

Screw Bonding サファイアの熱伝達率

宮本 昂拓、田中 宏樹

2015 年 1 月 7 日

1 モチベーション

KAGRA で用いる鏡は、熱雑音を下げるために 20K まで温度を低くして使用される。しかし、鏡にレーザーが当たることで熱を吸収してしまい温度上昇してしまうと熱雑音が大きくなるという問題が起こる。

したがって、鏡が熱を外に逃がすシステムが必要になる。鏡は 4 本のサファイアファイバーで吊られた状態で設置されるため熱を逃がすには、このサファイアファイバーを通して行われなければならない。また、設置した鏡は取り外しができることで、メンテナンスにも生かすことができる。そこで、一つの案として考えられているのが、イモネジを用いてサファイア部分同士を接合する方法である。今回の測定は、ネジを用いた接合を KAGRA で使用することができるかを熱伝達率の観点から調べるということである。

2 実験原理

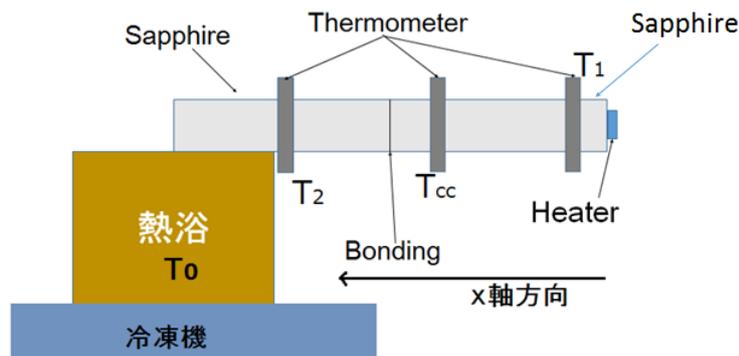


図1 セットアップ略図

2.1 熱伝導率

図1は実験セットアップの概略を示している。ネジでつながれた (bonding) サファイアブロックの片方が熱浴 (この熱浴は冷凍機で冷却されている) に接続される。反対側の端にはヒーターが取り付けられている。ブロックには温度計が3個 (T_1, T_{cc}, T_2) 取り付けられている。さらに熱浴にも一個温度計 (T_0) がつけられて

いる。一般に、断面積 S を通って x 方向に流れる熱量は

$$P [\text{W}] = -\kappa S \frac{dT}{dx} \quad (2.1.1)$$

という関係式で表すことができる。ここで、 κ 、 P 、 $\frac{dT}{dx}$ はそれぞれ熱伝導率、固体内を軸方向に流れる熱量、 x 軸方向の単位長さ当たりの温度変化を表している。式 (2.1.1) より熱伝導率について

$$\kappa [\text{W/K/m}] = \frac{L [\text{m}] \times P [\text{W}]}{S [\text{m}^2] \times \Delta T [\text{K}]} \quad (2.1.2)$$

のように書くことができる。ここで L 、 P 、 S 、 ΔT はそれぞれ x 軸に沿った温度計間の距離、ヒーターによる熱量、サンプルの断面積、温度計間の温度差となる。図 1 にあるように各温度計を T_1, T_{cc}, T_2 とし、式 (2.1.2) に出てきた ΔT に対応する部分を各温度計の差を取るにより得た。したがって、測定される熱伝導率は温度計 $T_1 - T_{cc}$ 、 $T_1 - T_2$ 、 $T_{cc} - T_2$ 間の 3 か所である。

2.2 熱伝達率

熱伝達率は

$$h [\text{W/K/m}^2] = \frac{P [\text{W}]}{S [\text{m}^2] \times \Delta T [\text{K}]} \quad (2.2.1)$$

の式で表すことができる。熱伝導率の時と同様に P 、 S はそれぞれサファイアブロックに入れた熱量、サファイアブロックの断面積である。しかし、 ΔT は、各温度計間の温度差ではなく、ネジ留めをしている面での温度差を表している。図 1 より ΔT は、 $T_1 - T_{cc}$ 間によりサファイア自体の熱伝導率を求めて、 $T_1 - T_2$ 、もしくは、 $T_{cc} - T_2$ 間の温度差からサファイアブロック内での温度勾配を差し引いた値を示している。このようにしてネジ留めによる熱伝達率を見積もる。

3 Sample



図 2 サファイアブロック

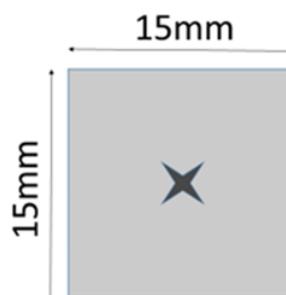


図 3 Indium シート

今回使用したサファイアブロックは図 2 のものを 2 本使用した。また、サファイアブロックの片方の正方形の面には M3 のタップを立ててあり、この加工は株式会社信光社 [1] により作成して頂いた。接合にはステンレス製 M3 のいもネジで長さがおおよそ 14mm の物を使用した。

サファイアブロック 2 本をネジで繋げるときに接合部に間が空くことで真空時に熱伝達物質がなくなること防ぐために間に厚さ 0.1mm の Indium を挟み込むことにした。図 3 のように Indium を 15mm × 15mm

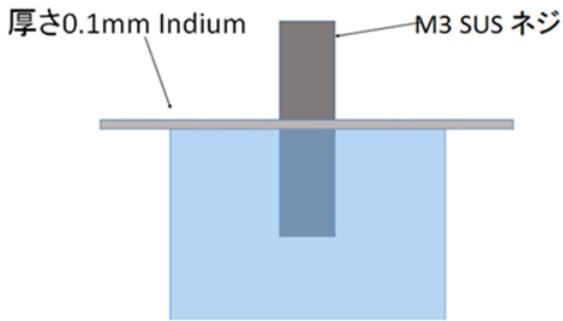


図4 サンプル接合部分

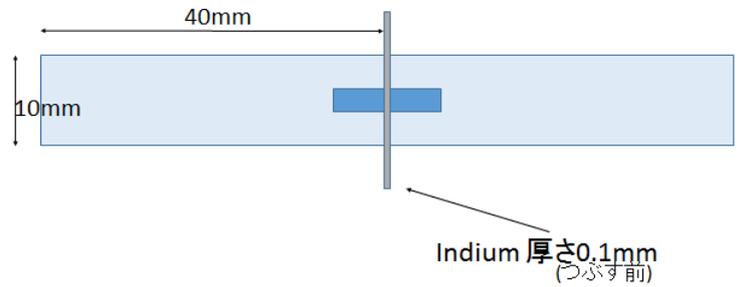


図5 接合後のサファイアブロック

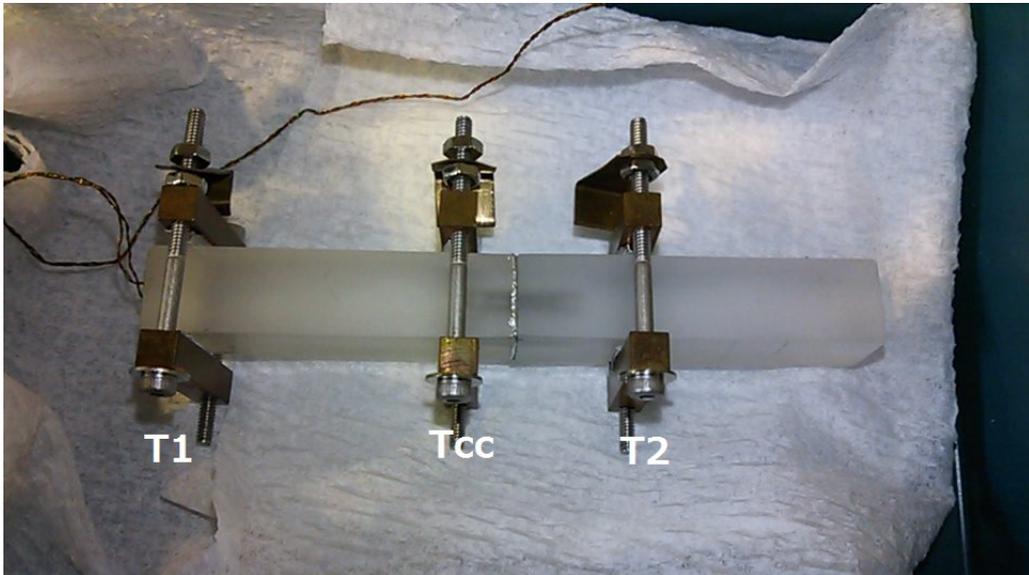


図6 サンプル写真

のサイズに切り、中心に小さく切れ込みを入れた。ネジを回す際に Indium シートも回転してしまったときに Indium が全体にかかるよう、サイズを $15\text{mm} \times 15\text{mm}$ と、大きくとった。Indium シートを接合面に挟み込む際、手で回せる限り一杯の力で締めこんだ。このとき、運良く接合面が重なった。

図4はネジで接合する部分を示す。

図5は、この測定において使用したサファイアブロックである。また、図6は実際に使用したサファイアブロックの写真である。ここで、接着面について簡単のためネジ部を考えずに 100mm^2 とする。

4 実験装置

図1のように上で接合したサファイアブロックを取り付ける。ヒーターには 200Ω の抵抗を用いた。図7に示している温度計間の長さは温度計の中心同士を測定した。温度計の幅はおよそ $2 \sim 3\text{mm}$ である。熱浴は冷凍機で冷却され、さらにヒーターが取り付けられており、 T_0 の温度は冷却後調節することができる。図8は、

実際に冷凍機内部に入れたサファイアブロックである。

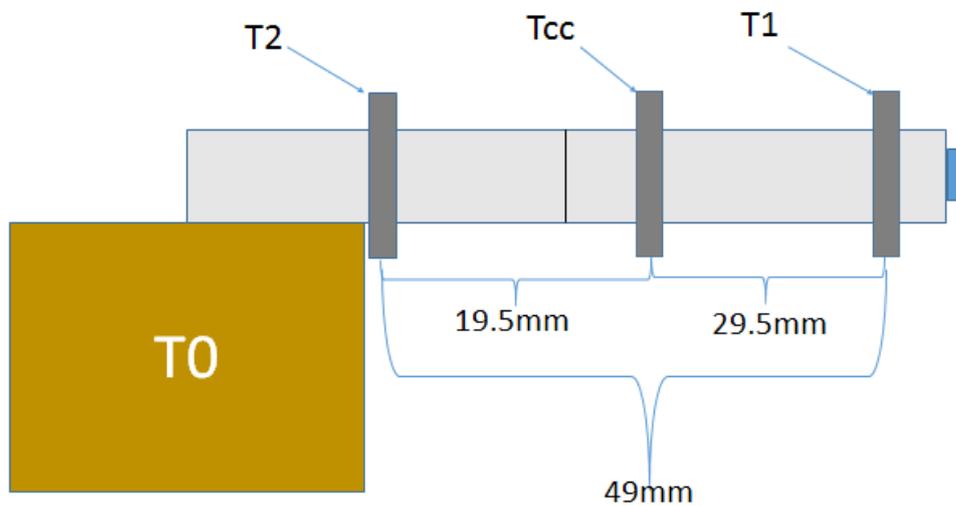


図7 装置



図8 実際の試料

実際の測定においてサファイアブロックを熱浴に固定する時、サファイアと熱浴との熱のやり取りがスムーズにいくようにアルミニウムのテープを用いて固定した。このとき、サファイアと熱浴の銅塊との間には何もはさまなかった。

5 実験操作

熱浴の温度を固定した状態でサンプル全体の温度のゆらぎが小さくなり安定した時点で測定を開始する。1回目、図7の右端に取り付けられた200Ωの抵抗に P_1 のPowerを入力する。そして、 P_1 を入力した状態でブロックに取り付けられた温度計のゆらぎが小さくなり安定した所で各温度計の温度、熱浴の温度、ヒーターに

入力した Power を記録する。次に 2 回目、 $P_2 (> P_1)$ として 1 回目と同じように測定する。このような操作を 3 回もしくは、5 回行う。常に、ヒーターに入力する Power は回数が増えるごとに Power も大きくする。

このようにして記録したデータから横軸を Power にとり、縦軸に各温度計の温度差として、熱浴の各温度毎に 3 つか 5 つのデータが存在するため、最小二乗法を用いて近似直線を引きこの直線の傾きを F とした。すると、熱伝導率 κ は

$$\kappa = \frac{L}{SF} [\text{W/Km}] \quad (5.0.2)$$

で表すことができる。後で結果として示されるデータは、すべてこの式に最小二乗法で求めた F の値を代入することで求めた。また、熱伝達率を h とすると

$$h = \frac{1}{SF} [\text{W/Km}^2] \quad (5.0.3)$$

により与えられ、熱伝導率に用いた F を用いて表される。誤差の評価については付録を参照。

6 測定結果

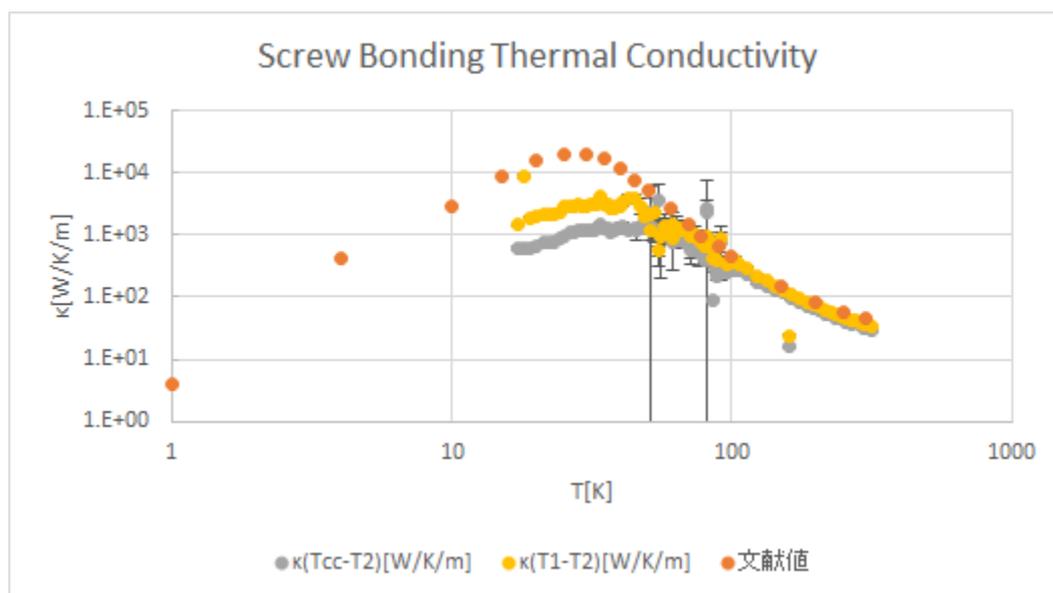


図9 $T_1 - T_2, T_{cc} - T_2$ 間の接合部分を含んだ結果

図9は接合部分を挟んだ温度計間の熱伝導率についてのグラフである。図10は接合部分は含まれておらず、サファイアのみについての結果となる。図11はサファイアについての熱伝導率と、接合部分を含んだ熱伝導率の結果をまとめた。100K以上では熱伝導率はサファイア固有の値で不純物などに依存しないため測定された熱伝導率は文献値と一致しなければいけない。実際図10の結果は一致しており、測定に大きな問題がないことを示している。

図11から分かるように、実際の測定により得られた接合を含んだサファイアの熱伝導率はサファイアのみの値(グラフ中の文献値)[2]と100K以下の領域では明らかに違う値を示している。つまり熱抵抗としては主な寄与は接合からきておりサファイアの寄与は無視できる。また100K以下で $\kappa(T_{cc} - T_2)$ と $\kappa(T_1 - T_2)$ の

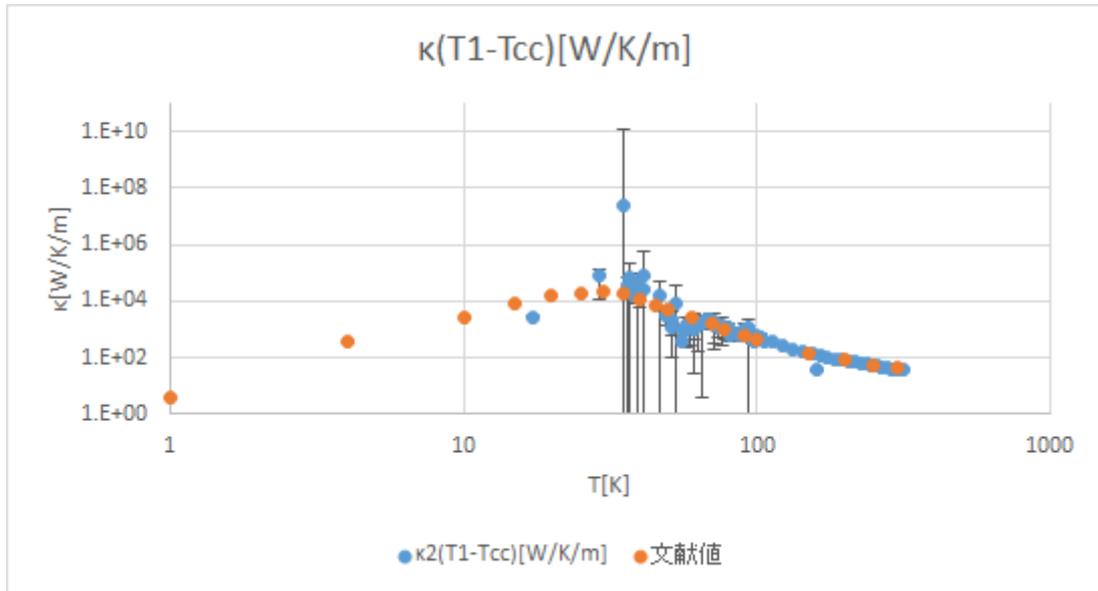


図 10 $T_1 - T_{cc}$ 間の結果

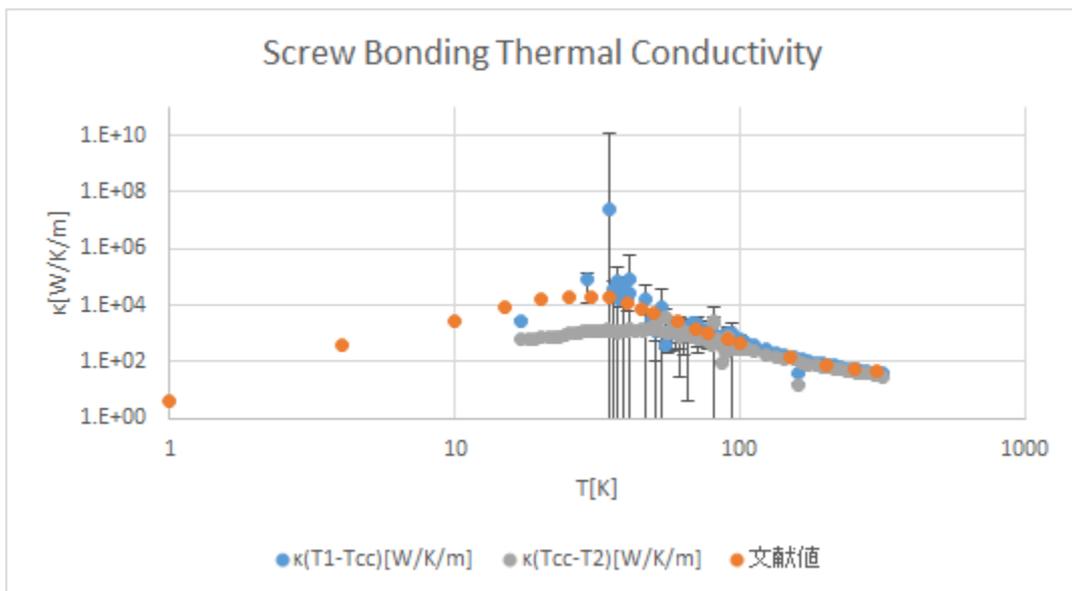


図 11 $T_1 - T_{cc}, T_{cc} - T_2$ 間の結果

間に差があるが、これは温度勾配がサファイア内部で生じず、接合でのみ温度差が生じているためである。熱伝導率を求めるときに長さで規格化するがその長さの違いが $\kappa(T_{cc} - T_1)$ と $\kappa(T_1 - T_2)$ の間の違いとなっている。

そこで、サファイアは 100K 以下では熱抵抗に寄与しないとして、熱伝達率の計算の際に 100K 以下についてはサファイアを無視して、温度計間の温度差は接合部分での温度差とした。しかし、100K 以上の領域については接合ありの熱伝導率はなしの場合と大差なく、サファイアでの温度差が明らかになったため、この範囲についてはサファイアによりついた温度差を考慮して、接合面での温度差を計算して導くことにする。

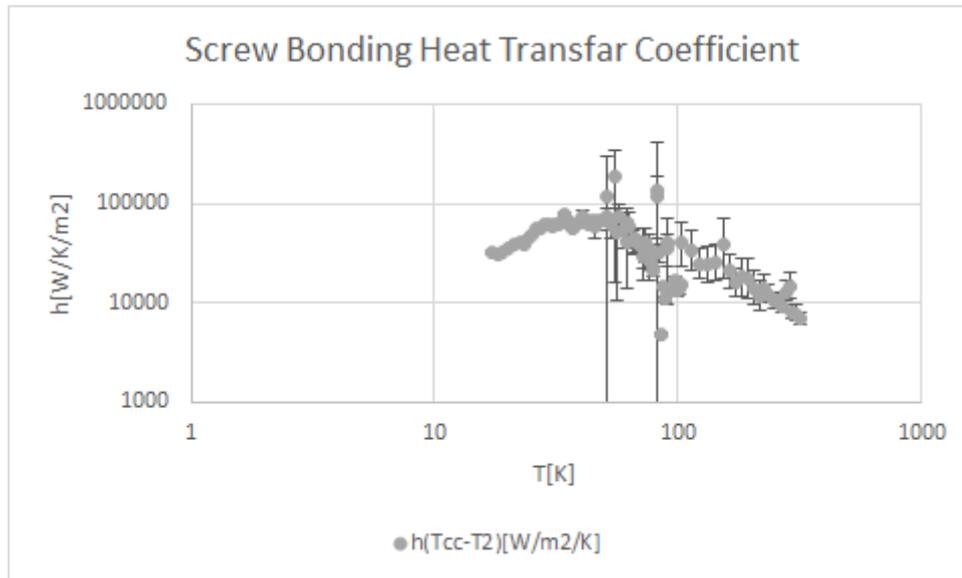


図 12 T_0 と Power の関係

これにより得られた Screw Bonding の熱伝達率が図 12 である。

7 考察

以上の測定結果を用いて、KAGRA で使用することができるかを考える。

接着面を挟んで温度差が 0.1K 以下であり、接着面積が 1cm^2 、鏡に Power が 1W 流入してくると想定して、鏡を吊るすワイヤーは 4 本あり、ワイヤー 1 本当たり、 $\frac{1}{4}\text{W}$ となるので、熱伝達率の要求値は

$$h \geq 2.5 \times 10^4 \left[\frac{\text{W}}{\text{K}\text{m}^2} \right] \quad (7.0.4)$$

となる。

今回得た熱伝達率の結果によると $17\text{K} \sim 20\text{K}$ のところで、 $h = 3 \sim 4 \times 10^4 \left[\frac{\text{W}}{\text{K}\text{m}^2} \right]$ となるので目標値よりも大きい。

したがって、この Screw Bonding は総接着面積 4cm^2 で熱伝達率という観点においては使用できるという結果を得た。

付録 A 誤差の評価

1. 測定結果に表示されている誤差についての評価方法
 2. 熱伝導率のエラーバーが大きいものについての考えられる理由
 3. 図 11 にある 50K 以下の測定結果についてデータ数が少ない理由
 4. 上記の問題解決のため取り組んだことと失敗した理由
- の以上の 4 項目について述べる。

A.1 誤差の評価方法

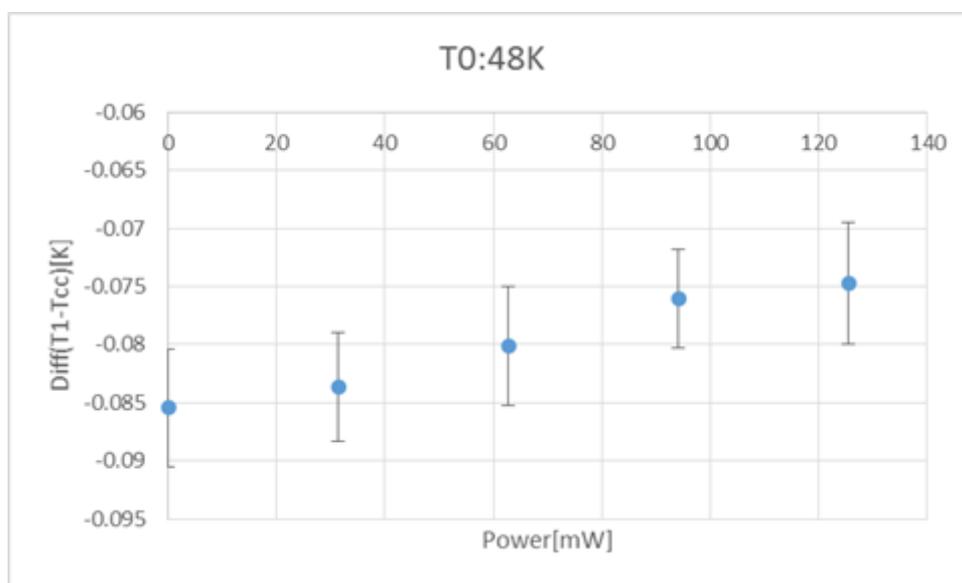


図 13 $T_0 = 48K$ の時の温度計 $T_1 - T_{cc}$ 間の結果

例えば図 13 のような結果を得たとする。定常状態に到達したあと 1 秒間隔で 15 回温度を測定し、その平均と標準偏差を求めた。図 13 にあるエラーバーはこの標準偏差である。熱伝導率を求めるに当たり式 (5.0.2) にある F を最小二乗法で求めるためには標準偏差を考慮に入れる必要がある。そこで、上図のグラフにおいて Power の低い方から番号を 1～5 まで設定すると、(温度差, Power, 標準偏差) = $(\delta t_1, P_1, \sigma_1) \sim (\delta t_5, P_5, \sigma_5)$ のように書くことができる。これらの記号を用いて標準偏差を考慮した最小二乗法は次のように書くことができる。[3]

$$F = \frac{1}{\Delta} \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{P_i \delta t_i}{\sigma_i^2} - \sum \frac{P_i}{\sigma_i^2} \sum \frac{\delta t_i}{\sigma_i^2} \right) \quad (\text{A.1.1})$$

$$\Delta = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \sum \frac{P_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum \frac{P_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \quad (\text{A.1.2})$$

ここで、 $Power - Diff(T)$ のグラフのデータ数について $T_0 \geq 50K$ の時は、データは 3 つ、 $T_0 < 50K$ の時はデータ 5 つである。

測定結果に示されているエラーバーについて。式 (5.0.2) にある熱伝導率の式の L 、 S 、 F はすべて実験室で測定することにより求めた数値である。そのため、熱伝導率の値に誤差の伝搬をする。

・ L について

L は、各温度計の間の距離である。この長さは $2mm$ 程度の幅のある温度計の中心を基準にして測定してあるため、 L の誤差は $\delta L = 1mm$ 程度影響すると考えた。

・ S について

S は、サファイアの熱伝導する面の断面積である。サファイアサンプル自体は $10mm \times 10mm$ のサイズであり、一辺当たり $0.1mm$ 程度の測定誤差があると、 $\delta S = 2mm^2$ となることを用いた。

・ F について

ここで、 F の分散誤差を δF とすると

$$\delta F = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (\text{A.1.3})$$

となる [3]。このとき、 Δ は式 (A.1.2) のものである。

この 3 つの誤差の要因から熱伝導率 κ の誤差の伝搬は式 (5.0.2) の κ を用いて

$$\delta \kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial \kappa}{\partial L}\right)^2 \delta L^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial F}\right)^2 \delta F^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial S}\right)^2 \delta S^2} \quad (\text{A.1.4})$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\delta L}{SF}\right)^2 + \left(\frac{L\delta F}{SF^2}\right)^2 + \left(\frac{L\delta S}{S^2F}\right)^2} \quad (\text{A.1.5})$$

と表すことができる。熱伝導率の結果には誤差としてこの $\delta \kappa$ をグラフに反映する。また、熱伝達率は熱伝導率を厚さで割った値なので熱伝達率を h とすると式 (5.0.3) として表せるので熱伝達率の誤差は先ほどと同様に

$$\delta h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)^2 \delta S^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial F}\right)^2 \delta F^2} \quad (\text{A.1.6})$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\delta S}{S^2F}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{SF^2}\right)^2} \quad (\text{A.1.7})$$

で表すことができる。熱伝達率の結果の中にこの計算で得られた結果を誤差として用いる。

A.2 エラーバーの大きなものについて

図 10 のグラフから、 $T_1 - T_{cc}$ の接合の無い $100K$ 以下の結果に対して誤差が大きく、また各データにばらつきが大きいことが分かる。これは、温度計 $T_1 - T_{cc}$ 間での温度差があまりつかなかったことが原因であると考えている。

図 14 のグラフは図 10 において大きく外れて、エラーバーの大きなデータについての Power と Diff($T_1 - T_{cc}$) のグラフである。このグラフより、最大の温度差が $0.004K$ 程度であることが見て分かる。測定に使用した温度計の精度は $0.01K$ 程度の温度差まで測定可能なものを用いたため、温度差が明確につかなかったことにより測定できていない。文献値によると、 $100K$ 以下の温度領域でサファイアの熱伝導率が大きく、さらに、 $1cm^2$ の断面積の大きな試料を用いたためであると考えている。

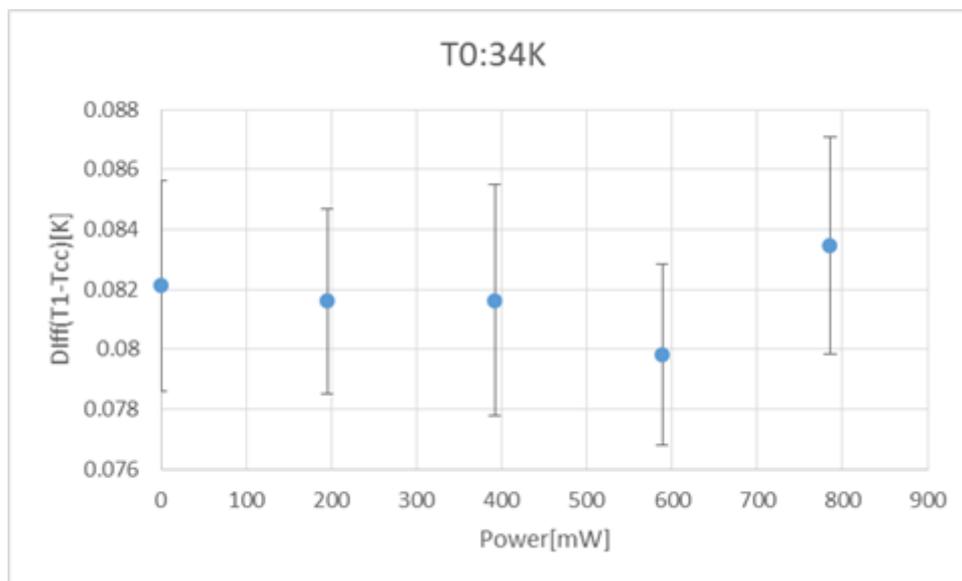


図 14 $T_0 = 34K$ での $Power - Diff(T_1 - T_{cc})$ のグラフ

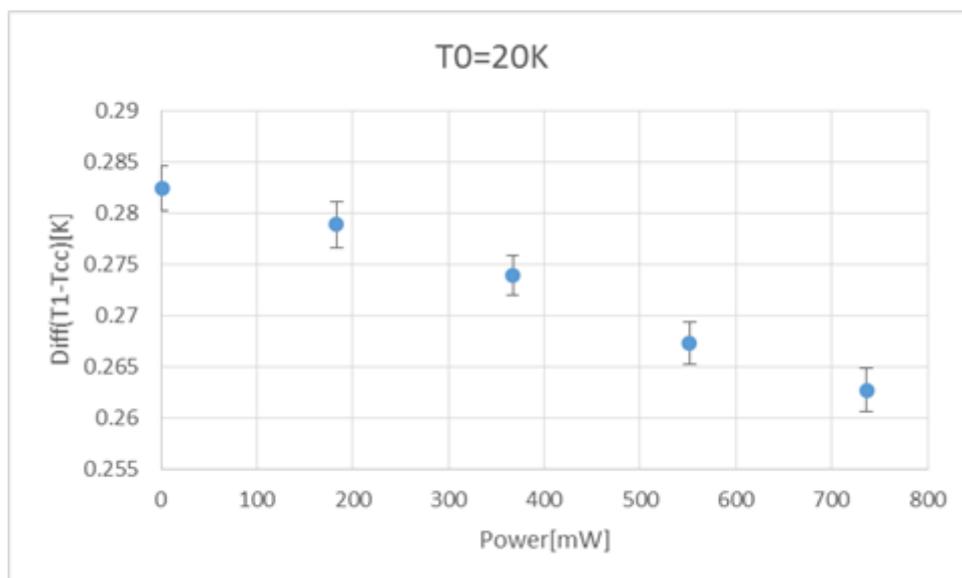


図 15 $T_0 = 20K$ の傾きが負を表すグラフ

A.3 50K 以下の測定結果について

図 10 の 50K 以下のデータ数が少ないことが分かる。それは、例えば図 15 のような温度差がついているが、傾きが負を示している結果がある。このような結果となったのは、温度計のキャリブレーションエラーであると考えている。そして、このような負の傾きを持つ結果から計算される熱伝導率は負の値を持ち明らかにおかしいと判断して除外した。そのため、データ数が少なくなっている。

A.4 問題解決の取り組みとその結果

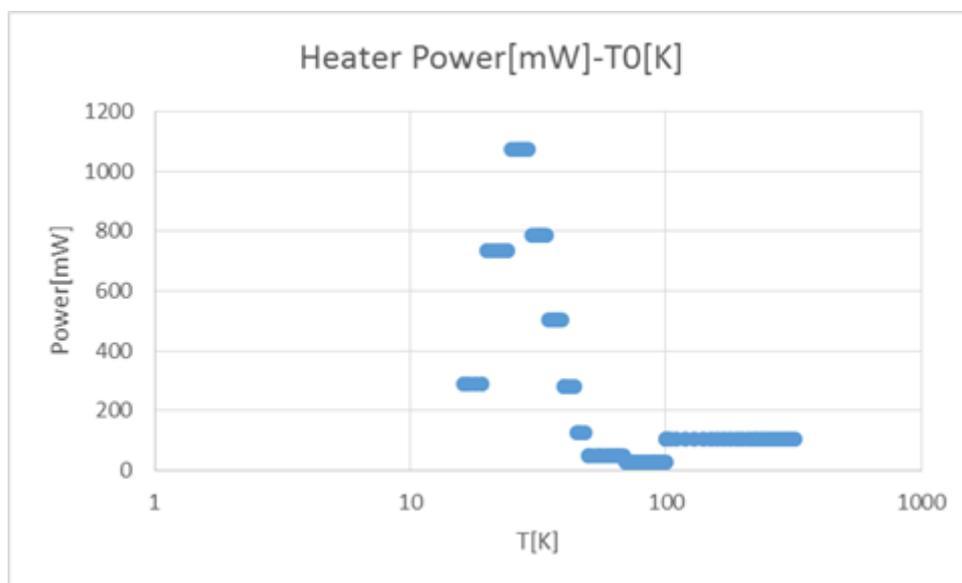


図 16 T_0 と $Power$ の関係

エラーバーの大きい理由として挙げた、温度差が明確についていないという事実に対して、ヒーターに与えている $Power$ を大きくするという方法を行った。

図 16 は T_0 の温度と $Power$ との関係を表しているグラフである。熱伝導率が大きくなる温度領域で $Power$ も大きくした。

しかし、 $Power$ を大きくしていったところ、サファイアサンプルに取り付けられた 3 つの温度計の揺らぎが大きくなり 10 時間経過しても定常状態に達することはなかった。そのため、ヒーターに与える $Power$ を制限されてしまった。

また、 $Power$ を大きくしすぎるとエネルギーが放射として失われてしまい、 $Power$ と温度差の関係がきちんと得られないという問題も存在した。

これらの理由から、サファイアの熱伝導率の 100K 以下について良い結果は得ることができなかった。

参考文献

- [1] 株式会社信光社 www.shinkosha.com
- [2] Y.S. Touloukian and C.Y. Ho, editors "Thermophysical Properties of Matter Volume 2: Thermal conductivity: Nonmetallic Solids", p93-97 Plenum Publishing Corporation, 1970.
- [3] 吉澤康和 美しい誤差論 実験データ解析法 (共立出版、1989)