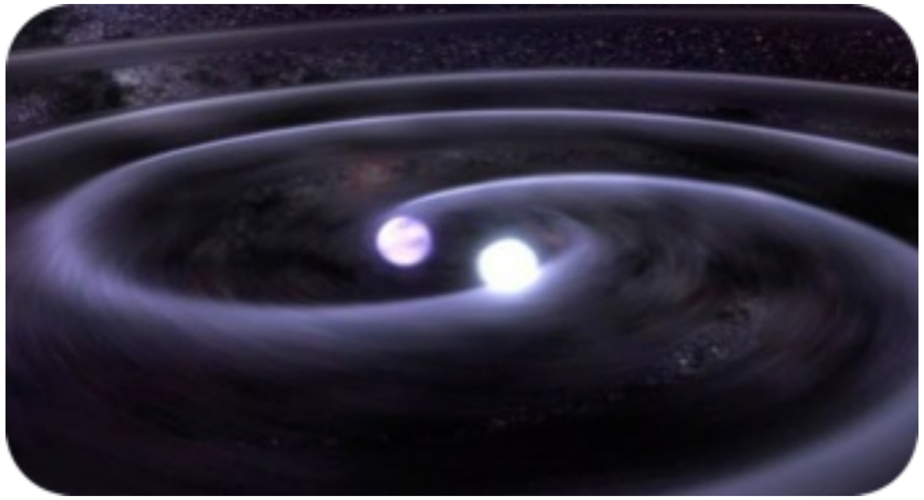
図: J. M. Lattimer, Annual Review of Nuclear and Particle Science 62, 485

状態方程式の違いは
中性子星の質量 半径の
関係に現れる

中性子星の
質量
の観測は、モデルの制限に
非常に重要となる。

光学天文学では
孤立天体の質量測定は不可能
→サンプル少

中性子星「連星」の
質量 半径 観測手法



- neutron star binary coalescence

  中性子星連星の衝突合体を重力波で観測

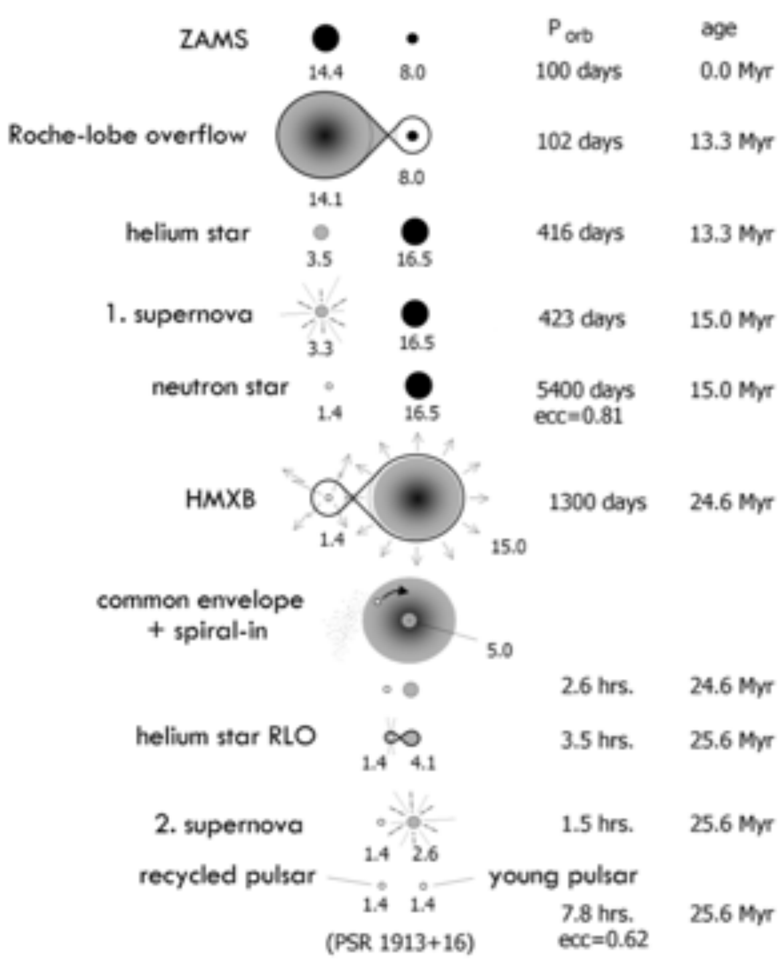
衝突前後を厳密にモデル化可能
パラメター毎のテンプレートを作り観測と比べることで
厳密にパラメターを決めることができる

→ **質量 半径**

中性子星の進化過程

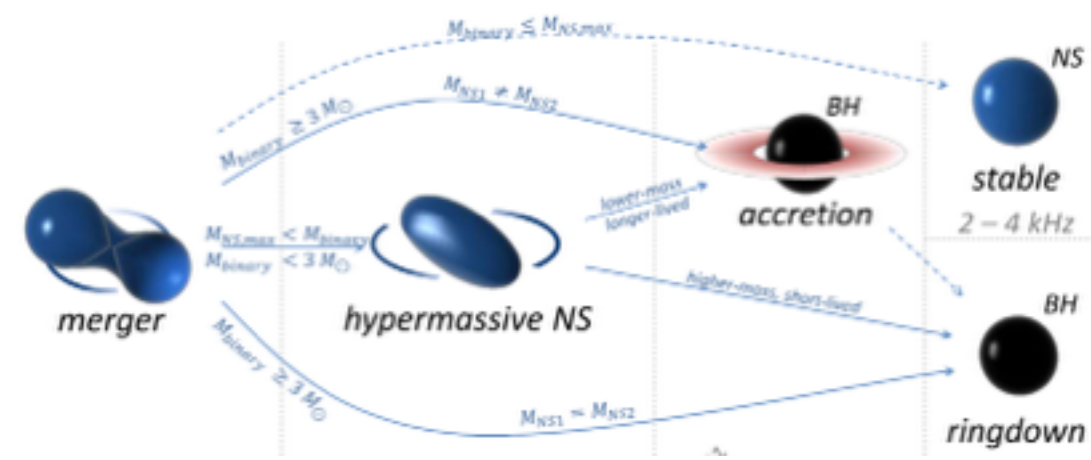
連星中性子星と進化が異なる

連星中性子星



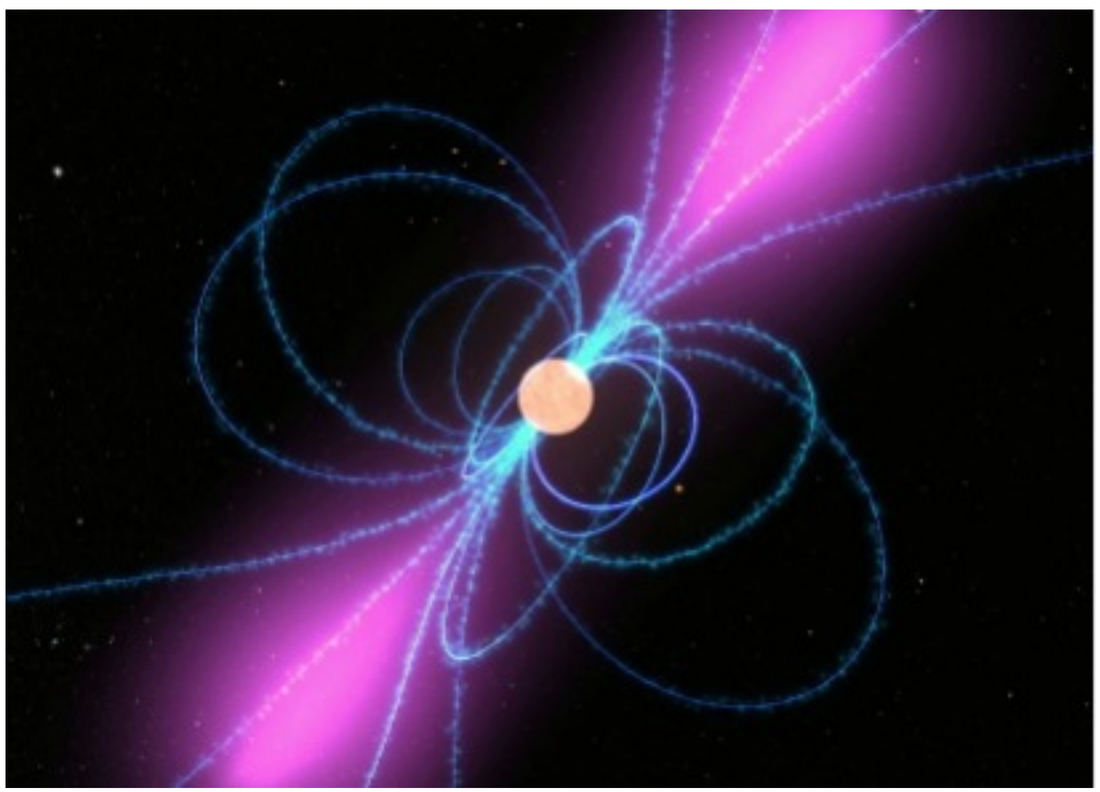
Formation and evolution of compact stellar X-ray sources arXiv:astro-ph/0303456

孤立中性子星



How Gravitational-wave Observations Can Shape the Gamma-ray Burst Paradigm arXiv:astro-ph/1212.2289

連続重力波放射



・歳差運動
・pinning superfluid

により

２つのmass modeを放出

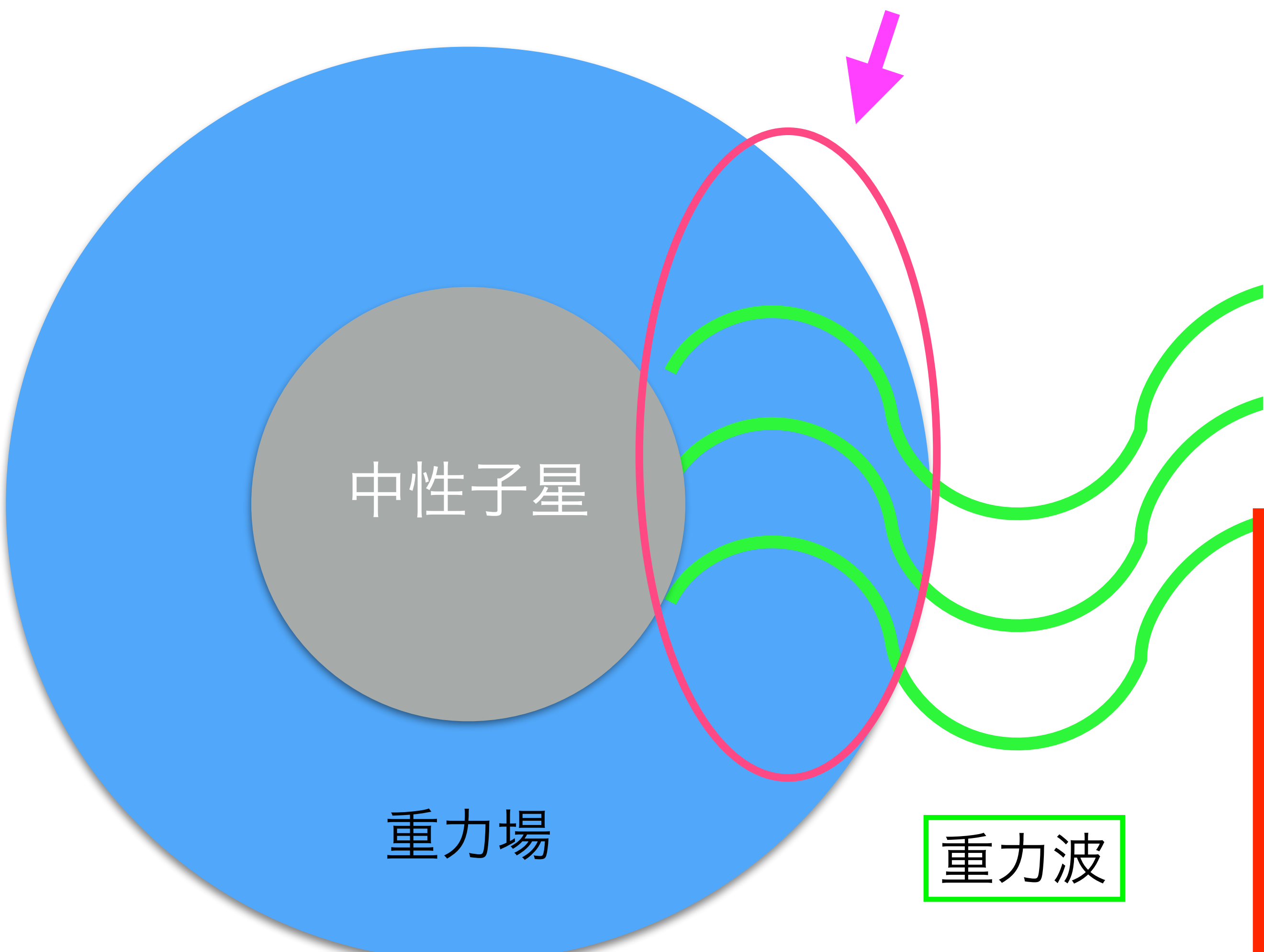
・wobble mode
・quadrupole mode

連続重力波放射の
重力場による位相の歪み

重力波は中性子星の
重力場で歪められる

$$V = -\frac{GM}{r}$$

位相の歪みに質量の情報が
含まれる可能性



中性子星について、重力波の歪み
の度合いを波動方程式から導出
↓
質量が観測可能であることを証明

クーロン型ポテンシャルの解法による重力波波動方程式

単位系

$$c = G = 1$$

クーロン型ポテンシャル
波動方程式

$$G^{\mu}_{\nu} = 8\pi T^{\mu}_{\nu}$$

$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$　ハーモニックゲージ(時空の歪みに張り付く座標系)に変換

$$(\eta^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\beta})\bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} = -16\pi\Theta^{\mu\nu} + \bar{h}^{\mu\alpha}_{,\beta}\bar{h}^{\nu\beta}_{,\alpha}$$

where $\bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$

$\Theta^{\mu\nu} \equiv (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{LL})$

重力ポテンシャル(最低次の重力摂動)の効果を波動方程式に取り入れる

$$(\Box - \bar{h}^{00}\partial_0\partial_0)\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi S^{\mu\nu}$$

where $S^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi}(\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\beta}\bar{h}^{\nu\beta}_{,\alpha} + 2\bar{h}^{0i}\bar{h}^{\mu\nu}_{,0i} + \bar{h}^{ij}\bar{h}^{\mu\nu}_{,ij})$

$$\bar{h}^{00} = \frac{4M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})$$

クーロン型ポテンシャル
のダランベリアン

$$\Box_M \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi\tilde{\tau}^{\mu\nu}$$

$$\Box_M = \left[-\left(1 + \frac{4M}{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right]$$

where

$$\tilde{\tau}^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} - 24\,\frac{1}{16\pi}\left(\bar{h}^{00} - \frac{4M}{r}\right)\bar{h}^{\mu\nu}_{00}$$

reference

H.Asada et.al
PhysRevD.56.R6062

クーロン型ポテンシャル
波動関数の解法

新しいグリーン関数を定義

$$\Box_M \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi\tilde{\tau}^{\mu\nu}$$

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = -16\pi\int d^4x' G_M^+(x,x')\tilde{\tau}^{\mu\nu}(x') \quad \text{where} \quad \Box_M G_M^+(x,x') = \delta^4(x-x')$$

このグリーン関数の一般解を知るためには、
新しい波動方程式に対する斉次方程式を解く

$$\Box_M \Psi = 0$$

一般解

$$\Psi = \mathrm{e}^{-i\omega t} f_l(\rho) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

where $\rho \equiv \omega r$

$Y_{lm}(\theta,\phi)$:球面調和関数

距離と時間がカップリングしているため、
一般解に ρ が含まれる

$$\Box_M = \left[-\left(1+\boxed{\frac{4M}{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}} + \Delta\right]$$

Spherical coulomb function

$f_l(\rho)$:この波動方程式の動径方向は、以下の方程式を満たす

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+1+\frac{4M\omega}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\tilde{f}_l(\rho)=0 \quad \text{where} \qquad \tilde{f}_l(\rho)\equiv\rho f_l(\rho)$$

この一般解はWhittaker関数によって示されるが、形が複雑になる

→ 無限遠方、近傍における漸近系で表す

$$\tilde{f}_l(\rho) \sim \begin{cases} \exp\left[\pm i\left(\rho-\gamma\ln 2\rho-\frac{1}{2}l\pi-\sigma_l\right)\right]\equiv \mathrm{e}^{\mp i\sigma_l}u_l^{\pm} & \rho\to\infty \\ c_l\rho^{l+1}\equiv F_l(\rho) & \rho\to 0 \end{cases}$$

where $c_l\equiv 2^l\mathrm{e}^{-\pi\gamma/2}\dfrac{|\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!}$ $\sigma_l\equiv\arg\Gamma(l+1+i\gamma)$, $\gamma\equiv -2M\omega$

reference

P. DE A. P. MARTINS

J. Comput. Phys. 41 (1981), 223-230.

波動方程式の解法

クーロン型ポテンシャルのグリーン関数を定義

$$\Box_M \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi\tilde{\tau}^{\mu\nu}$$

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = -16\pi \int d^4x' G_M^+(x,x')\tilde{\tau}^{\mu\nu}(x') \quad \text{where} \quad \Box_M G_M^+(x,x') = \delta^4(x-x')$$

このグリーン関数の一般解を知るためには、新しい波動方程式に対する斉次方程式を解く

$$\Box_M = \left[-\left(1+\frac{4M}{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right]$$

距離と時間がカップリング

$$G_M^+(x,x') = \sum_{lm} \mathrm{e}^{i\sigma_l} \int d\omega sgn(\omega) \Big[\Psi^{+\omega lm}(x)\Psi^{*S\omega lm}(x')\theta(r-r') + \Psi^{S\omega lm}(x)\Psi^{*+\omega lm}(x')\theta(r'-r)\Big]$$

where

$$\Psi^{+\omega lm}(x) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi}}\mathrm{e}^{-i\omega t}\rho^{-1}u_l^+ Y_{lm} \qquad \Psi^{S\omega lm}(x) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi}}\mathrm{e}^{-i\omega t}\rho^{-1}F_l Y_{lm}$$

$$u_l^\pm \equiv \exp\left[\pm i\left(\rho - \gamma \ln 2\rho - \frac{l\pi}{2}\right)\right] \quad F_l \equiv c_l \rho^{l+1} \quad c_l \equiv 2^l \mathrm{e}^{-\pi\gamma/2}\frac{|\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!}$$

$$\sigma_l \equiv \arg\Gamma(l+1+i\gamma) \qquad \gamma \equiv -2M\omega \qquad \rho \equiv \omega r$$

重力ポテンシャルを含めた重力波波動方程式の一般解

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = -16\pi \int d^4x' G^+_M(x,x')\tilde{\tau}^{\mu\nu}(x')$$

$$\begin{aligned}\bar{h}^{\mu\nu} &= -16\pi \sum_{lm} \mathrm{e}^{i\sigma_l} \int d\omega sgn(\omega)\Psi^{+\omega lm}(x) \int \Psi^{S\omega lm*}(x')\tilde{\tau}^{\mu\nu} d^4x' \\ &= -\frac{8}{r}\sum_l \mathrm{e}^{i\sigma_l} \underbrace{\int d\omega e^{-i\omega t}\exp\left[i\left(\rho-\gamma\ln 2\rho-\frac{1}{2}l\pi\right)\right]}_{\text{波動項}} \underbrace{\mathscr{M}_l^{\mu\nu}}_{\text{物質項}}\end{aligned}$$

where $\mathscr{M}_l^{\mu\nu} \equiv \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi)\int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'}\int d^3x' c_l^* \rho'^l Y_{lm}^*(\theta',\phi')\tilde{\tau}^{\mu\nu}(x')$

$$c_l \equiv 2^l \mathrm{e}^{-\pi\gamma/2}\frac{|\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!} \qquad \sigma_l \equiv \arg\Gamma(l+1+i\gamma)$$

$$\gamma \equiv -2M\omega \quad \rho \equiv \omega r$$

中性子星への応用と
重力波の位相差

中性子星への応用

multipole moment (物質項)

$$\mathscr{M}_l^{\mu\nu} \equiv \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) \int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} \int d^3x' c_l^* \rho'^l Y_{lm}^*(\theta',\phi') \tilde{\tau}^{\mu\nu}(x')$$

→ 応用のため、この式を変形する

・Conditions 中性子星の内部重力は比較的小さい

①重力ポテンシャル以外の摂動は
エネルギー運動量テンソルより十分小さい

$$\tilde{\tau}^{\mu\nu} \sim (-g) T^{\mu\nu}$$

②モーメントの最低次のみ取り入れる
→振幅は∝(回転速度/光速)^{2l}で低下

$$l = 0$$

→

$$\boxed{\mathscr{M}_0^{\mu\nu} = -\int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} \frac{c_0^*}{4\pi} \int d^3x' T^{\mu\nu}(x').}$$

中性子星の運動と
エネルギー運動量テンソル

中性子星は

・角度Θで歳差運動
・自転軸方向の主慣性モーメントをI_3
・それ以外の主慣性モーメントは等しい($I_1=I_2$)

$$\int d^3x' T^{ij}(x')$$

中性子星の運動量＝自転＆歳差運動の情報が、慣性モーメントおよび三角関数で表される

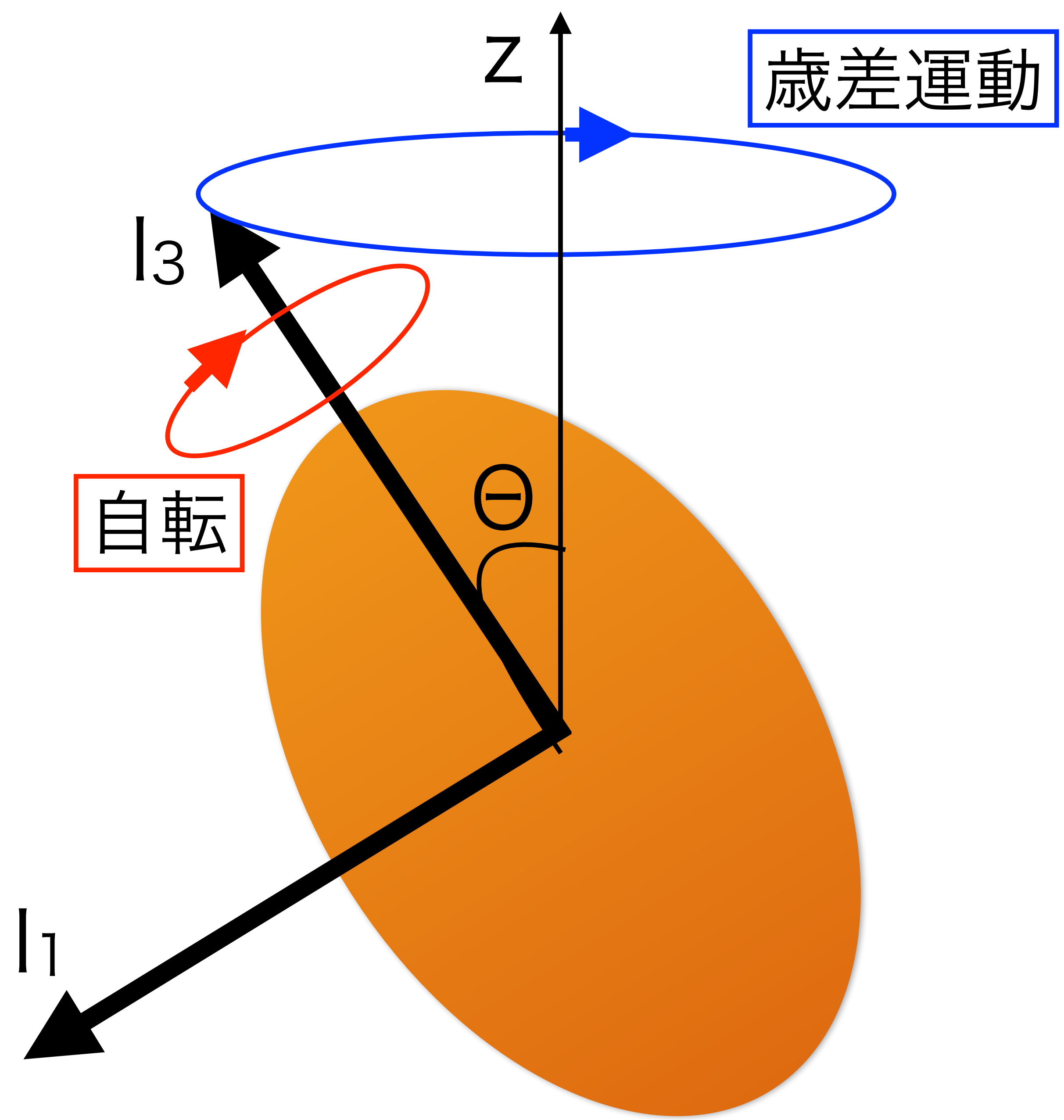


図:想定中性子星の概図

中性子星からの重力波波形

$$\mathscr{M}_0^{\mu\nu} = -\int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} \frac{c_0^*}{4\pi} \boxed{\int d^3x' T^{\mu\nu}(x').}$$

三角関数が時間の関数で含まれる

周波数に対するデルタ関数

$$\bar{h}^{ij} = -\frac{8}{r}\sum_l \mathrm{e}^{i\sigma_l} \int d\omega e^{-i\omega t} \exp\left[i\left(\rho - \gamma \ln 2\rho - \frac{1}{2}l\pi\right)\right] \mathscr{M}_0^{ij}$$

周波数に対するデルタ関数

$$\begin{aligned} \bar{h}^{ij} &= 4\frac{I_1 - I_3}{r} e^{2M\omega_{rot}\pi} |\Gamma(1 - 4iM\omega_{rot})| \omega_{rot}^2 \sin\Theta^2 \begin{pmatrix} \cos\Psi_{rot,2} & \sin\Psi_{rot,2} & 0 \\ \sin\Psi_{rot,2} & -\cos\Psi_{rot,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{I_1 - I_3}{r} e^{M\omega_{rot}\pi} |\Gamma(1 - 2iM\omega_{rot})| \omega_{rot}^2 \sin 2\Theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\Psi_{rot,1} \\ 0 & 0 & \cos\Psi_{rot,1} \\ -\sin\Psi_{rot,1} & \cos\Psi_{rot,1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

quadrupole mode

wobble mode (歳差モード)

$$\Psi_{rot,1} = \left[-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 2r\omega_{rot} + \arg\Gamma(1 - 2iM\omega_{rot})\right],$$

$$\Psi_{rot,2} = 2\left[-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 4r\omega_{rot} + \frac{1}{2}\arg\Gamma(1 - 4iM\omega_{rot})\right],$$

+ mode and x mode

$$h_+ = A_{+,1}\cos\Psi_{rot,1} + A_{+,2}\cos\Psi_{rot,2}$$

$$h_\times = A_{\times,1}\sin\Psi_{rot,1} + A_{\times,2}\sin\Psi_{rot,2}$$

$$A_{+,1} = h_{01}\sin 2\Theta \sin\iota\cos\iota,$$

$$A_{+,2} = 2h_{02}\sin^2\Theta(1+\cos^2\iota),$$

$$A_{\times,1} = h_{01}\sin 2\Theta\sin\iota,$$

$$A_{\times,2} = 4h_{02}\sin^2\Theta\cos\iota$$

$$h_{01} = \frac{I_1 - I_3}{r} e^{M\omega_{rot}\pi}|\Gamma(1-2iM\omega_{rot})|\omega_{rot}^2,$$

$$h_{02} = \frac{I_1 - I_3}{r} e^{2M\omega_{rot}\pi}|\Gamma(1-4iM\omega_{rot})|\omega_{rot}^2$$

$$\Psi_{rot,1} = [-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 2r\omega_{rot} + \arg\Gamma(1-2iM\omega_{rot})],$$

$$\Psi_{rot,2} = 2\left[-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 4r\omega_{rot} + \frac{1}{2}\arg\Gamma(1-4iM\omega_{rot})\right],$$

ι :インクリネーション

M→0の際に、lineared theoryでの重力波波形と一致

→

Consistency OK!

中性子星質量の測定法

Phase

n=1(wobble)
n=2(quadrupole)

$$\Psi_{n=1} = \left[-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 2r\omega_{rot} - 2M\omega_{rot} + \mathcal{O}(M^3\omega_{rot}^3)\right]$$

$$\Psi_{n=2} = 2\left[-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 4r\omega_{rot} - 2M\omega_{rot} + \mathcal{O}(M^3\omega_{rot}^3)\right]$$

$$\longrightarrow \Psi_{n=2} - 2\Psi_{n=1} = 4\underline{M\omega_{rot}}\ln 2 + \mathcal{O}(M^3\omega_{rot}^3)$$

異なる２つのモードの位相差を取ることにより、
重力場の情報＝天体質量を取り出すことができる

Known pulsar searchにおける質量精度のシミュレーション

パラメータ誤差

Known pulsar searchにおいて探索パラメターは6つ

wobble angle　polarization　initial phase

$$\{\Theta, \iota, \psi, h_0, \Phi_0, M_{NS}\}$$

inclination　amplitude　neutron star mass

それぞれのパラメター誤差がカップリングしてしまう
→単純なガウシアンモデルだと標準偏差が求められない

→Inverse fisher matrix method

$$(\Delta\theta_i)_{rms} = \langle(\Delta\theta_i)^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\Gamma^{-1}_{ii}}$$

フィッシャー情報量　$$\Gamma^{ij} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}h(\theta_{\mathbf{max}})\middle|\frac{\partial}{\partial\theta_j}h(\theta_{\mathbf{max}})\right)$$

$$(x|y) \equiv 4Re\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{x}^*(f)\tilde{y}(f)}{S_n(f)}df$$

パラメーター推定法

maximum likelihood method

likelihood function

$$\Lambda(\mathscr{H}_\theta | s) = \frac{p(s|\mathscr{H}_\theta)}{p(s|\mathscr{H}_0)}$$

与えられたパラメーターが真の場合に検出器で得られた信号が真である確率

検出器の信号に重力波信号が入っていない確率

θ : paramters

パラメーターを変化させ、likelihood function が最大の時が尤もらしいパラメーター
→パラメーター推定量

The maximum likelihood method

仮定：検出器のノイズはガウシアンで表現される

$$p(x) \propto \exp\left\{4Re\int_0^\infty \frac{\tilde{x}^*(f)\tilde{x}(f)}{S_h(f)}df\right\} \equiv \mathrm{e}^{-(x|x)/2}$$

$s-h(\theta)$:重力波信号が入っていると仮定した場合ではノイズを示す

$$\ln\Lambda(\mathscr{H}_\theta|s) = \ln\frac{p(s|\mathscr{H}_\theta)}{p(s|\mathscr{H}_0)} = \ln\frac{(s-h(\theta)|s-h(\theta))}{(s|s)} = 2(s|h(\theta)) - (h(\theta)|h(\theta))$$

最大化条件

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\Lambda(\mathscr{H}_\theta|s) = \left(s-h(\theta_{\mathbf{max}})\middle|\frac{\partial}{\partial\theta_i}h(\theta_{\mathbf{max}})\right) = 0$$

$\theta_{\mathbf{max}}$:尤もらしいパラメーター

パラメーターの精度

重力波信号を推定パラメーターの周りでテイラー展開

$$h(\theta) - h(\theta_{max}) = -\Delta\theta_i \frac{\partial h(\theta_{max})}{\partial \theta_i} + \mathcal{O}(\Delta\theta^2)$$

一つのパラメーターの精度

探索パラメーター空間全体の精度の確率密度分布

$$p(\Delta\theta)$$

の分散を求めれば、パラメーターのカップリングを考慮したパラメーターの誤差推定ができる

パラメターの精度計算

Fisher matrixの定義

$$s = h(\theta) + n \quad n$$:検出器のノイズ

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\Lambda(\mathscr{H}_\theta|s) = \left(s - h(\theta_{\mathbf{max}})\middle|\frac{\partial}{\partial\theta_i}h(\theta_{\mathbf{max}})\right) = 0$$

$$\left(h(\theta) - h(\theta_{\mathbf{max}})\middle|\frac{\partial}{\partial\theta_i}h(\theta_{\mathbf{max}})\right) = -\underline{\left(n\middle|\frac{\partial}{\partial\theta_i}h(\theta_{\mathbf{max}})\right)} \equiv \nu^i$$

ガウス分布に従う確率密度分布

$$p(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\det\left(\Gamma^{ij}\right)}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma)^{-1}_{ij}v^i v^j\right]$$

where $\underline{\langle\nu^i\nu^j\rangle} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}h(\theta_{\mathbf{max}})\middle|\frac{\partial}{\partial\theta_j}h(\theta_{\mathbf{max}})\right) \equiv \boxed{\Gamma^{ij}}$

νの分散

Fisher matrix

パラメーターの精度計算

パラメーターとFisher matrix

$$h(\theta) - h(\theta_{max}) = -\Delta\theta_i \frac{\partial h(\theta_{max})}{\partial \theta_i} + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) \; + \; \left(h(\theta) - h(\theta_{\mathbf{max}}) \middle| \frac{\partial}{\partial \theta_i} h(\theta_{\mathbf{max}}) \right) = \nu^i$$

$$\Gamma^{ij}\Delta\theta_j \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} h(\theta_{\mathbf{max}}) \middle| \frac{\partial}{\partial \theta_j} h(\theta_{\mathbf{max}}) \right) \Delta\theta_j = \nu^i$$

代入: $p(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{det}\,(\Gamma^{ij})}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\Gamma)^{-1}_{ij} v^i v^j \right]$

$$p(\Delta\theta) = \sqrt{\frac{\mathrm{det}\Gamma^{ij}}{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \Gamma^{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j \right]$$

$$(\Delta\theta_i)_{rms} = \langle (\Delta\theta_i)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\Gamma^{-1}_{ii}}$$

Fisher matrixの逆行列が分散を示す

中性子星のFisher matrix

$$\Gamma_{ij} \sim \underline{\frac{2}{S_h(f_0)}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_i} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_j} dt + \underline{\frac{2}{S_h(2f_0)}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_i} \frac{\partial h_2}{\partial \theta_j} dt$$

中性子星の場合、重力波は非常にナローバンドであるため、検出器のノイズパワースペクトル密度は積分の外に出すことができる

※h_1、h_2 には干渉計の位置等による重力波信号の補正が含まれている

where

$$h_1 = \sum_{i=1}^{4} A_{1i} h_{1i}, \qquad h_2 = \sum_{i=1}^{4} A_{2i} h_{2i},$$

$$h_{l1} = a(t) \cos l\Phi(t),$$
$$h_{l2} = a(t) \sin l\Phi(t),$$
$$h_{l3} = b(t) \cos l\Phi(t),$$
$$h_{l4} = b(t) \sin l\Phi(t).$$

$$A_{11} = h_{01} \sin\zeta \sin 2\Theta \left[\frac{1}{8} \sin 2\iota \cos 2\psi \cos \Phi_{01} - \frac{1}{4} \sin\iota \sin 2\psi \sin \Phi_{01}\right],$$
$$A_{12} = h_{01} \sin\zeta \sin 2\Theta \left[\frac{1}{4} \sin\iota \cos 2\psi \sin \Phi_{01} + \frac{1}{8} \sin 2\iota \sin 2\psi \cos \Phi_{01}\right],$$
$$A_{13} = h_{01} \sin\zeta \sin 2\Theta \left[-\frac{1}{8} \sin 2\iota \cos 2\psi \sin \Phi_{01} - \frac{1}{4} \sin\iota \sin 2\psi \cos \Phi_{01}\right],$$
$$A_{14} = h_{01} \sin\zeta \sin^2\Theta \left[\frac{1}{4} \sin\iota \cos 2\psi \cos \Phi_{01} - \frac{1}{8} \sin 2\iota \sin 2\psi \sin \Phi_{01}\right],$$
$$A_{21} = h_{02} \sin\zeta \sin^2\Theta \left[\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota) \cos 2\psi \cos 2\Phi_{02} - \cos\iota \sin 2\psi \sin 2\Phi_{02}\right],$$
$$A_{22} = h_{02} \sin\zeta \sin^2\Theta \left[\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota) \sin 2\psi \cos 2\Phi_{02} + \cos\iota \cos 2\psi \sin 2\Phi_{02}\right],$$
$$A_{23} = h_{02} \sin\zeta \sin^2\Theta \left[-\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota) \cos 2\psi \sin 2\Phi_{02} - \cos\iota \sin 2\psi \cos 2\Phi_{02}\right],$$
$$A_{24} = h_{02} \sin\zeta \sin^2\Theta \left[-\frac{1}{2}(1+\cos^2\iota) \sin 2\psi \sin 2\Phi_{02} + \cos\iota \cos 2\psi \cos 2\Phi_{02}\right],$$

$$\begin{aligned} a(t) = {} & \frac{1}{16} \sin 2\gamma (3 - \cos 2\lambda)(3 - \cos 2\delta) \cos[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & - \frac{1}{4} \cos 2\gamma \sin\lambda (3 - \cos 2\delta) \sin[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & + \frac{1}{4} \sin 2\gamma \sin 2\lambda \sin 2\delta \cos[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] \\ & - \frac{1}{2} \cos 2\gamma \cos\lambda \sin 2\delta \sin[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] \\ & + \frac{3}{4} \sin 2\gamma \cos^2\lambda \cos^2\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(t) = {} & \cos 2\gamma \sin\lambda \sin\delta \cos[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & + \frac{1}{4} \sin 2\gamma \sin\delta (3 - \cos 2\lambda) \sin[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] \\ & + \cos 2\gamma \cos\lambda \cos\delta \cos[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\gamma \sin 2\lambda \cos\delta \sin[\alpha - \phi_r - \Omega_r t], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij} \sim \frac{T_0}{2S_h(f_0)} \Bigg[& \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_j} \right) (a\|a) + \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_j} \right) (b\|b) \\
& + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_j} \right) (a\|b) \Bigg] \\
+ \frac{T_0}{2S_h(2f_0)} \Bigg[& \left(\frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_j} \right) (a\|a) + \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_j} \right) (b\|b) \\
& + \left(\frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_j} \right) (a\|b) \Bigg].
\end{aligned}
$$

モンテカルロシミュレーション

質量の精度を求めるには、Fisher matrixを計算する必要

$\boxed{\text{問題:Fisher matrixは一意に決まらない}}$

重力波の観測パラメターには、天体ごとに異なる5つの
フリーパラメターが存在する

$$\{\ \underbrace{\alpha \in [0, 2\pi]}_{\text{right ascension}}, \underbrace{\delta \in [0, \pi]}_{\text{declination}}, \underbrace{\psi \in [0, 2\pi)}_{\text{polarization}}, \underbrace{\iota \in [0, \pi]}_{\text{inclination}}, \underbrace{\Theta \in [0, \pi]}_{\text{wobble angle}}\}$$

→これらのパラメターをランダムだとして複数のFisher matrixの計算を行い、どの程度の天体が質量の検出が可能かを調べる必要

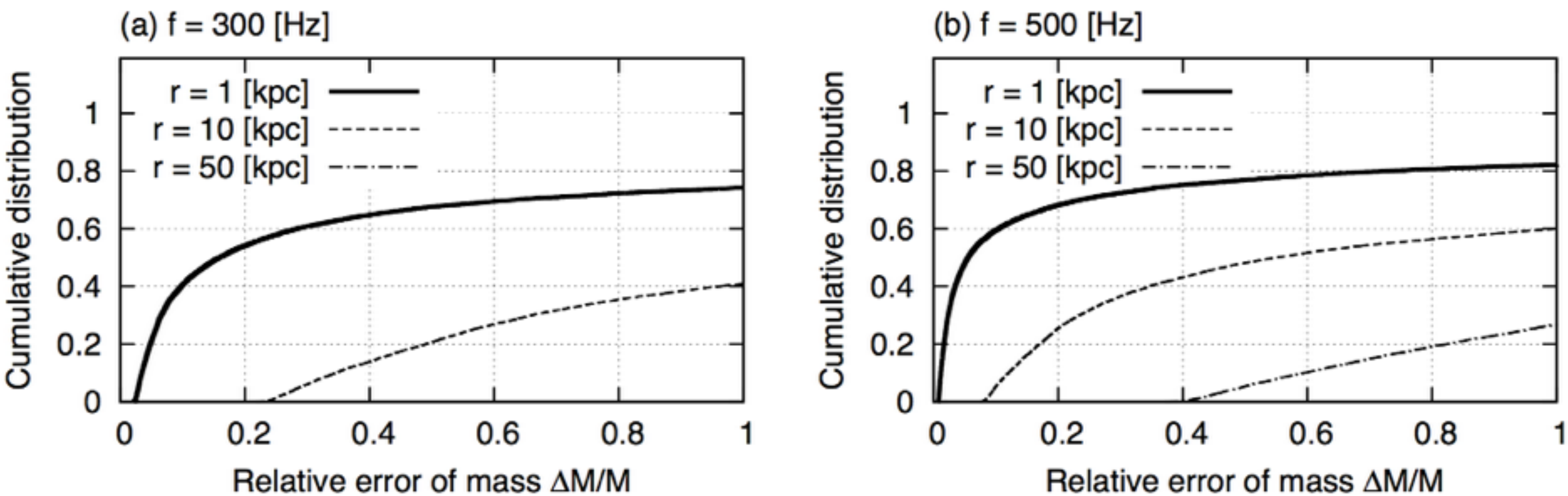
➡ $\boxed{\text{モンテカルロシミュレーションの必要性}}$

どのようなシミュレーションが必要か

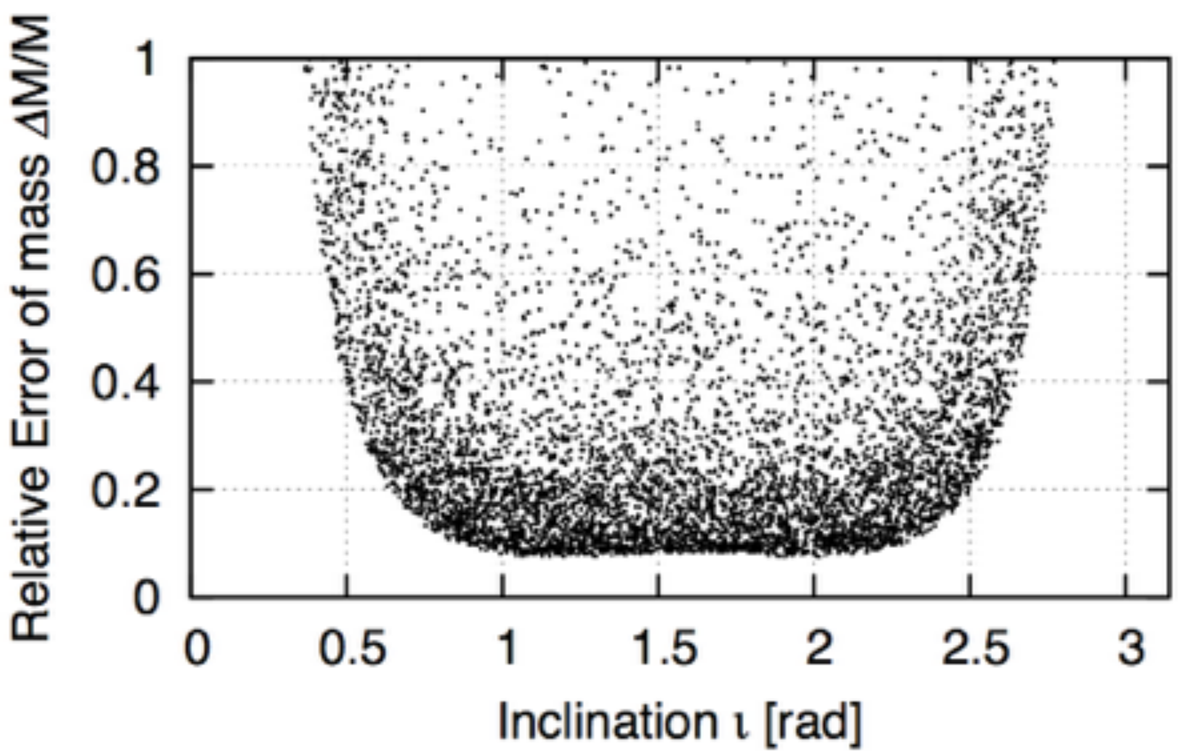
目的:Einstein Telescope(ET)で、現実的な条件のもとと、
中性子星の質量が観測可能かを調べる

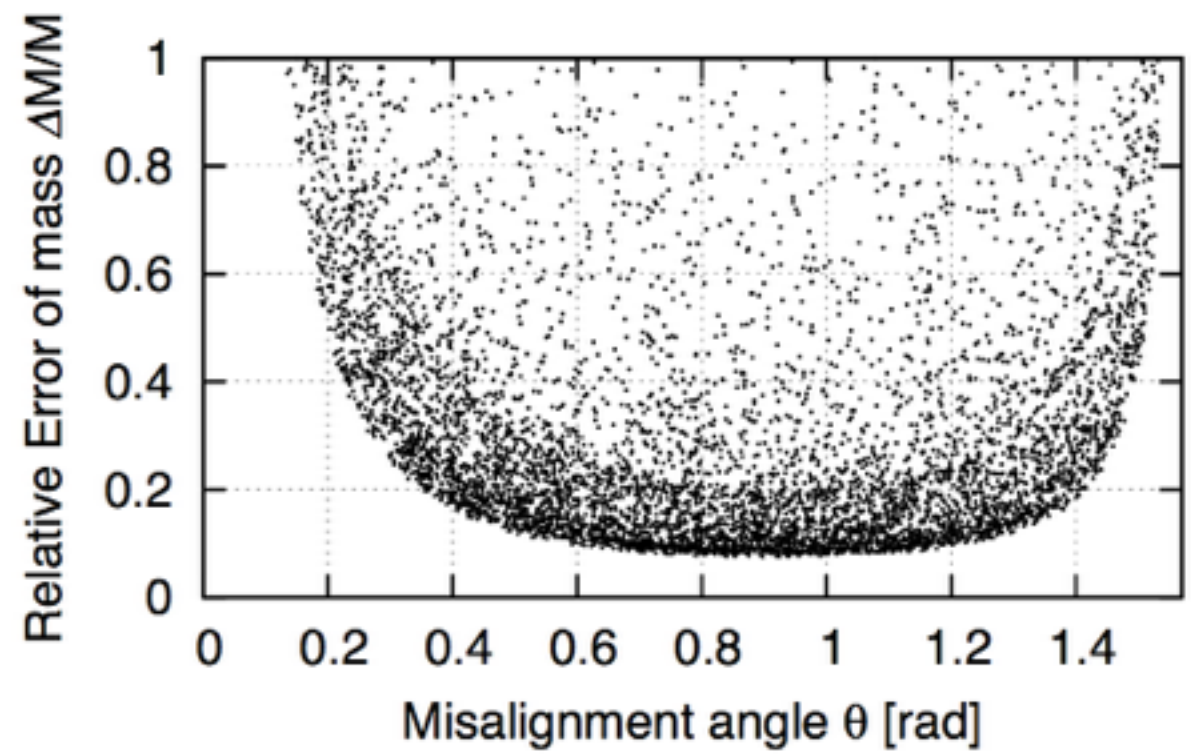
- 積分時間:3年
- 中性子星質量:1.4M_{solar}
- 回転周波数:300Hz、500Hz
- ellipticity:10^{-6}
- 天体距離:1kpc、10kpc、50kpc
- 計算回数:各周波数、距離ごとに10000回

シミュレーション結果
:質量精度



シミュレーション結果
：パラメター依存性





Conclusion＆Summary

- 重力波は天体の重力場の影響を受け、特に位相が歪められて我々まで届く。
- 中性子星の場合は位相差が $\Psi_{n=2} - 2\Psi_{n=1} = 4M\omega_{rot}\mathrm{ln}2 + \mathcal{O}(M^3\omega_{rot}^3)$ で与えられ、孤立中性子星の質量を観測できる事が分かった。
- モンテカルロシミュレーションにより、Einstein Telescopeでは300Hz、1kpcの条件において50%の天体で20%の相対誤差、500Hzの同条件では50%の天体で10%の相対誤差で質量が直接検出できる事が分かった。
- この方法は、孤立天体における質量の観測手法としては唯一の方法である。

Appendix

重力波とは

時空の歪みが伝搬する物理現象

重い物体が周期的で非対称な運動を行うと、周期的で伝搬していく時空の歪みが生じる

↓

重力波

1916年、アインシュタインが重力理論の線形解を求めることにより予言

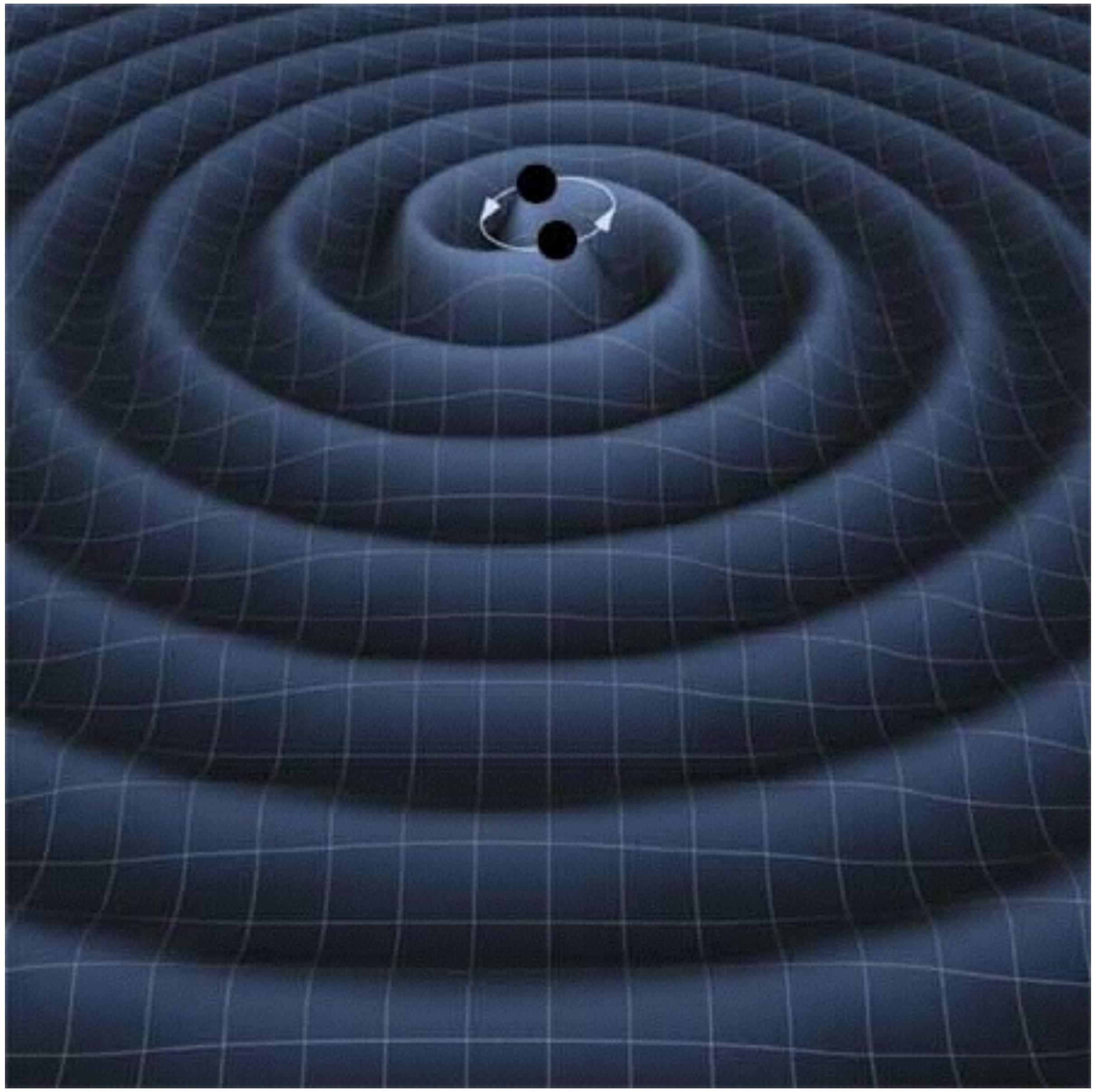


図:合体する寸前のコンパクト連星からの重力波

検出の意義

物理学的側面

唯一の”動的な”重力現象

→一般相対論の検証

天文学的側面

電磁波に比べ、物質透過率が桁違いに高い

→より厳密で詳細な天体現象の観測

Kmクラス干渉計-第2世代

Advanced LIGO

ホスト:米国

本格運用:2017-

デザイン感度達成:2019-

Advanced VIRGO

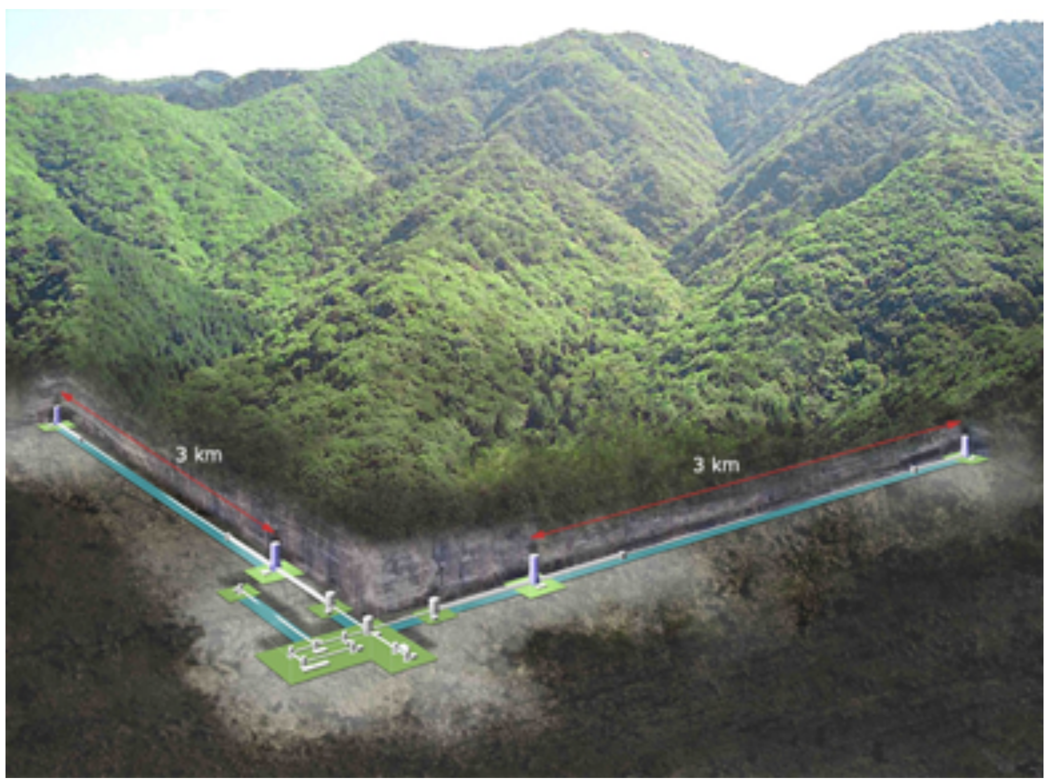
ホスト:イタリア、フランス等

本格運用:2018-

デザイン感度達成:2021-

Kmクラス干渉計-第2.5-3世代

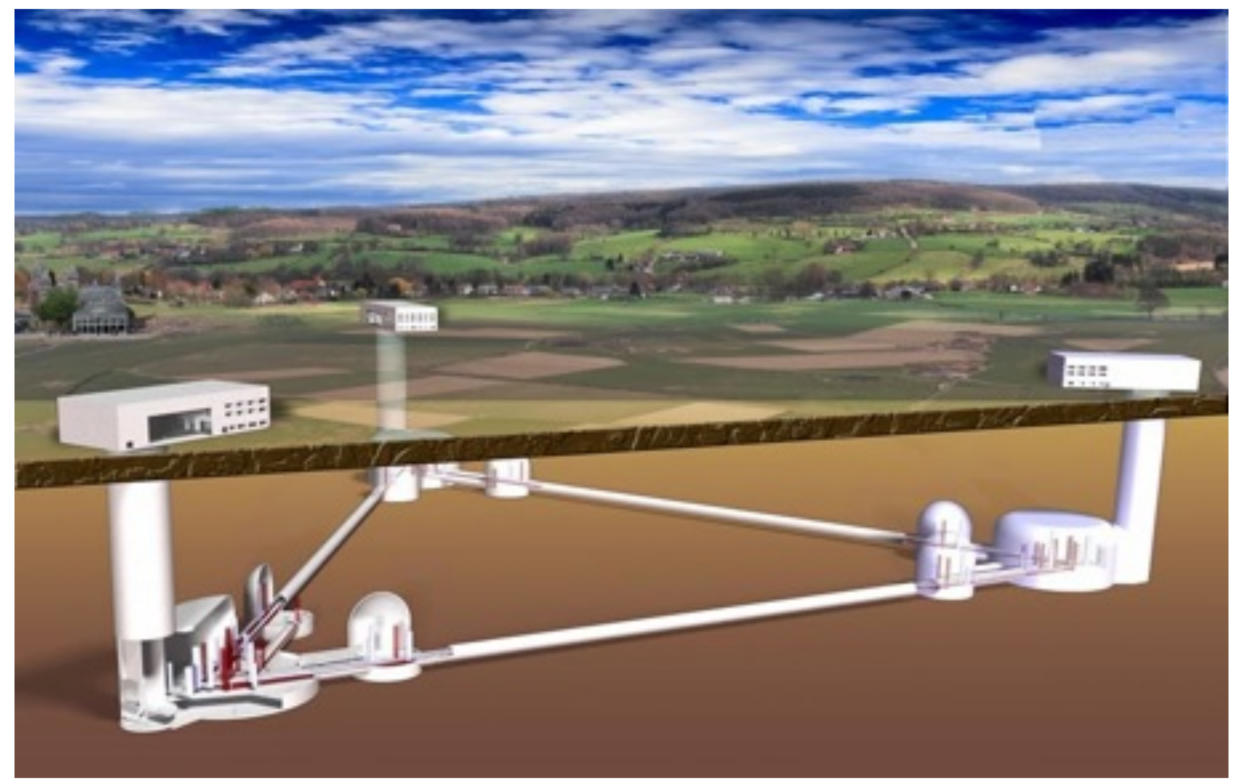
KAGRA



ホスト:日本

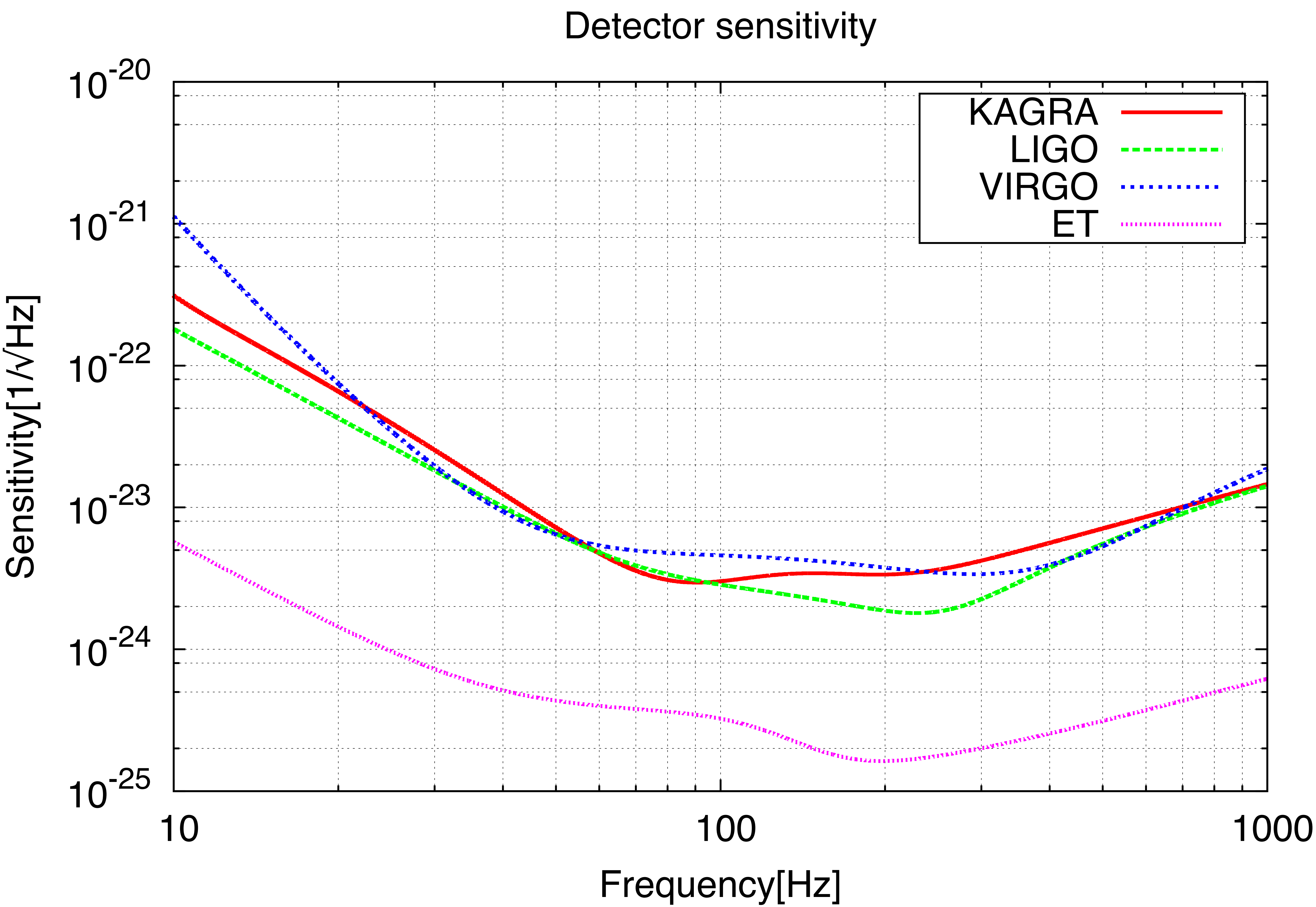
本格運用:2017-

Einstein telescope



ホスト:欧州

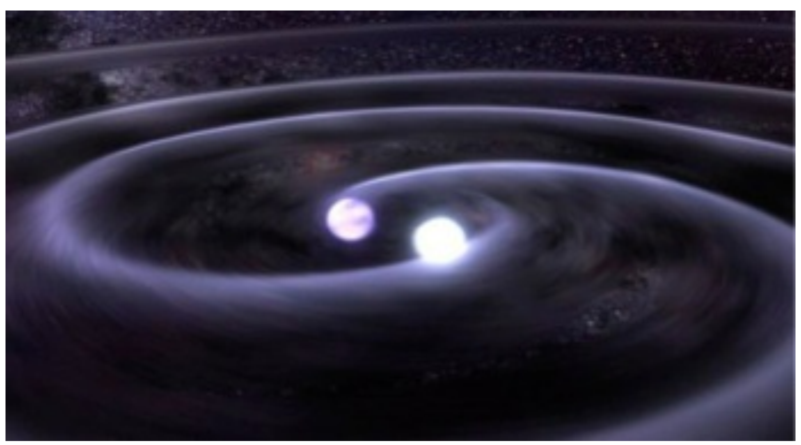
本格運用:2025-2027



Detector sensitivity
KAGRA
LIGO
VIRGO
ET
Sensitivity[1/√Hz]
Frequency[Hz]
10^{-20}
10^{-21}
10^{-22}
10^{-23}
10^{-24}
10^{-25}
10
100
1000

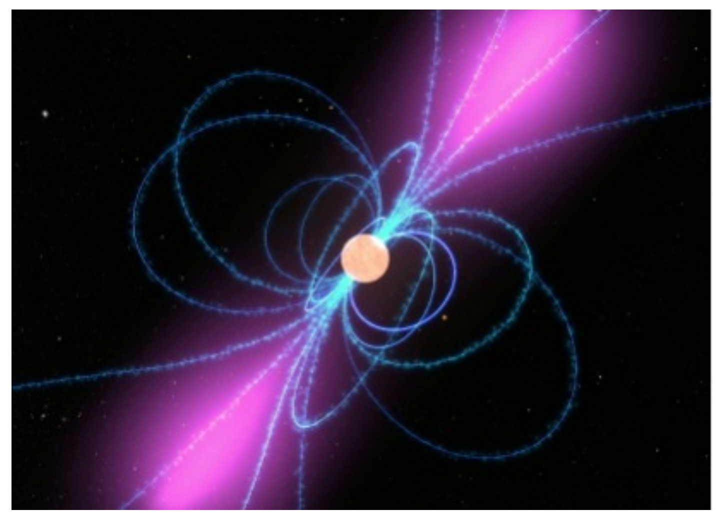
重力波の種類

中性子星の合体衝突



モデル化がされている
突発現象

連続波

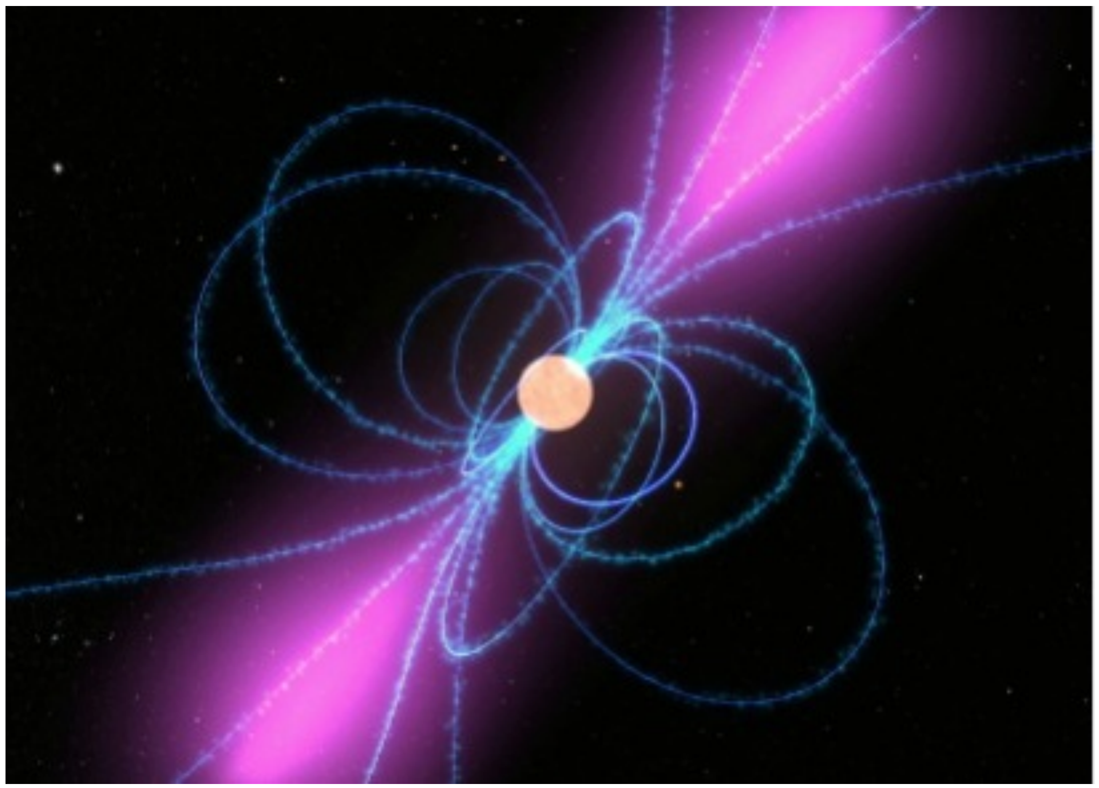


連続的な放射

バースト

モデル化がされていない
突発現象

孤立パルサーからの重力波観測



孤立パルサーは、重力波の直接検出が期待されているもっとも重要な天体の一つである。

孤立系だと、重力波検出により得られる情報が

非常に少ない

・振幅　・天球座標位置　・inclination
・周波数　・polarization　・位相

直接質量、半径が求められない

非対称性のみ重力波放出

重力波放出により、エネルギーが持ち去られる

→系の重力ポテンシャルが時間変化

$$\phi = -G\frac{\int \rho dV}{R}$$ R_0(系の重心と観測者との距離) で展開

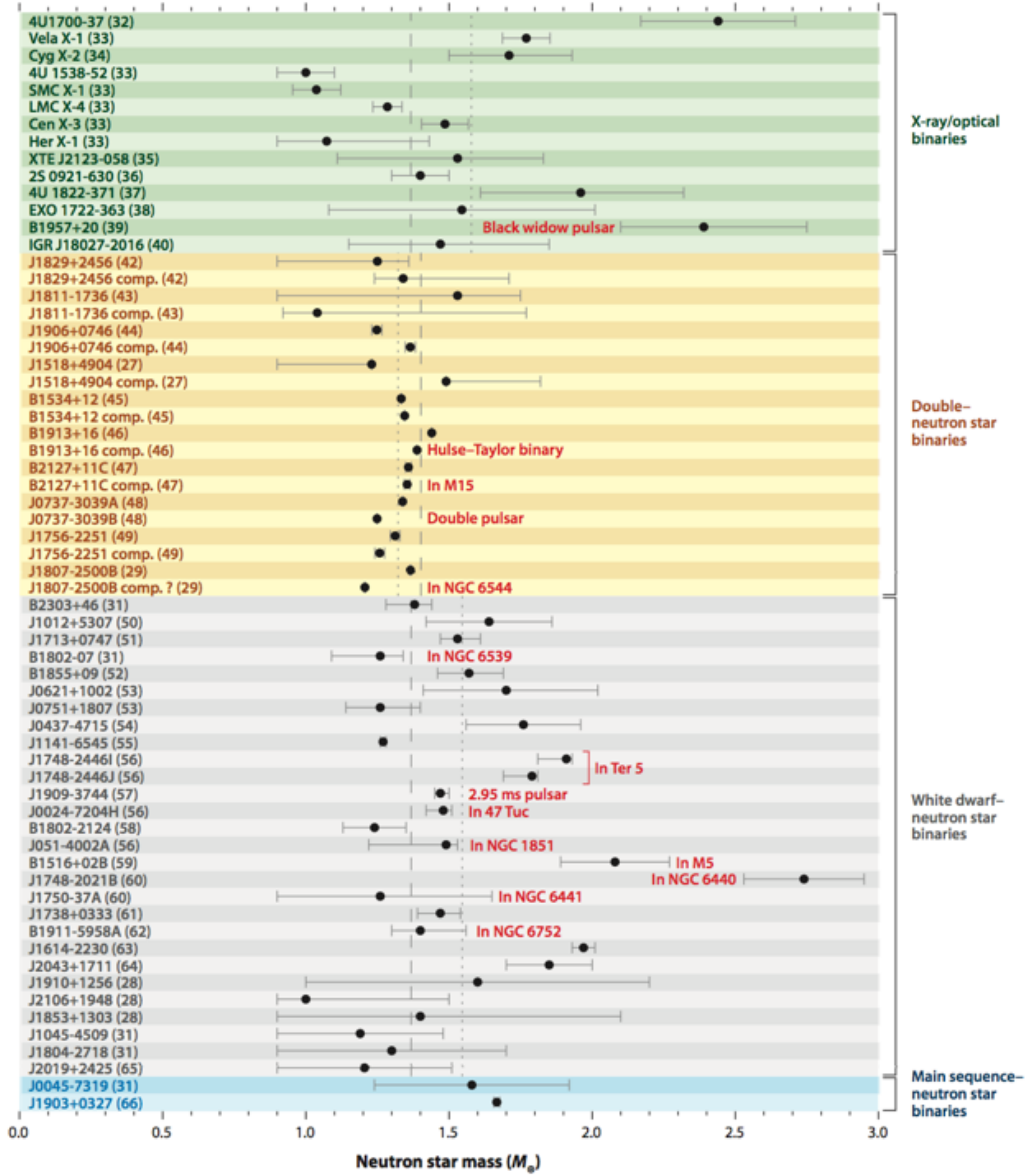
$$= -G\left[\cancel{\frac{M}{R_0}} - \frac{1}{2}\int \rho \cancel{x_\alpha} dV \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{1}{R_0} + \frac{1}{6}\int \rho(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})dV \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0}\cdots\right]$$

$\frac{\partial M}{\partial t} = 0$: 質量保存則　　$\frac{\partial \int \rho x_\alpha dV}{\partial t} = 0$: 運動量保存則

非対称性な運動により

重力波は放出

中性子星の質量



引用: J. M. Lattimer, Annual Review of Nuclear and Particle Science 62, 485

重力波の基礎方程式

アインシュタイン方程式

$$G^{\mu}_{\nu} = 8\pi T^{\mu}_{\nu}$$

計量を陽に書く

$$\partial_\delta\partial_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})(\sqrt{-g}g^{\delta\sigma}) - \partial_\sigma(\sqrt{-g}g^{\mu\delta})\partial_\delta(\sqrt{-g}g^{\nu\sigma}) = 16\pi\Theta^{\mu\nu}$$

where $\Theta^{\mu\nu} \equiv (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{LL})$

Landau-Lifsitz
pseudotensor
(重力場が持つ
エネルギー・運動量)

ハーモニックゲージに変換
→曲がった時空に張り付く座標系

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$$

minkowski metric
平坦時空の計量

$$(\eta^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\beta})\bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} = -16\pi\Theta^{\mu\nu} + \bar{h}^{\mu\alpha}_{,\beta}\bar{h}^{\nu\beta}_{,\alpha}$$

where $\bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$

ハーモニックゲージにおける
重力摂動

reference

The classical theory of field
L D Landau, E.M. Lifshitz

ハーモニックゲージ

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$$

→適当なベクトルにおいて以下が成立

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right)x^\rho = 0$$

→ベクトルのそれぞれの項において

$$\Box\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right)\phi = 0$$

波動方程式＝０→時空のポテンシャルが物質項とはならない

時空の歪みと同じように座標も動く
→時空の歪みにに張り付いた座標系

multipole momentの変換

$$\mathscr{M}_l^{\mu\nu} \equiv \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) \int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} \int d^3x' c_l^* \rho'^l Y_{lm}^*(\theta',\phi') \tilde{\tau}^{\mu\nu}(x') \qquad \tilde{\tau}^{\mu\nu} \sim (-g) T^{\mu\nu}$$

$$\sim \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) \int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} c_l^* \omega^l \int d^3x' r'^l Y_{lm}^*(\theta',\phi') (-g) T^{\mu\nu}$$

$$= -\int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} c_l^* \omega^l N_l^{-1} n^{<L>} I'^{\mu\nu}_{<L>}(x'),$$

STF tensor

$$N_l \equiv \frac{4\pi l!}{(2l+1)!!} \qquad I'^{\mu\nu}_{<L>}(t') \equiv \int d^3x' T^{\mu\nu}(x') x'_{<L>}.$$

※STF tensor: 球面調和関数を直交座標系で表すためのテンソル

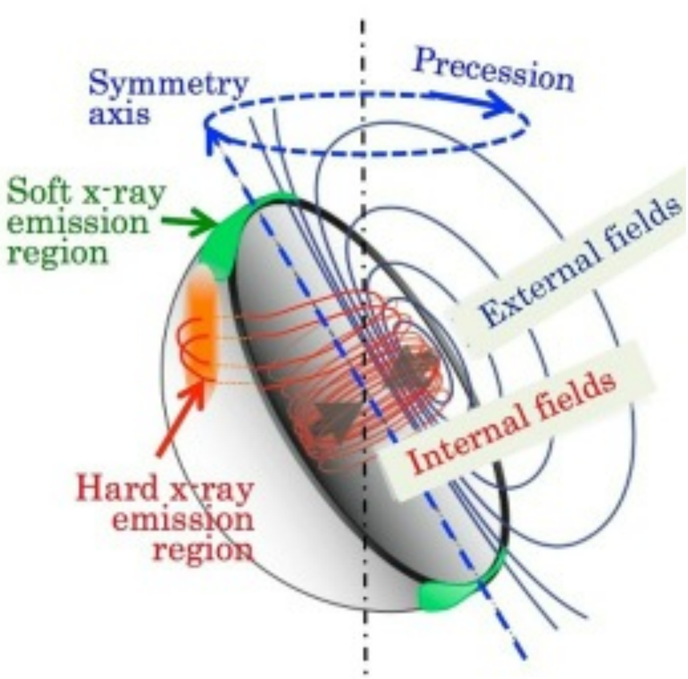
multipole momentの変換

$$\mathscr{M}_l^{\mu\nu} \sim -\int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} c_l^* \omega^l N_l^{-1} n^{<L>} I'^{\mu\nu}_{<L>}(x'),$$

$$l = 0$$

$$\mathscr{M}_0^{\mu\nu} = -\int dt' \mathrm{e}^{i\omega t'} \frac{c_0^*}{4\pi} \int d^3x' T^{\mu\nu}(x').$$

エネルギー運動量テンソルの保存性により、これは天体の慣性モーメントの二階微分を用いて表すことが可能



$$\int d^3x' T^{ij}(x') = -\frac{1}{2}\ddot{I}^{ij},$$

$$I_{11} = \frac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin^2\Theta\cos 2\omega_{rot}t + constant,$$
$$I_{12} = \frac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin^2\Theta\sin 2\omega_{rot}t,$$
$$I_{22} = -\frac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin^2\Theta\cos 2\omega_{rot}t + constant,$$
$$I_{13} = -\frac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin 2\Theta\sin\omega_{rot}t,$$
$$I_{23} = \frac{1}{2}(I_1 - I_3)\sin 2\Theta\cos\omega_{rot}t,$$
$$I_{33} = constant,$$

Application to our condition

・We consider a known pulsar search

$\rightarrow h_{l1} \sim h_{l4}$ is not contained the derivative parameters

・The rotational frequency is faster

→The scalar product has good approximation as follows

$$(h_{l1}\|h_{l1}) \sim (h_{l3}\|h_{l3}) \sim \frac{(a\|a)}{2}$$

$$(h_{l2}\|h_{l2}) \sim (h_{l4}\|h_{l4}) \sim \frac{(b\|b)}{2}$$

$$(h_{l1}\|h_{l3}) \sim (h_{l2}\|h_{l4}) \sim \frac{(a\|b)}{2}$$

$$(x\|y) \equiv \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y(t)dt,$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij} \sim \frac{T_0}{2S_h(f_0)} \Bigg[& \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_j} \right) (a \| a) + \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_j} \right) (b \| b) \\
& + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{13}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{14}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{12}}{\partial \theta_j} \right) (a \| b) \Bigg] \\
+ \frac{T_0}{2S_h(2f_0)} \Bigg[& \left(\frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_j} \right) (a \| a) + \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_j} \right) (b \| b) \\
& + \left(\frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{23}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{21}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial A_{24}}{\partial \theta_i} \frac{\partial A_{22}}{\partial \theta_j} \right) (a \| b) \Bigg].
\end{aligned}
$$

検出できる重力波振幅

$$\epsilon \equiv \frac{I_1 - I_3}{I_3}$$

$$h_{01} = \epsilon I_3 \mathrm{e}^{M\omega_{rot}\pi} |\Gamma(1 - 2iM\omega_{rot})| \omega_{rot}^2$$

$$h_{02} = \epsilon I_3 \mathrm{e}^{2M\omega_{rot}\pi} |\Gamma(1 - 4iM\omega_{rot})| \omega_{rot}^2$$

$$I_3 \sim 10^{45} cm^2 g$$

$$h_{01} \sim h_{02} \sim 10^{-27}$$

$$\Rightarrow$$

$$\epsilon \sim 10^{-6}$$

Motivation

- 孤立パルサーからの重力波の直接検出が近い未来に期待されている
- 中性子星において知りたい情報は状態方程式
- 状態方程式は質量と半径に現れる→物理量の観測の必要性
- 連星中性子星では質量の観測手段はあるが、現実に多く存在する孤立パルサーでは存在しない
- 重力波は重力場により歪められ、そこに質量が関与する→重力波観測により孤立パルサーでも質量を観測することができるのではないか

グリーン関数の一般解

$$G_M^+(x,x') = \sum_{lm} \mathrm{e}^{i\sigma_l} \int d\omega sgn(\omega) \Big[\Psi^{+\omega lm}(x)\Psi^{*S\omega lm}(x')\theta(r-r') + \cancel{\Psi^{S\omega lm}(x)\Psi^{*+\omega lm}(x')\theta(r'-r)} \Big]$$

$$|x| \gg |x'|$$

observer source

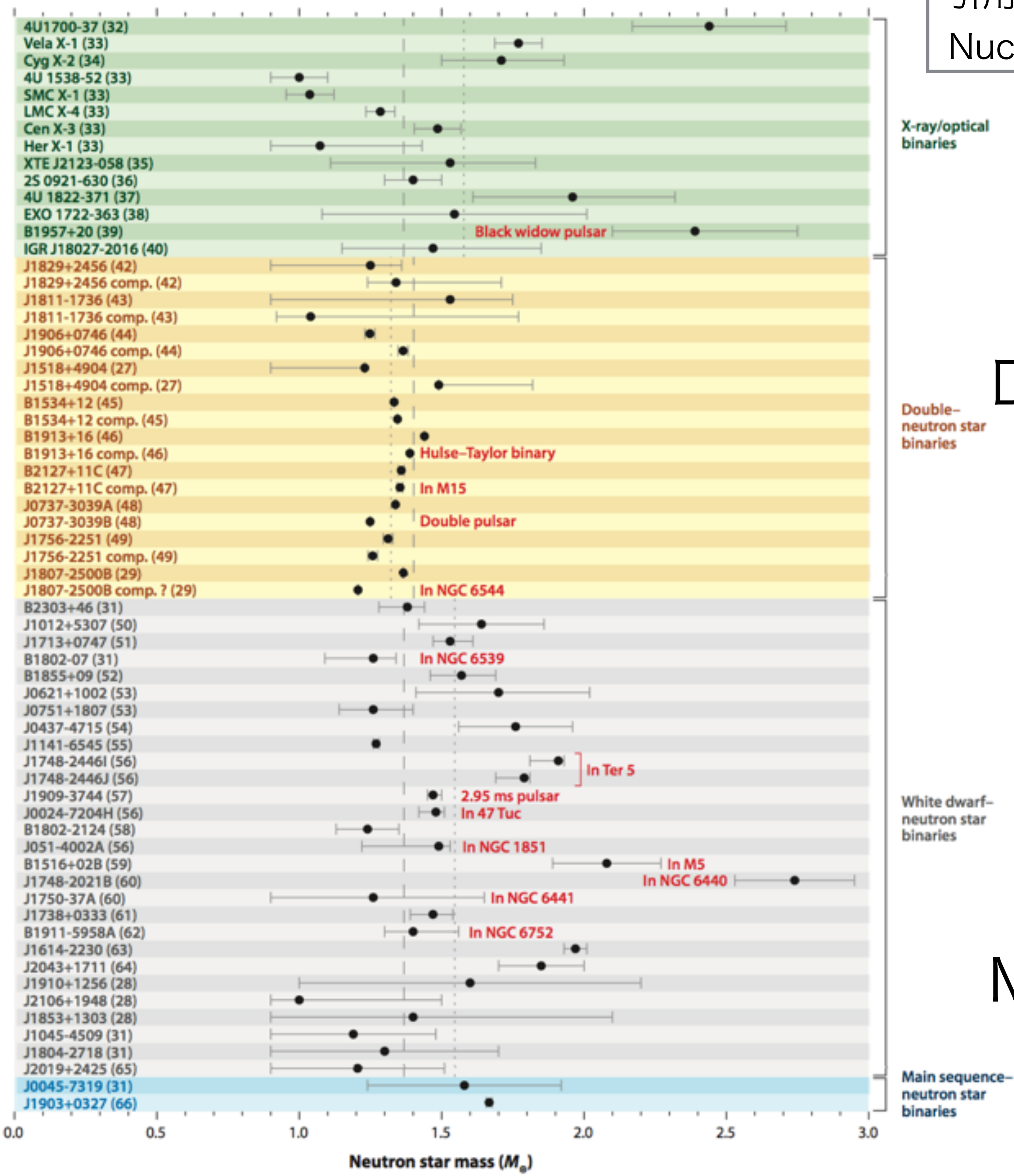
where

$$\Psi^{+\omega lm}(x) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\omega t} \rho^{-1} u_l^+ Y_{lm} \qquad \Psi^{S\omega lm}(x) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\omega t} \rho^{-1} F_l Y_{lm}$$

代入

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = -16\pi \int d^4x' G_M^+(x,x') \tilde{\tau}^{\mu\nu}(x')$$

引用: J. M. Lattimer, Annual Review of Nuclear and Particle Science 62, 485



X-ray/optical binaries

Double neutron star binaries

White dwarf-neutron star binaries

Main sequence star-neutron star binaries

Spherical coulomb function

$f_l(\rho)$:この波動方程式の動径方向は、以下の方程式を満たす

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+1+\frac{4M\omega}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\tilde{f}_l(\rho)=0 \quad \text{where} \qquad \tilde{f}_l(\rho)\equiv\rho f_l(\rho)$$

この一般解はWhittaker関数によって示されるが、形が複雑になる

$\longrightarrow$ 無限遠方、近傍における漸近系で表す

$$\tilde{f}_l(\rho) \sim \begin{cases} \exp\left[\pm i\left(\rho-\gamma\ln 2\rho-\frac{1}{2}l\pi-\sigma_l\right)\right]\equiv \mathrm{e}^{\mp i\sigma_l}u_l^{\pm} & \rho\to\infty \\ c_l\rho^{l+1}\equiv F_l(\rho) & \rho\to 0 \end{cases}$$

where $c_l\equiv 2^l\mathrm{e}^{-\pi\gamma/2}\frac{|\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!}$ $\sigma_l\equiv\arg\Gamma(l+1+i\gamma)$ $\gamma\equiv -2M\omega$

reference

P. DE A. P. MARTINS
J. Comput. Phys. 41 (1981), 223-230.

クーロン型ポテンシャル
波動関数の解法

新しいグリーン関数を定義

$$\Box_M \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi\tilde{\tau}^{\mu\nu}$$

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = -16\pi \int d^4x' G_M^+(x,x')\tilde{\tau}^{\mu\nu}(x')$$ where $\Box_M G_M^+(x,x') = \delta^4(x-x')$

このグリーン関数の一般解を知るためには、
新しい波動方程式に対する斉次方程式を解く

$$\Box_M \Psi = 0$$

一般解

$$\Psi = \mathrm{e}^{-i\omega t} f_l(\rho) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

where $\rho \equiv \omega r$

$Y_{lm}(\theta,\phi)$:球面調和関数

距離と時間がカップリングしているため、
一般解に ρ が含まれる

$$\Box_M = \left[-\left(1+\boxed{\frac{4M}{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}} + \Delta\right]$$

グリーン関数の一般解

$$G_M^+(x,x') = \sum_{lm} \mathrm{e}^{i\sigma_l} \int d\omega sgn(\omega) \Big[\Psi^{+\omega lm}(x)\Psi^{*S\omega lm}(x')\theta(r-r')$$

$$+ \Psi^{S\omega lm}(x)\Psi^{*+\omega lm}(x')\theta(r'-r) \Big]$$

where

$$\Psi^{+\omega lm}(x) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\omega t} \rho^{-1} u_l^+ Y_{lm} \qquad \Psi^{S\omega lm}(x) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\omega t} \rho^{-1} F_l Y_{lm}$$

$$u_l^\pm \equiv \exp\left[\pm i \left(\rho - \gamma \ln 2\rho - \frac{l\pi}{2}\right)\right] \quad F_l \equiv c_l \rho^{l+1} \quad c_l \equiv 2^l \mathrm{e}^{-\pi\gamma/2} \frac{|\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!} \quad \sigma_l \equiv \arg\Gamma(l+1+i\gamma) \quad \gamma \equiv -2M\omega \quad \rho \equiv \omega r$$

代入

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = -16\pi \int d^4x' G_M^+(x,x') \tilde{\tau}^{\mu\nu}(x')$$

+ mode and x mode

$$h_+ = A_{+,1}\cos\Psi_{rot,1} + A_{+,2}\cos\Psi_{rot,2}$$

$$h_\times = A_{\times,1}\sin\Psi_{rot,1} + A_{\times,2}\sin\Psi_{rot,2}$$

$$A_{+,1} = h_{01}\sin 2\Theta \sin\iota\cos\iota,$$

$$A_{+,2} = 2h_{02}\sin^2\Theta(1+\cos^2\iota),$$

$$A_{\times,1} = h_{01}\sin 2\Theta\sin\iota,$$

$$A_{\times,2} = 4h_{02}\sin^2\Theta\cos\iota$$

$$h_{01} = \frac{I_1 - I_3}{r} e^{M\omega_{rot}\pi}|\Gamma(1-2iM\omega_{rot})|\omega_{rot}^2,$$

$$h_{02} = \frac{I_1 - I_3}{r} e^{2M\omega_{rot}\pi}|\Gamma(1-4iM\omega_{rot})|\omega_{rot}^2$$

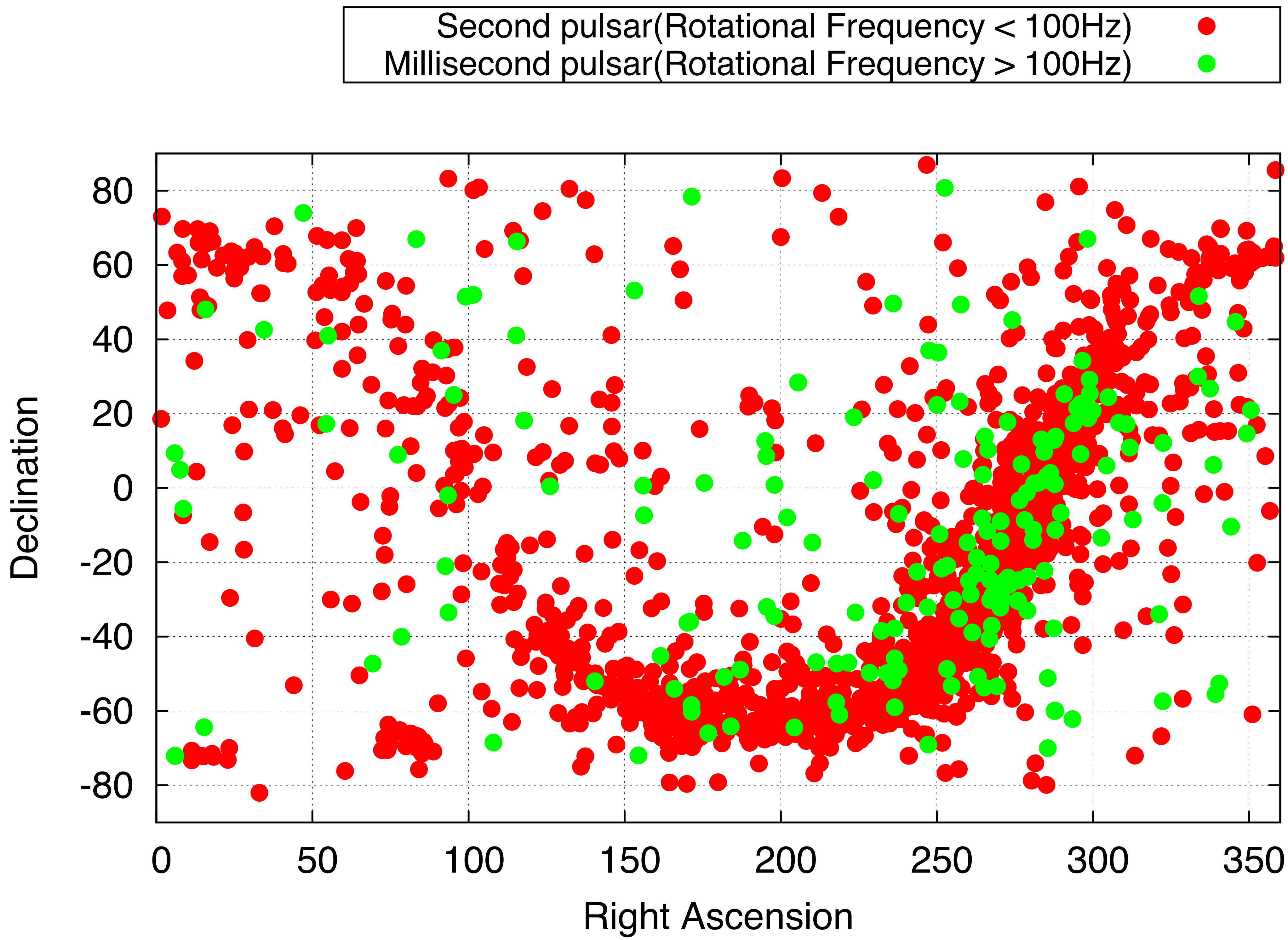
$$\Psi_{rot,1} = [-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 2r\omega_{rot} + \arg\Gamma(1-2iM\omega_{rot})],$$

$$\Psi_{rot,2} = 2\left[-\omega_{rot}t + r\omega_{rot} + 2M\omega_{rot}\ln 4r\omega_{rot} + \frac{1}{2}\arg\Gamma(1-4iM\omega_{rot})\right],$$

ι :インクリネーション
中性子星のz軸と観測者の方向の間の角度

M→0の際に、lineared theoryの中性子星からの重力波波形と一致

millisecond pulsar分布

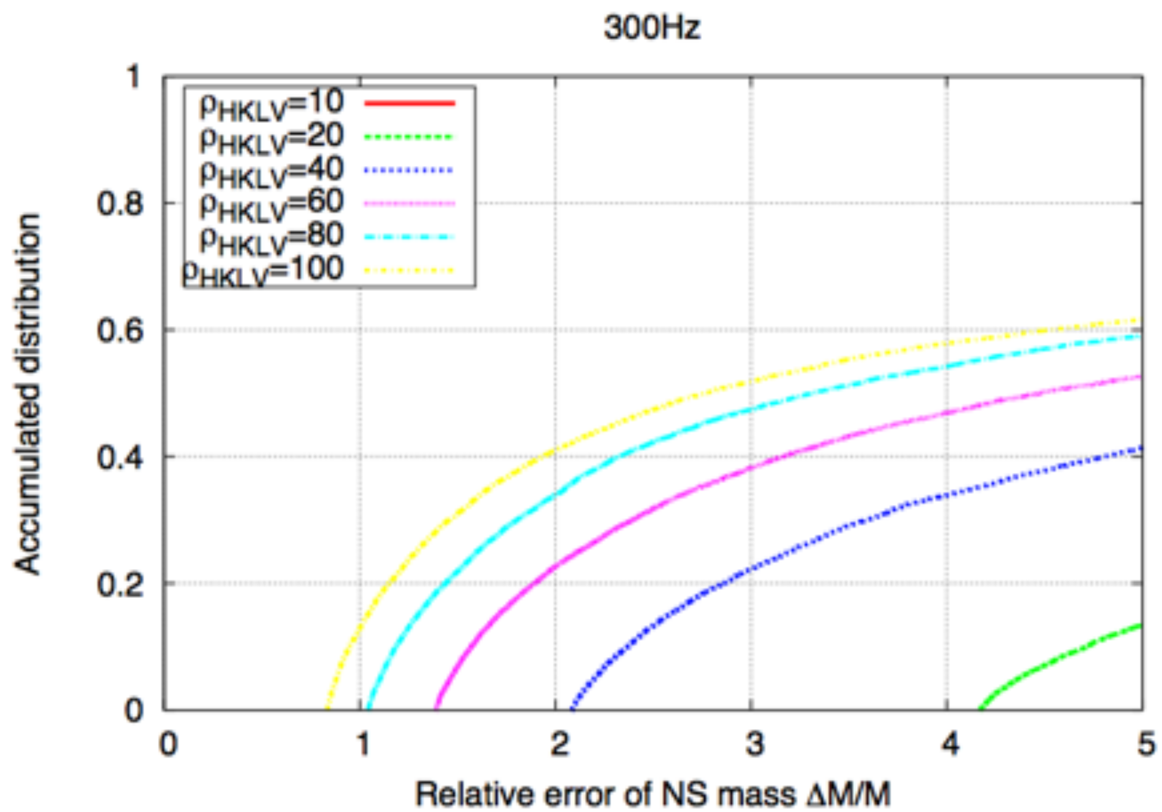


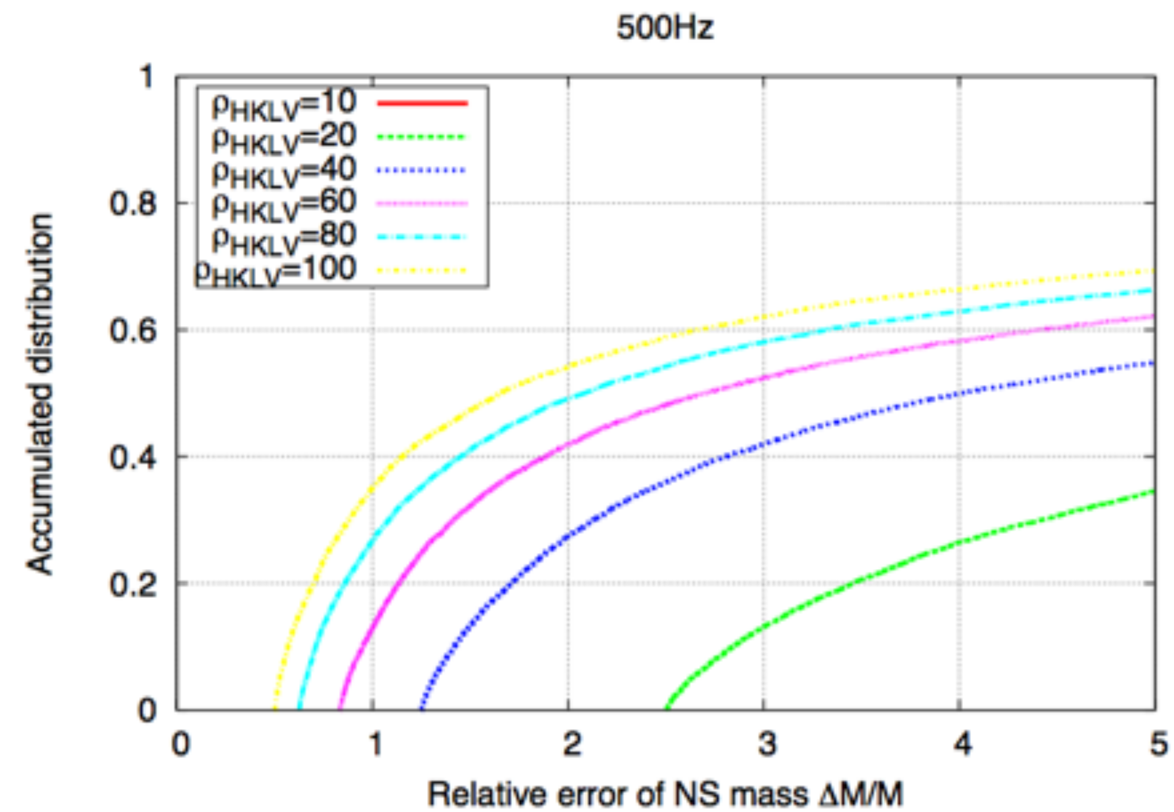
4台の検出器でのシミュレーション

- 積分時間は3年
- 中性子星の質量は1.4M_{solar}
- 4台の合計SNRを10、20、40、60、80、100に設定
- フリーパラメターを以下の条件にする

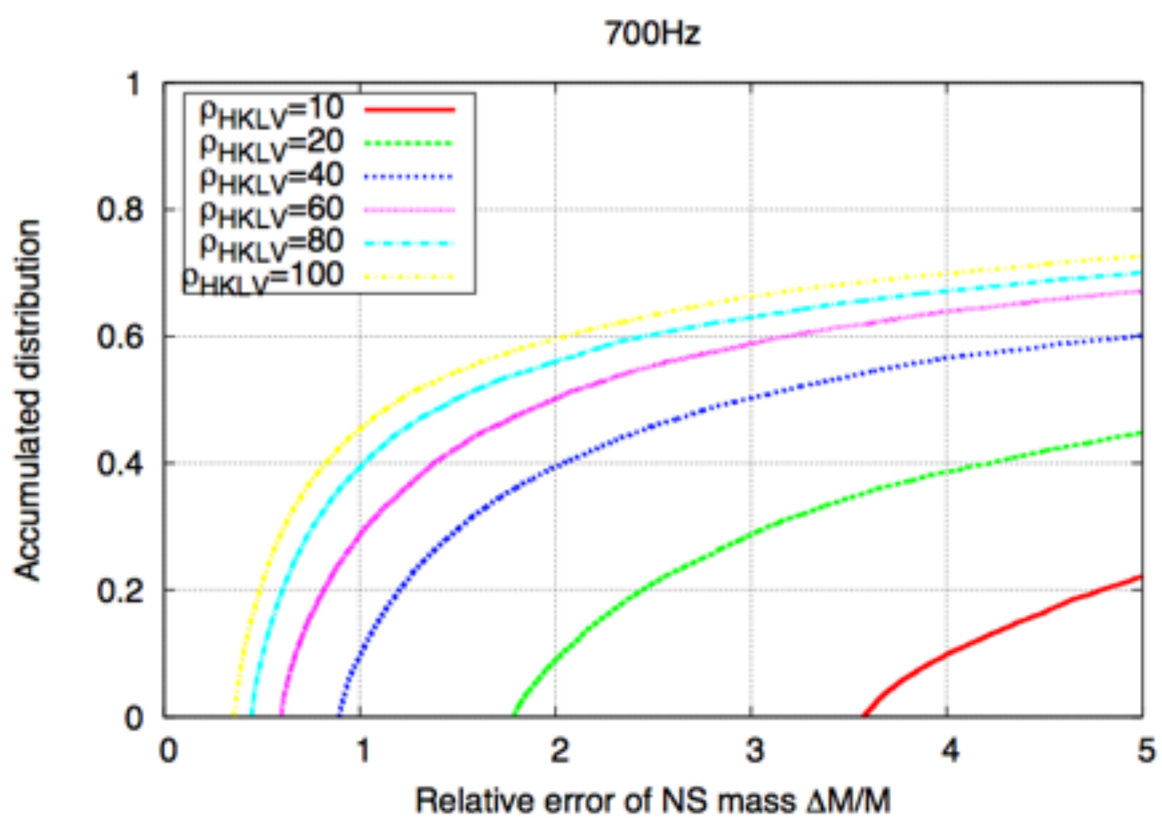
$$\{\ \alpha \in [0, 2\pi], \delta \in [0, \pi], \psi \in [0, 2\pi), \iota \in [0, \pi], \Theta \in [0, \pi]]\}$$

- 周波数は300Hz、500Hz、700Hz
- 計算回数は各周波数およびSNRごとに10000回





- 現実的なSNRでは質量を観測することは出来ない
- 質量の上限は観測できる可能性



質量の相対誤差⊿M/M

50%	300Hz	500Hz	700Hz
SN=20	13.48	8.65	6.08
SN=40	6.83	4.01	2.94
SN=60	4.47	2.70	1.98

5台の検出器でのシミュレーション

・積分時間は3年

・中性子星の質量は1.4M$_{solar}$

・ETを除く4台の合計SNRを10、20、40、60、80、100に設定

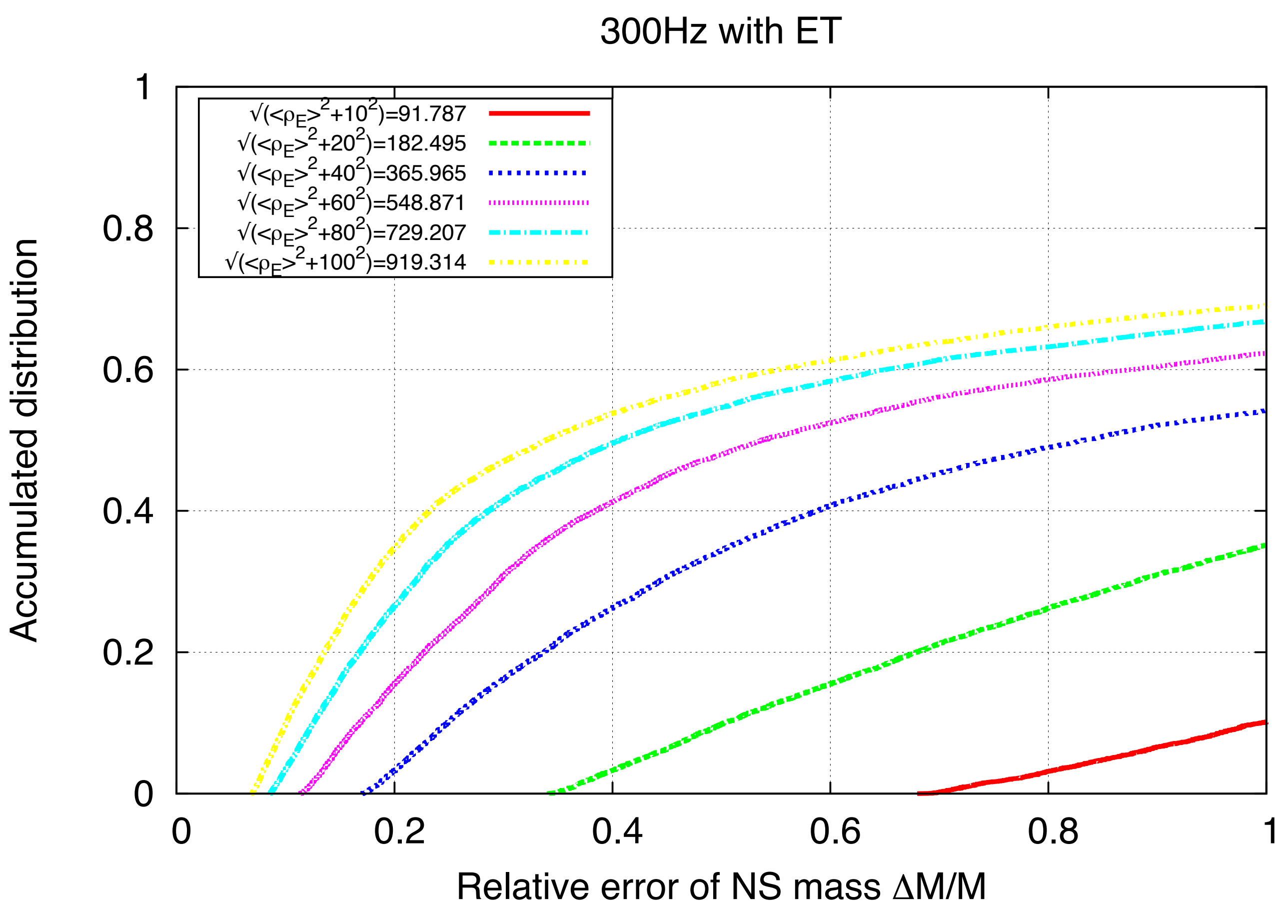
・フリーパラメターを以下の条件にする

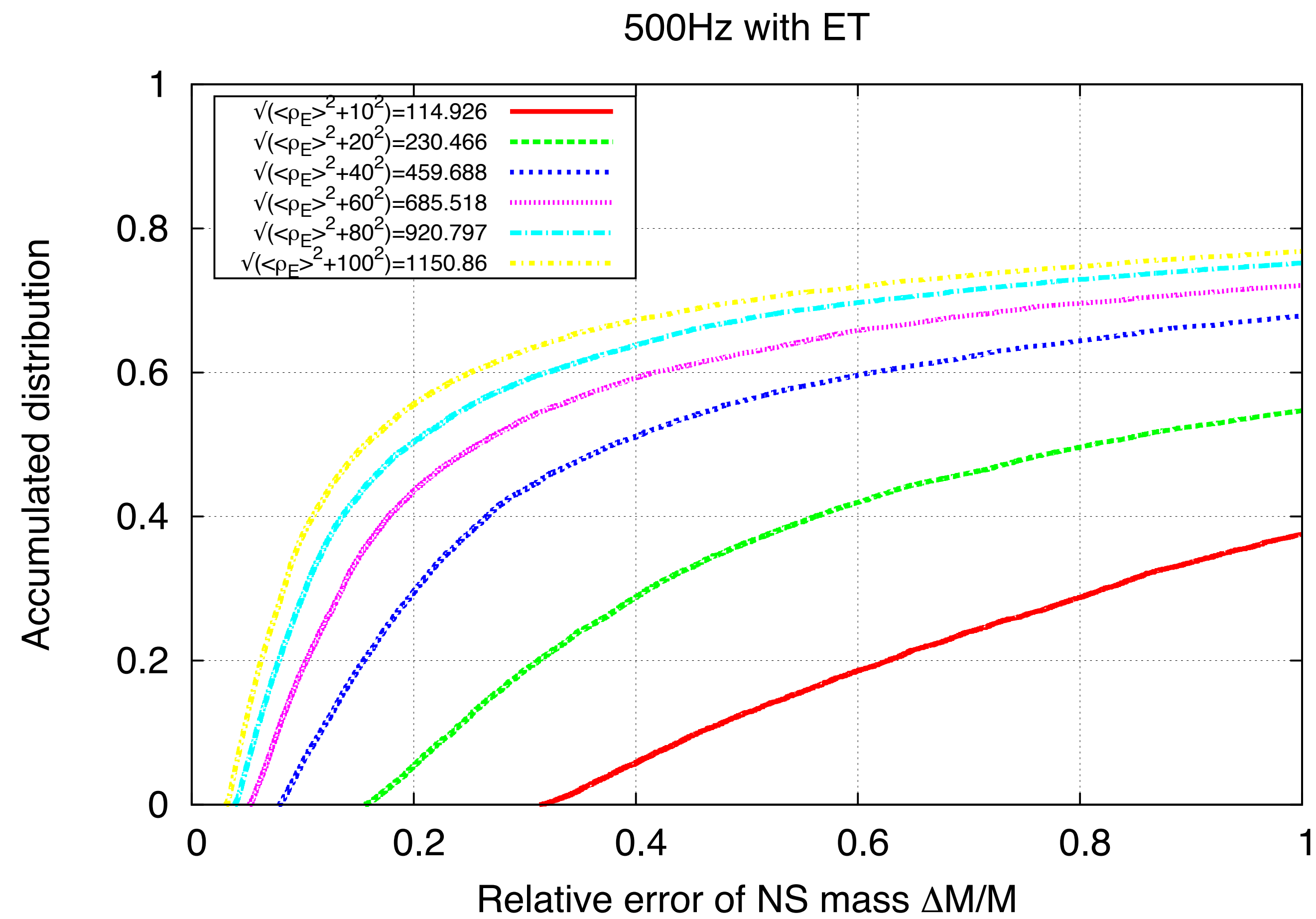
$$\{\ \alpha \in [0,2\pi], \delta \in [0,\pi], \psi \in [0,2\pi), \iota \in [0,\pi], \Theta \in [0,\pi]]\}$$

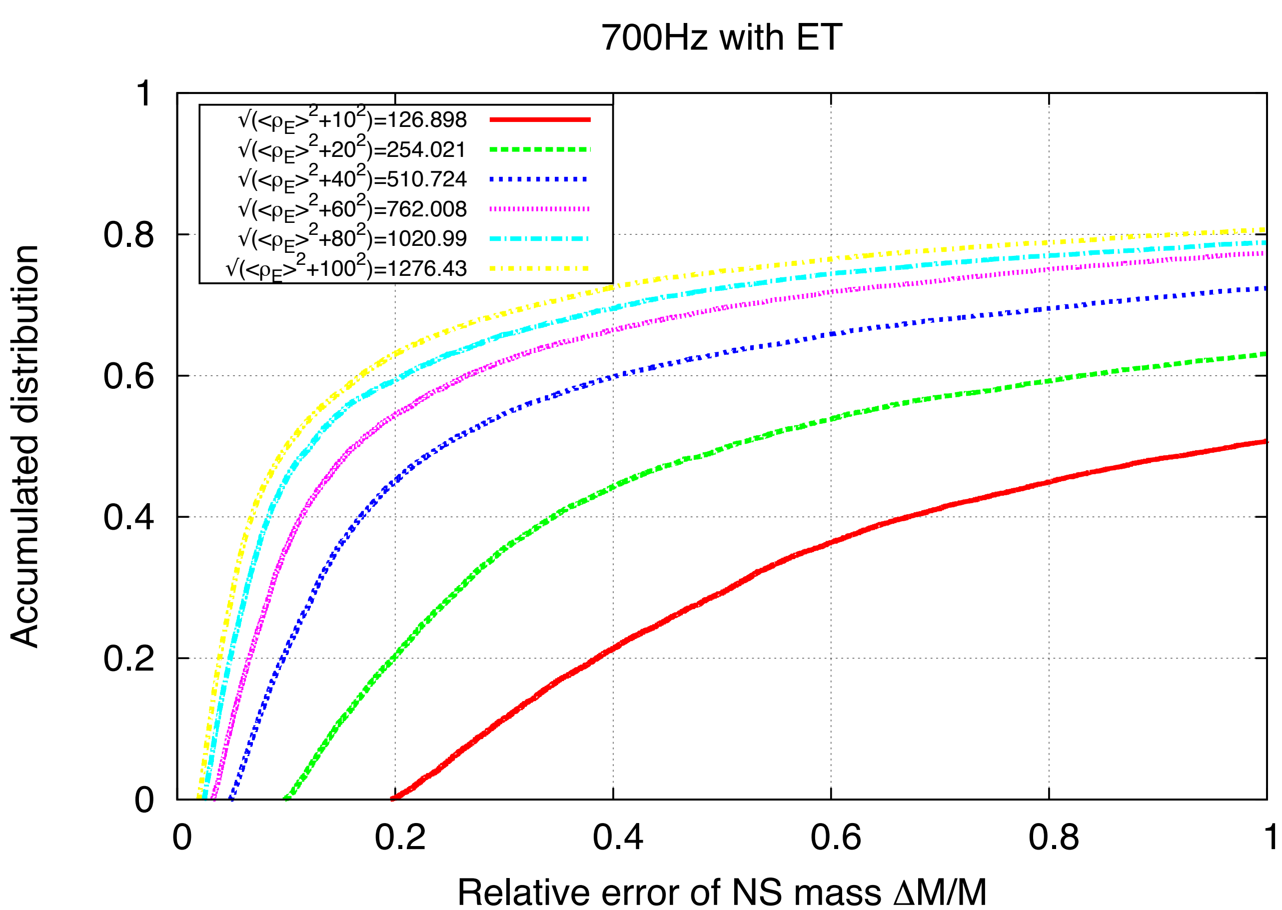
・周波数は300Hz、500Hz、700Hz

・計算回数は各周波数およびSNRごとに10000回

ETは後発の検出器なので、4台の検出器で検出できたSNRでETを加えるとどうなるかをシミュレーション







・多くの中性子星で質量を観測することができる

質量の相対誤差⊿M/M

50%	300Hz	500Hz	700Hz
SN=20	1.64	0.81	0.51
SN=40	0.83	0.37	0.24
SN=60	0.53	0.26	0.16