

干渉計信号取得の基礎 ～PDH法とWFS法～

道村唯太

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

安東研究室

目次

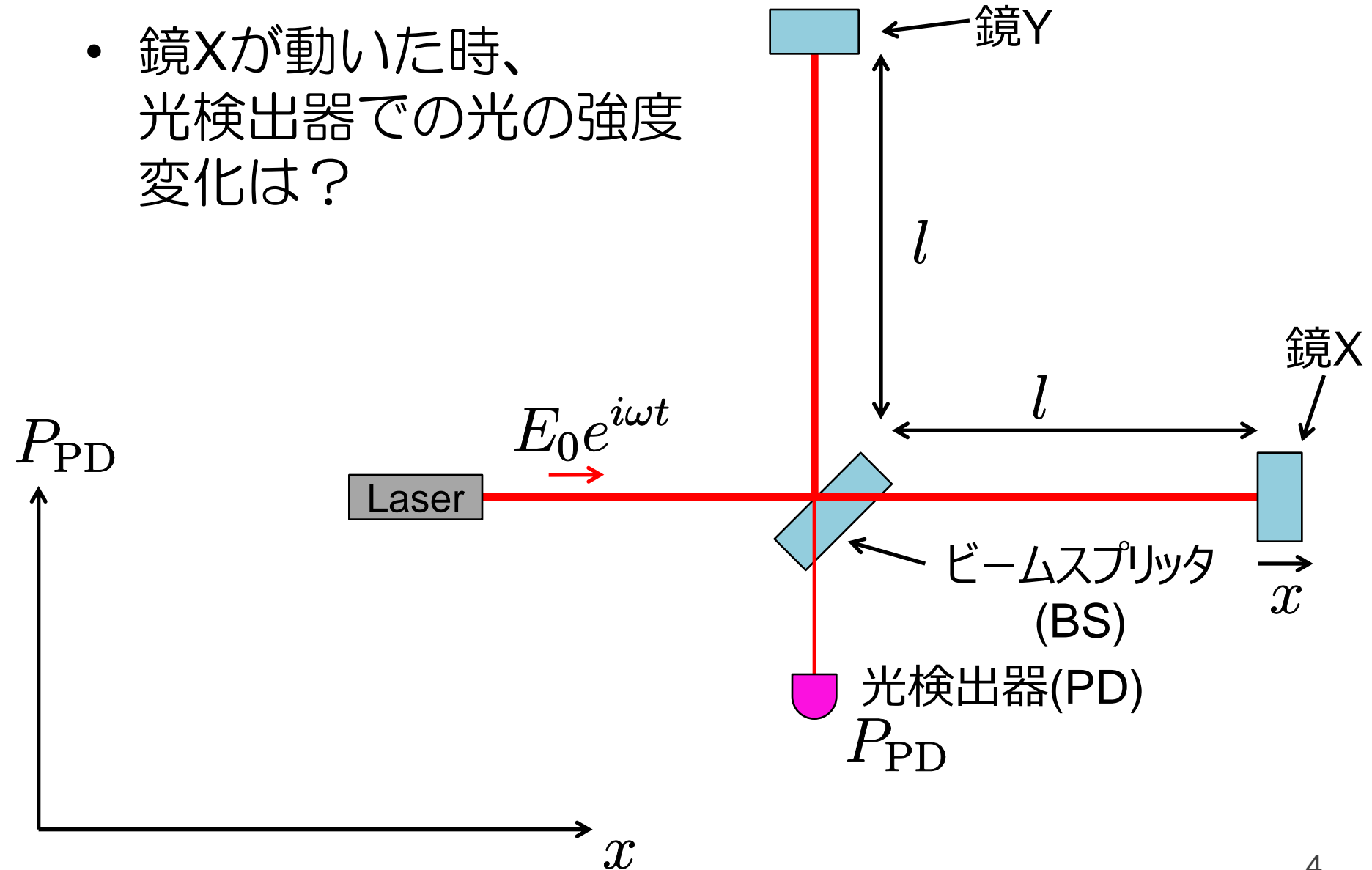
- Michelson干渉計の長さ制御
- 位相変調とサイドバンド描像
- Fabry-Perot共振器
- Pound-Drever-Hall法(共振器の長さ制御)
- ガウシアンビーム光学
- Wavefront sensor法(共振器のアライメント制御)
- FP共振器のアライメント計算
- 三角共振器のアライメント計算
- 高次モード

参考文献

- Michelson干渉計の長さ制御
[安東さん修論](#)
E. D. Black: [Am. J. Phys. 71, 365 \(2003\)](#)
- Pound-Drever-Hall法
[麻生さん修論](#)、[和泉さん修論](#)(要PW)、[道村資料](#)
E. D. Black: [Am. J. Phys. 69, 79 \(2001\)](#)
- Wavefront sensor法
[朽久保さん修論](#)、[丹羽さん修論](#)(要PW)、[道村資料](#)
- 三角共振器
F. Kawazoe+: [J. Opt. 13, 055504 \(2011\)](#)
- KAGRA光源、モードクリーナー
大前さん博論(available upon request)

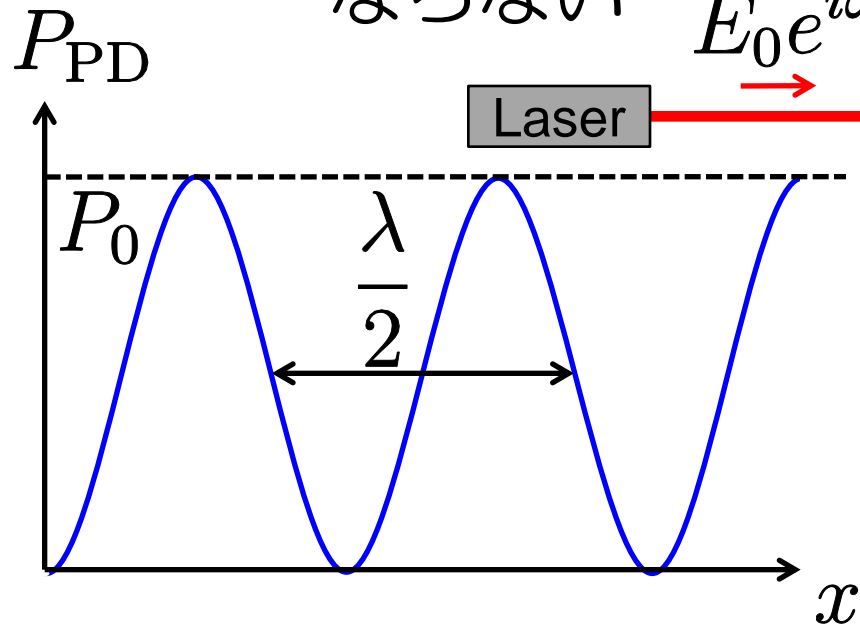
Michelson干渉計

- 鏡Xが動いた時、
光検出器での光の強度
変化は？

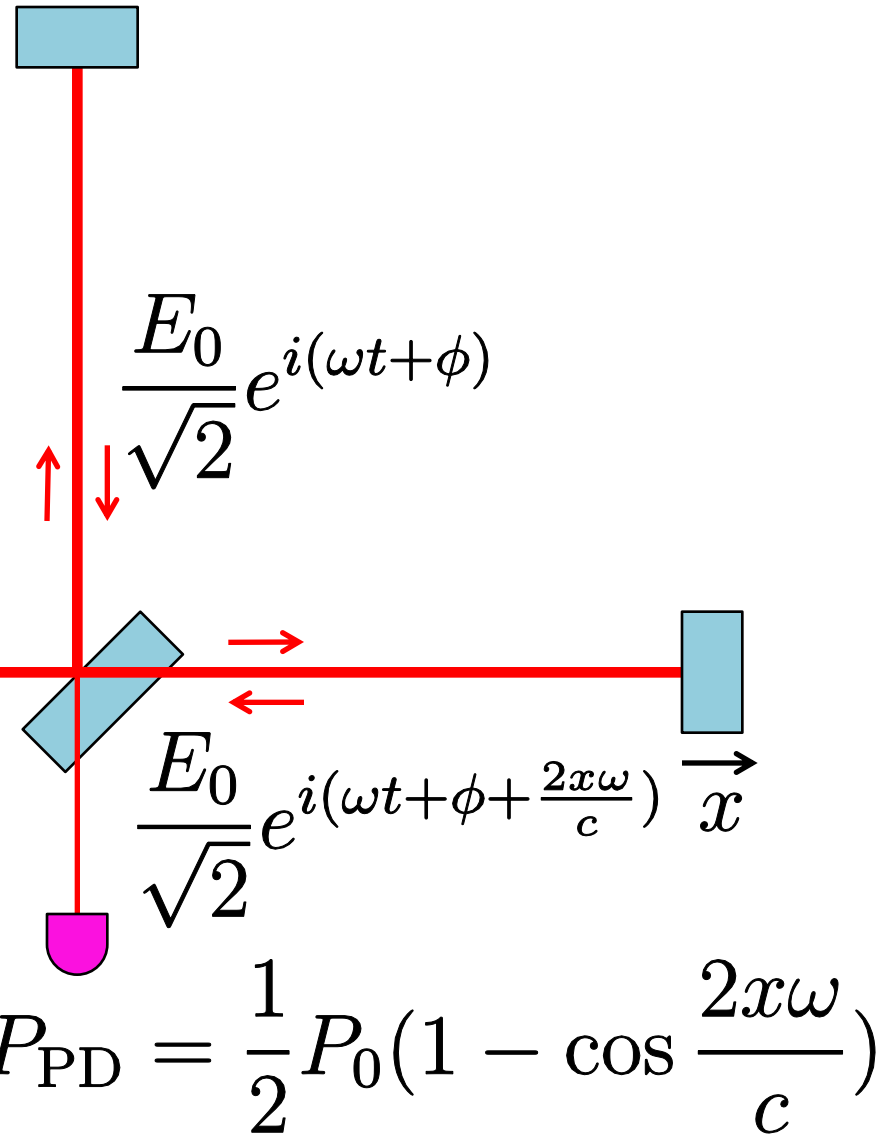


Michelson干渉計

- 強度が正弦波で変化
- BS裏面反射での位相反転に注意
- 鏡は波長以上揺れる
→線形な信号取得にならない

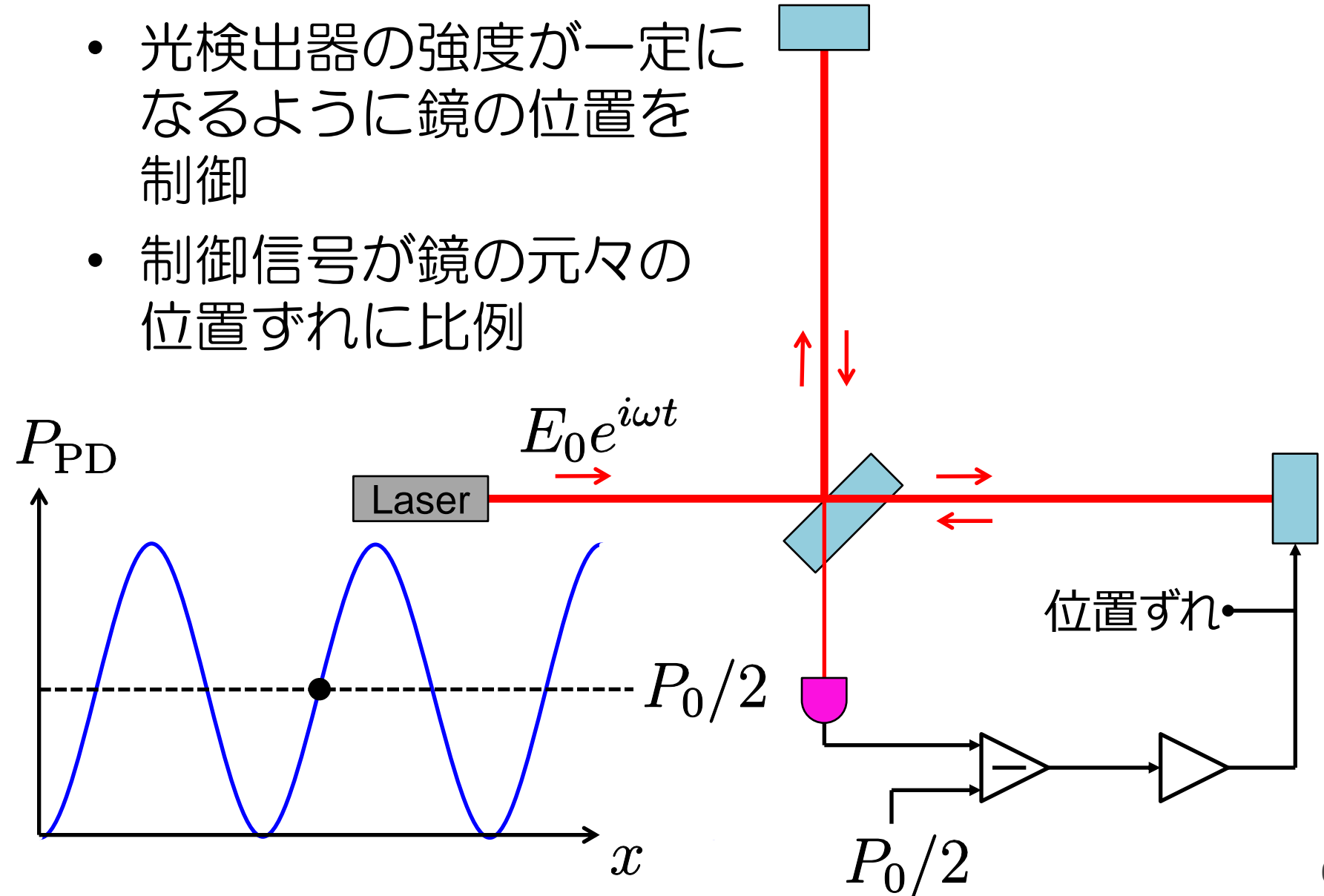


$$E_0 e^{i\omega t}$$



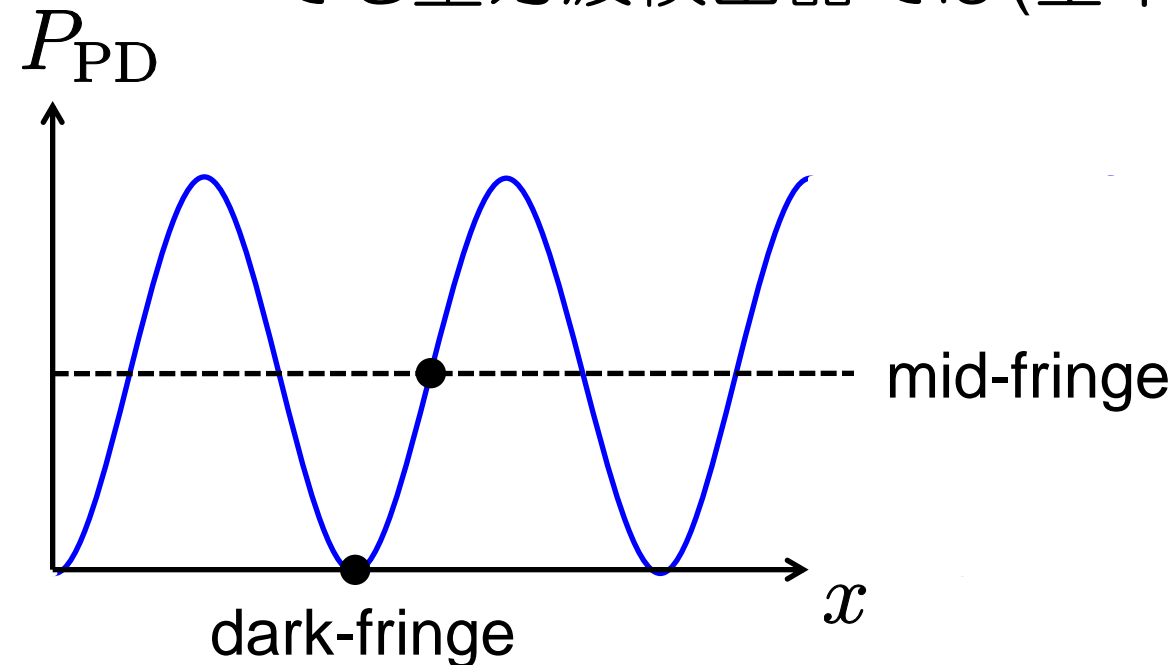
Mid-fringe ロック

- 光検出器の強度が一定になるように鏡の位置を制御
- 制御信号が鏡の元々の位置ずれに比例



Mid-fringeとDark-fringe

- mid-fringe
微小変位に対して線形な信号が取れるが、強度雑音に弱い
- dark-fringe
強度雑音が効かないが、線形な信号が取れない
でも重力波検出器では(基本的に)こちらを採用



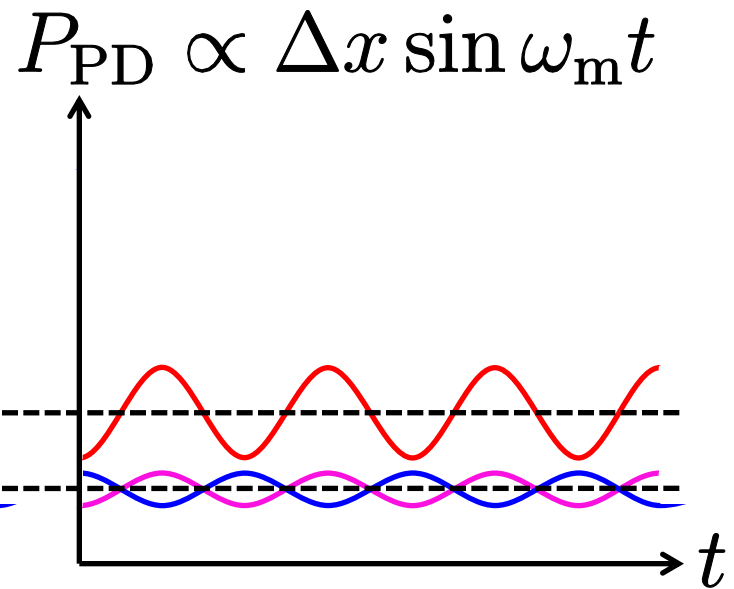
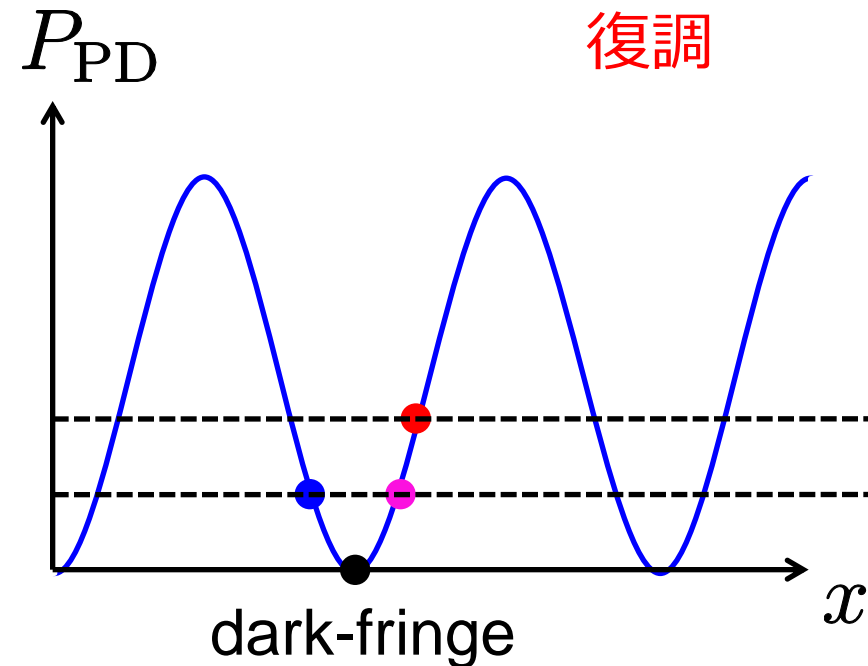
位相変調法

- 鏡を常に揺らしておくと、dark-fringeからのずれ Δx の大小が正負込みでわかる
- 光検出器出力を復調することで Δx に比例した信号が取得できる

$$\Delta x \sin \omega_m t \times \sin \omega_m t = \frac{\Delta x}{2} (1 - \cos 2\omega_m t)$$

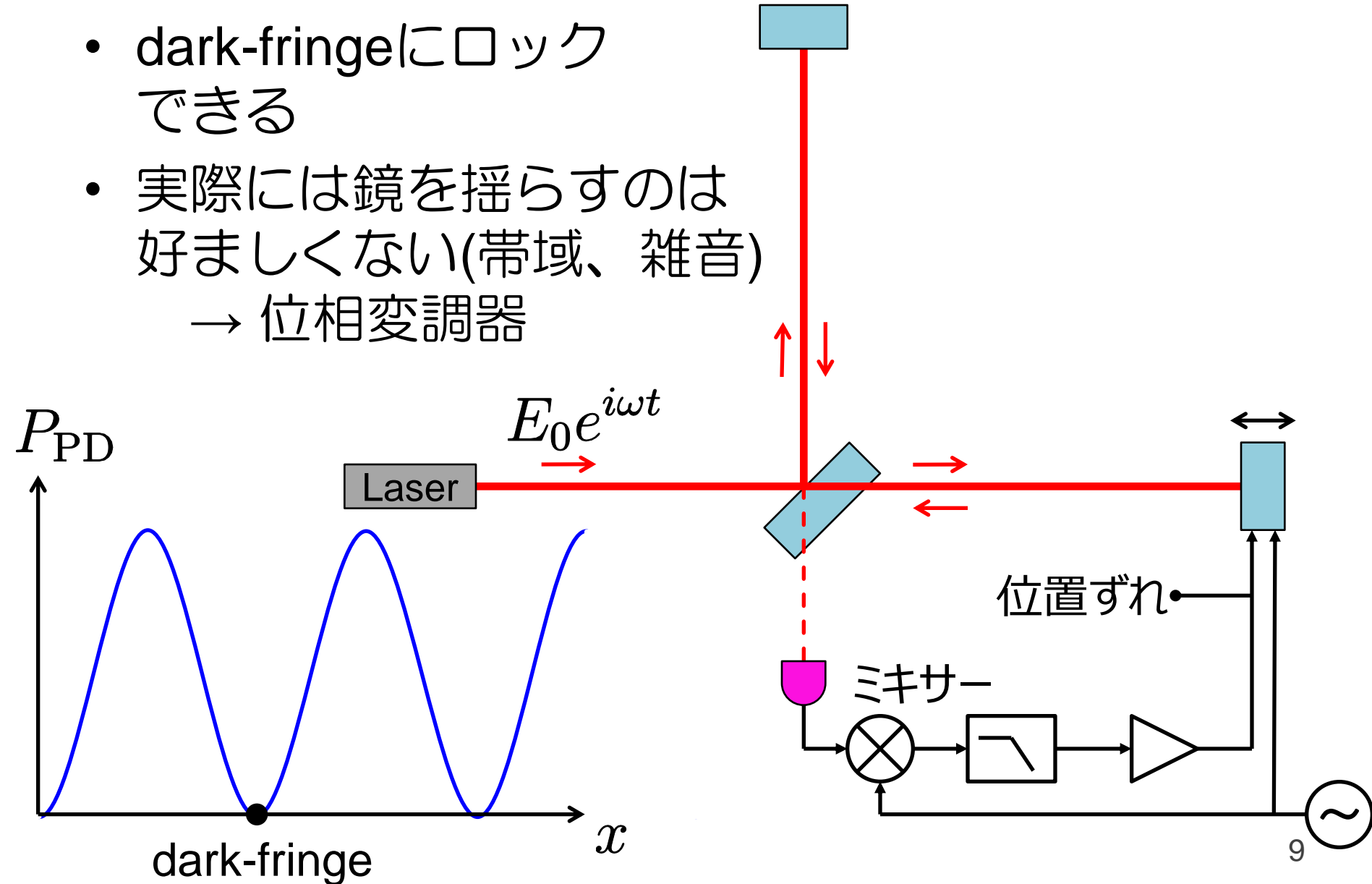
↑
復調

ローパスでカット



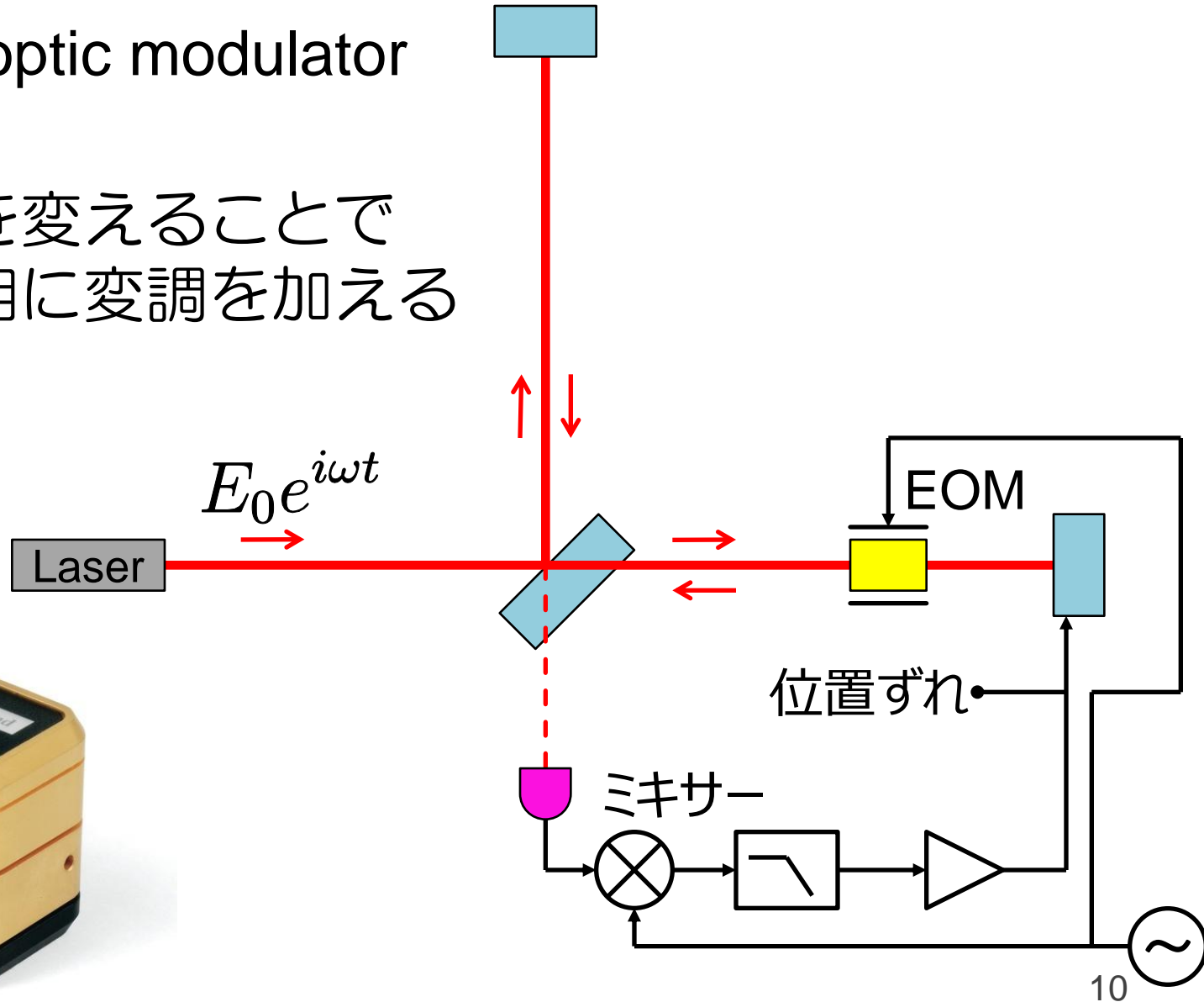
位相変調法によるロック

- dark-fringeにロックできる
- 実際には鏡を揺らすのは好ましくない(帯域、雑音)
→ 位相変調器



位相変調器

- electro-optic modulator (EOM)
- 屈折率を変えることで光の位相に変調を加える

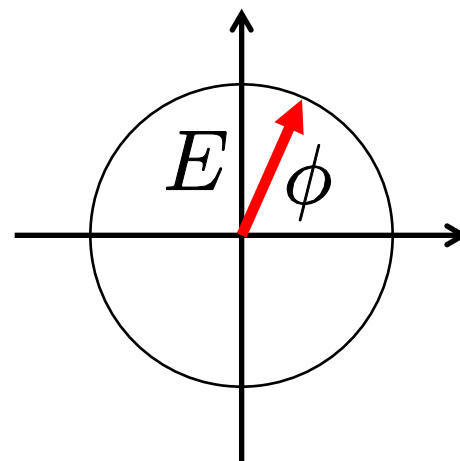


electro-optic phase modulator

Phasor Diagram

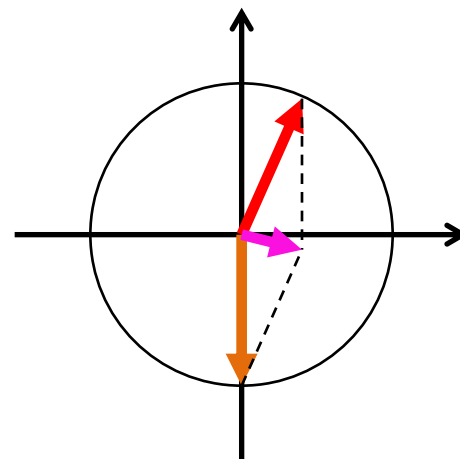
- 複素振幅表示
- 光の振幅と位相をベクトルで表す

$$Ee^{i(\omega t + \phi)}$$



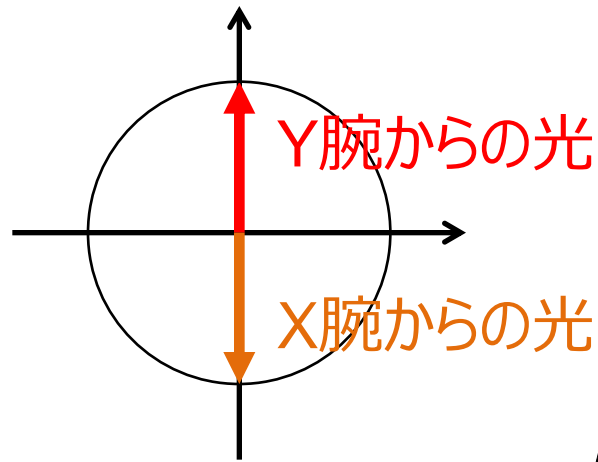
- 干渉はベクトル和

$$Ee^{i(\omega t + \phi)} + Ee^{i(\omega t + \phi')}$$

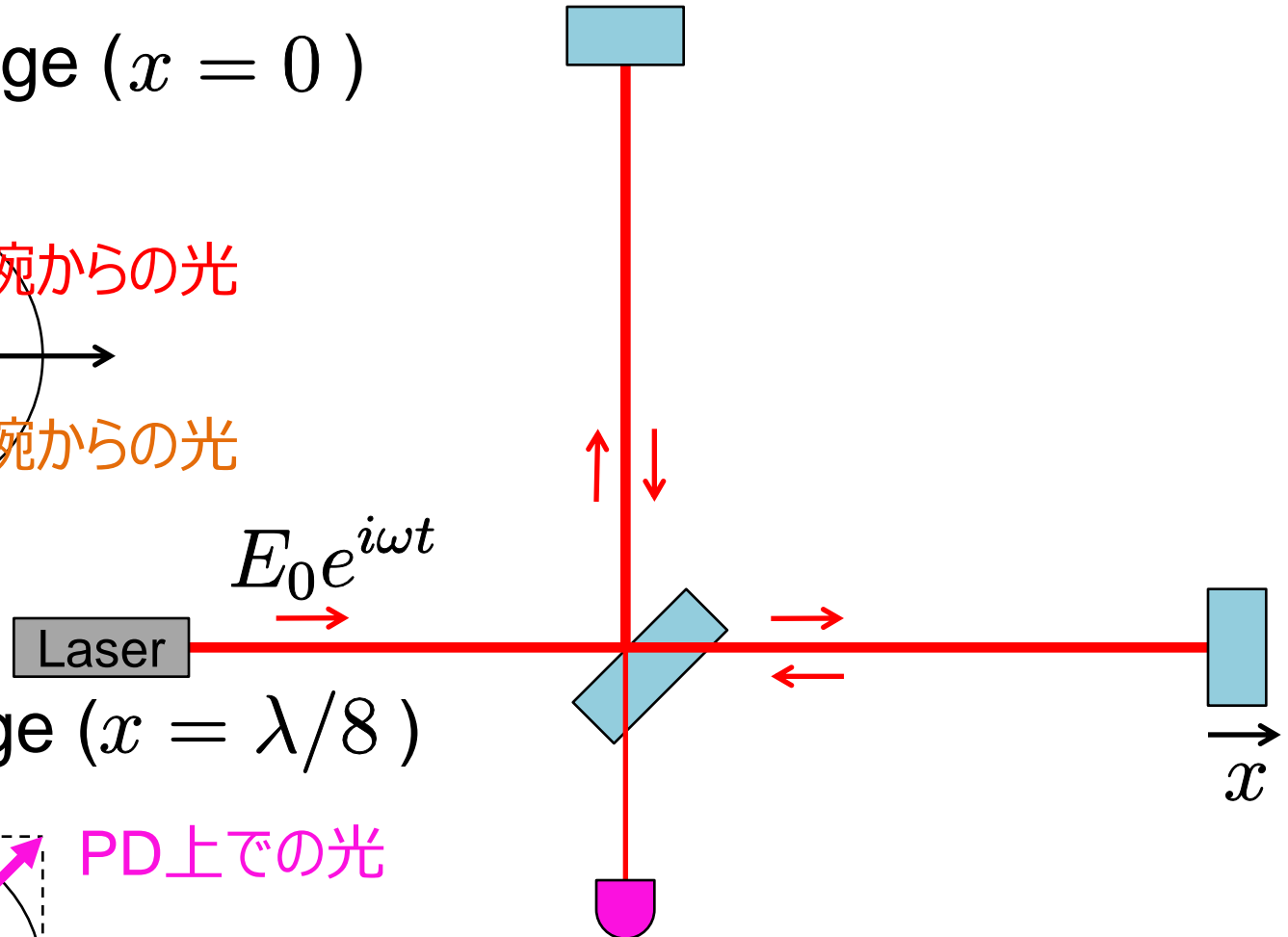
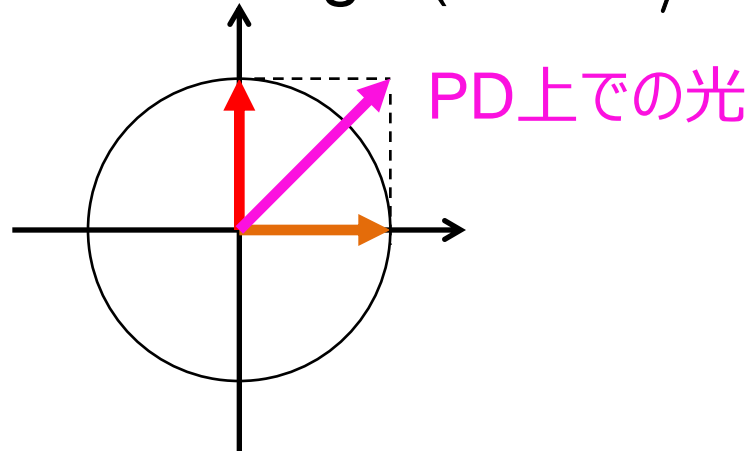


Michelson干渉計とPhasor

- dark-fringe ($x = 0$)



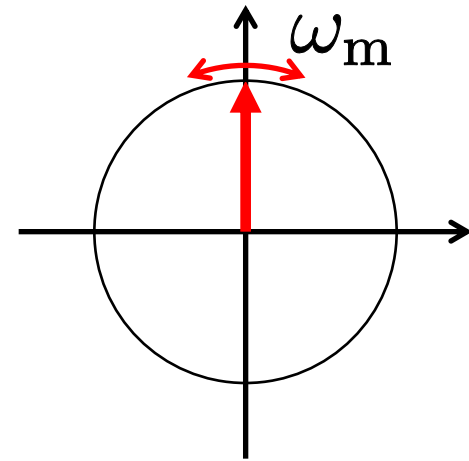
- mid-fringe ($x = \lambda/8$)



位相変調とサイドバンド

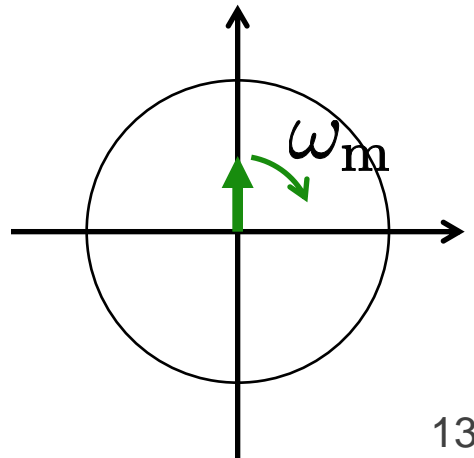
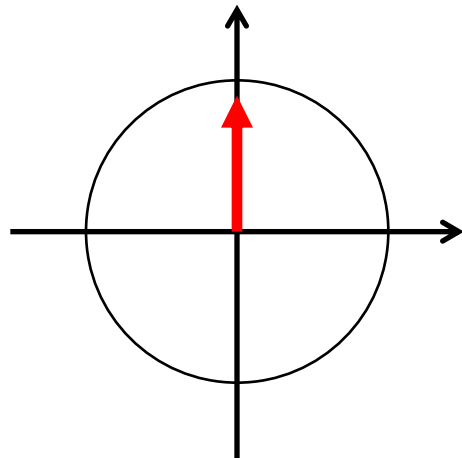
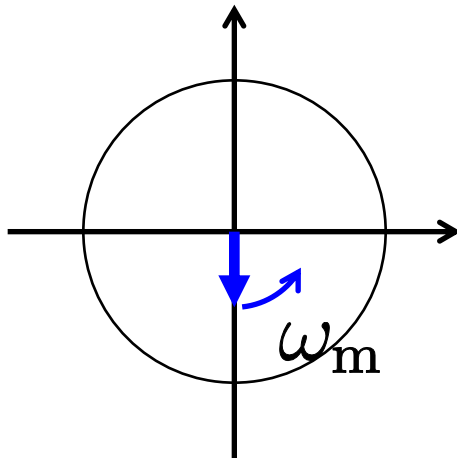
- 位相変調は2つのサイドバンドで近似的に表すことができる

$$E e^{i(\omega t + \beta \sin \omega_m t)}$$



ベッセル関数による展開(近似)

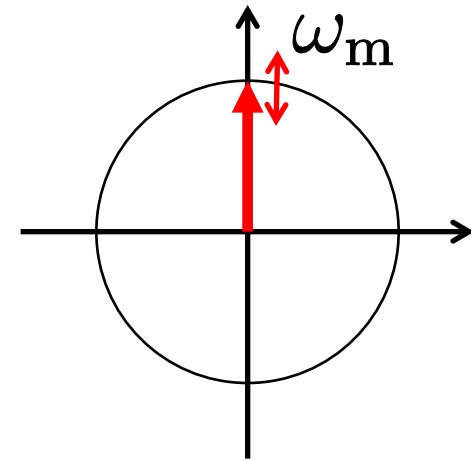
$$E [J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega + \omega_m)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega - \omega_m)t}]$$



強度変調とサイドバンド

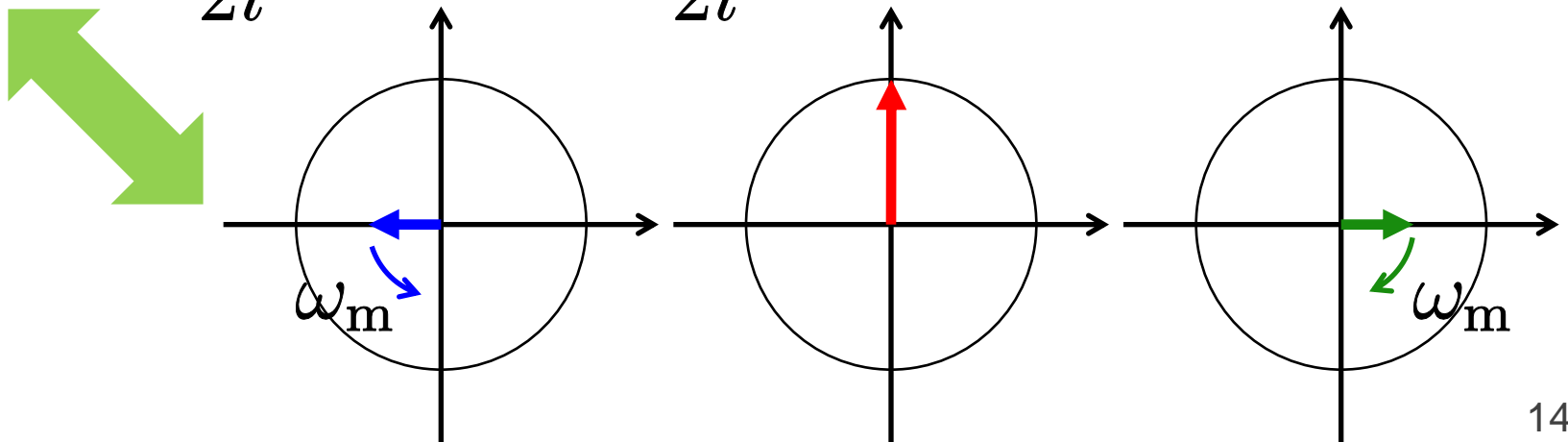
- 強度変調は2つのサイドバンドで表すことができる
- 強度変調のみPDで検出可能

$$E(1 + \beta \sin \omega_m t)e^{i\omega t}$$



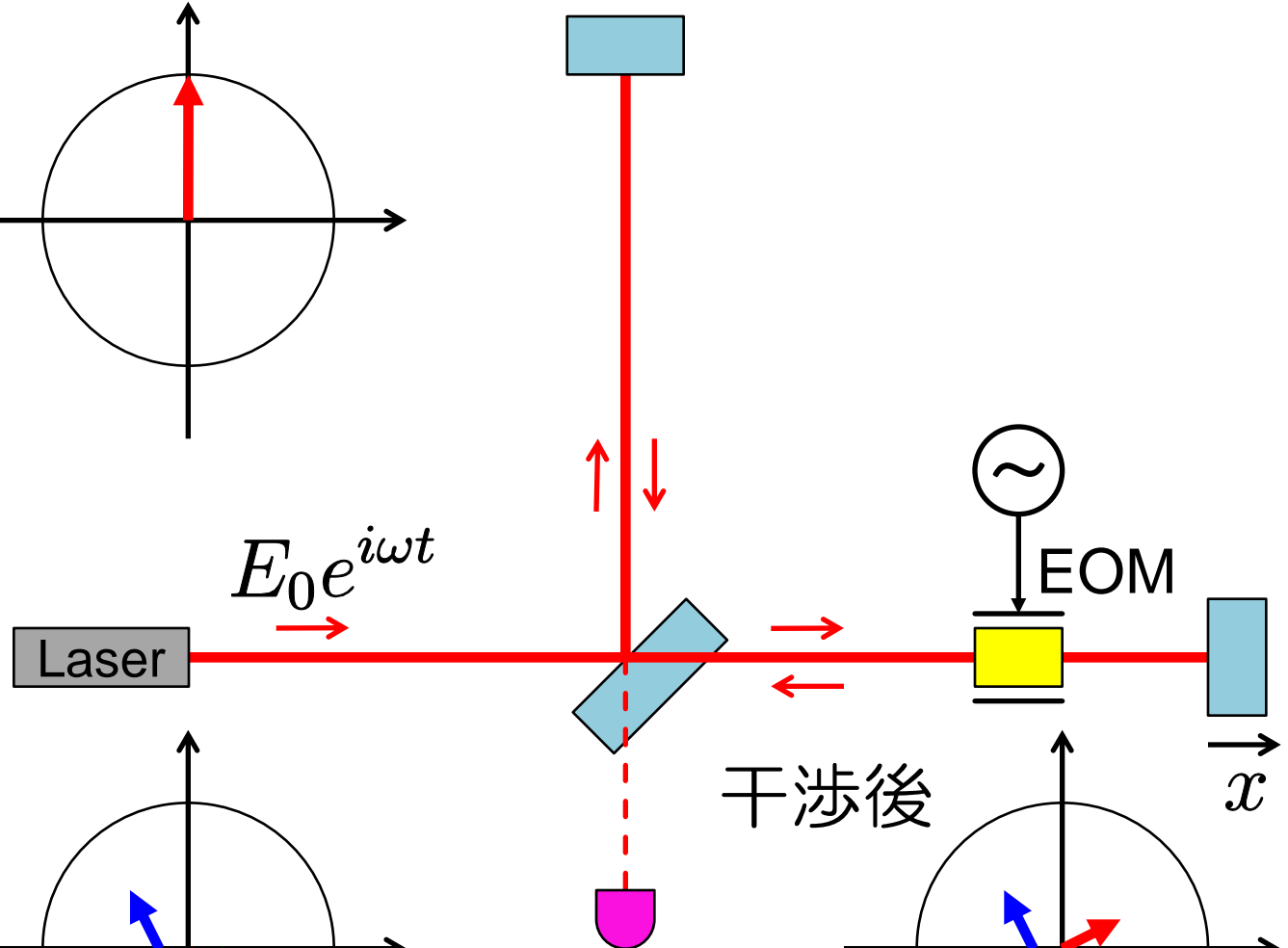
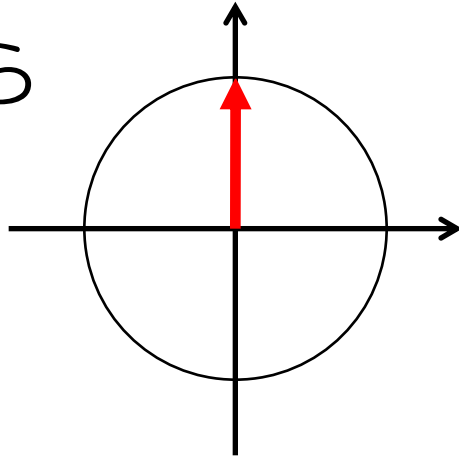
変形

$$E\left[e^{i\omega t} + \frac{\beta}{2i}e^{i(\omega+\omega_m)t} - \frac{\beta}{2i}e^{i(\omega-\omega_m)t}\right]$$

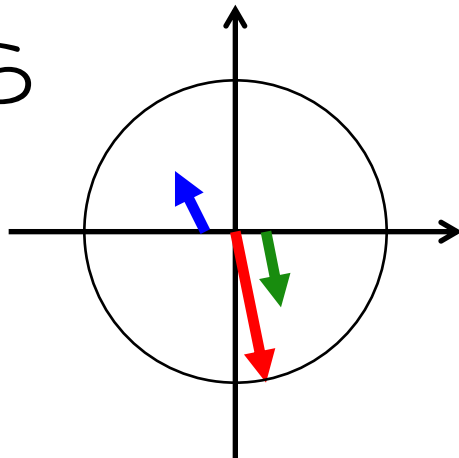


位相変調法とPhasor

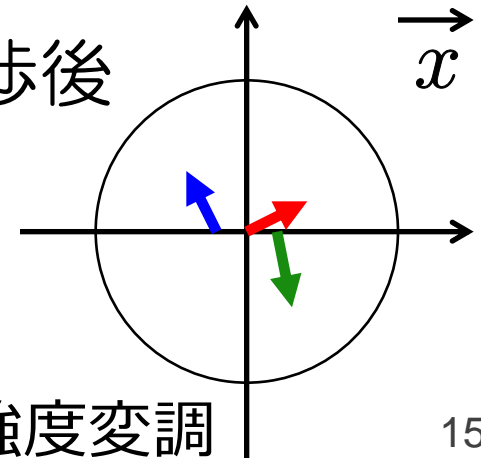
- Y腕から



- X腕から




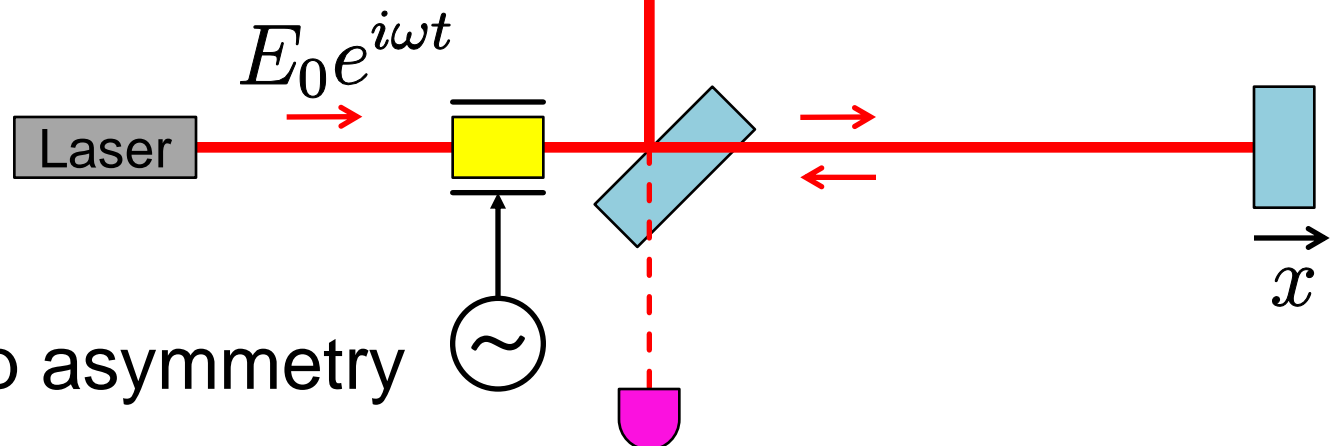
干渉後



強度変調

Pre-modulation法

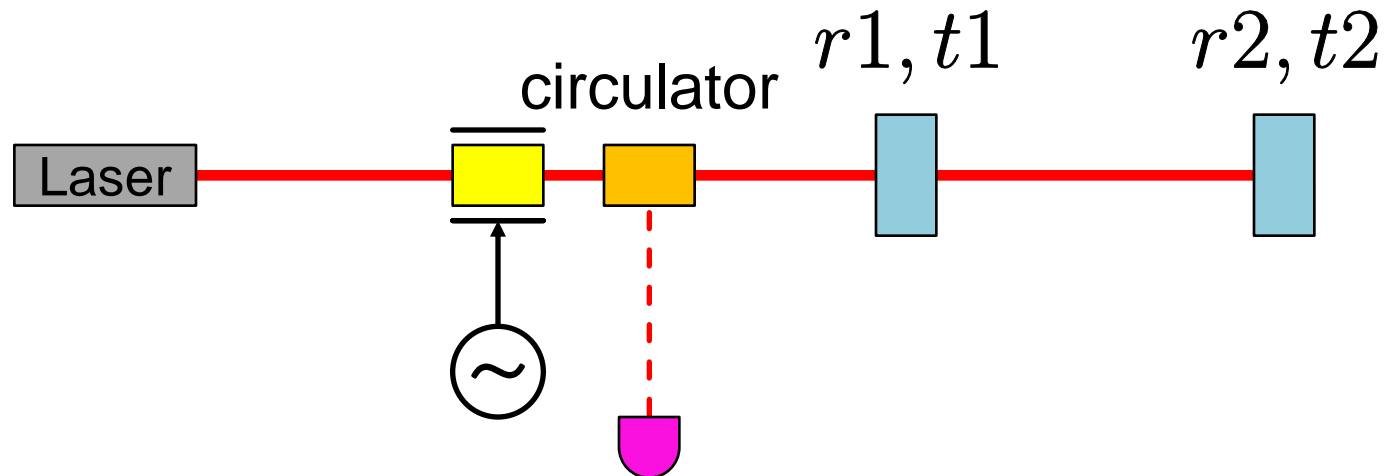
- 実際には片腕だけにEOM を入れるのは好ましくない
- BSの前に入れる
- これで信号取得はできる？



- Schnupp asymmetry 

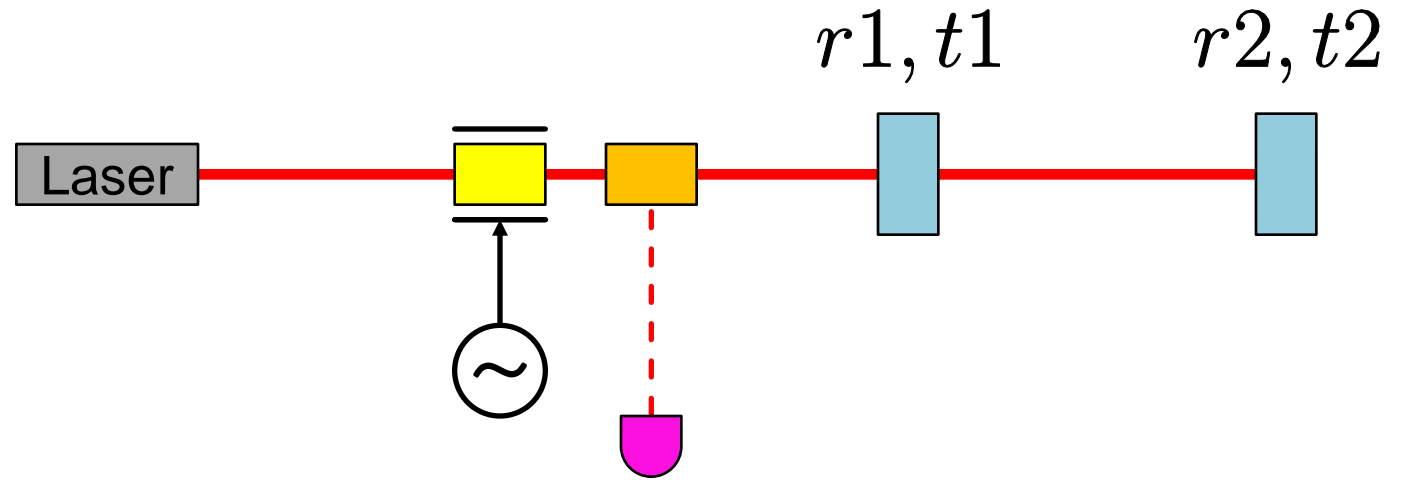
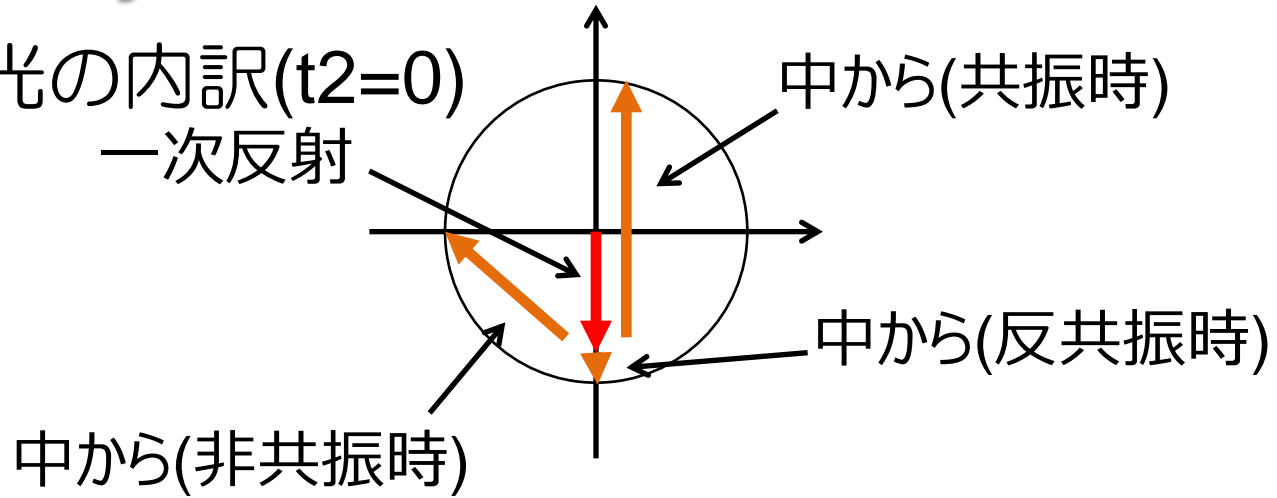
Fabry-Perot共振器

- 共振器長は波長の整数倍とする
- 反射光、透過光の表式は？
- 鏡反射時の位相反転に注意



Fabry-Perot共振器とPhasor

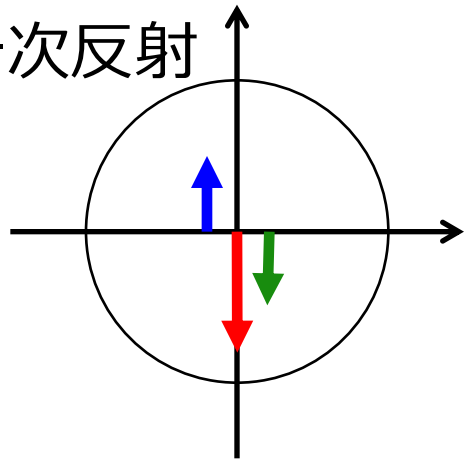
- 反射光の内訳($t_2=0$)
一次反射



Pound-Drever-Hall法

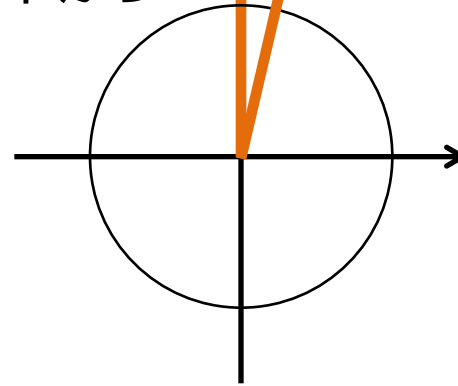
- 反射光の内訳

一次反射

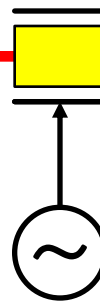


(共振時) (共振からずれ)

中から



Laser



$r1, t1$

$r2, t2$

- 共振からずれた時
のみ強度変調
→ 共振器長の誤差信号になる

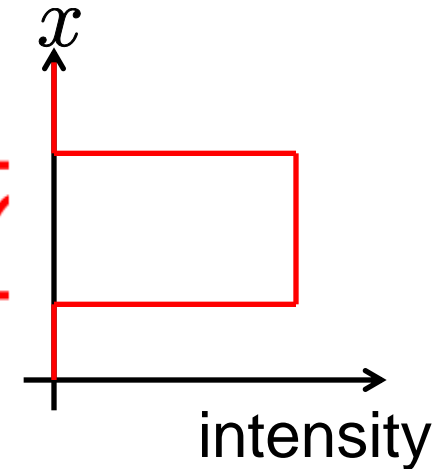
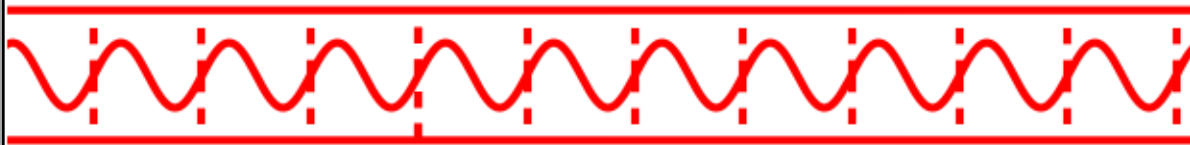
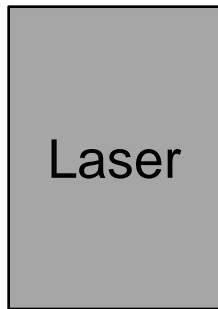
PDH法とMichelson信号の比較

- どちらも位相変調法だが、Fabry-Perot共振器では中からの光の位相変化が共振付近でのみ急

Gaussianビーム

- 「理想的な」平面波

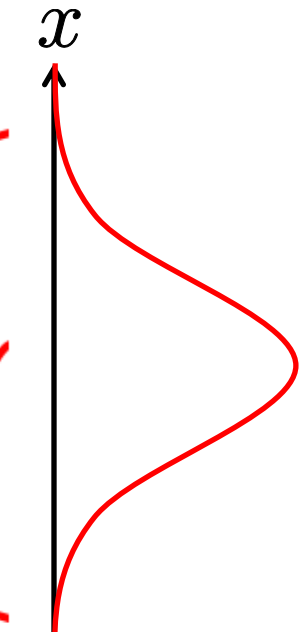
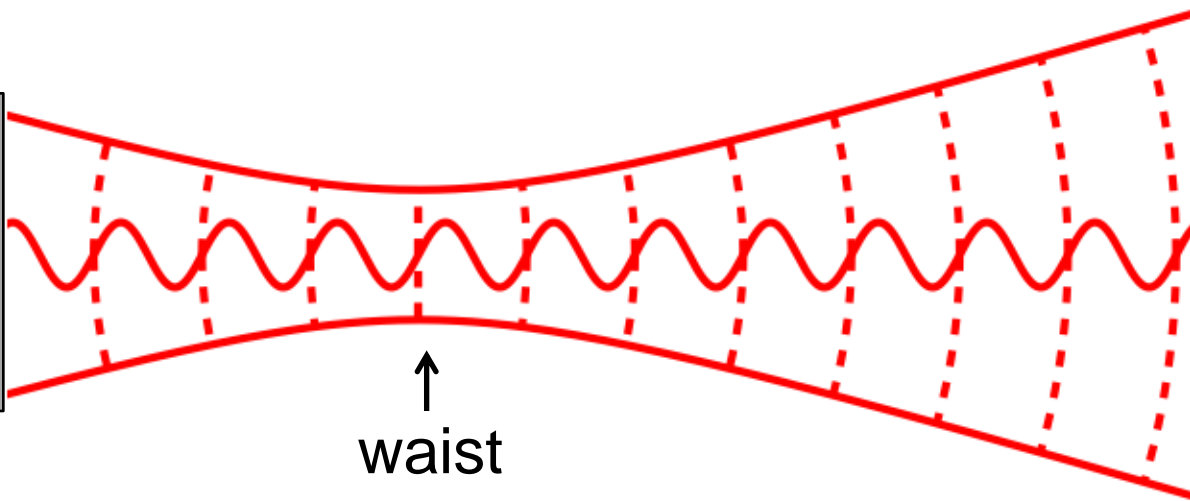
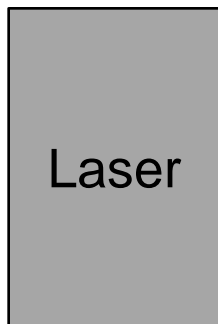
$$E = E_0 R(x, y) e^{i(\omega t - kz)}$$



- Gaussianビーム

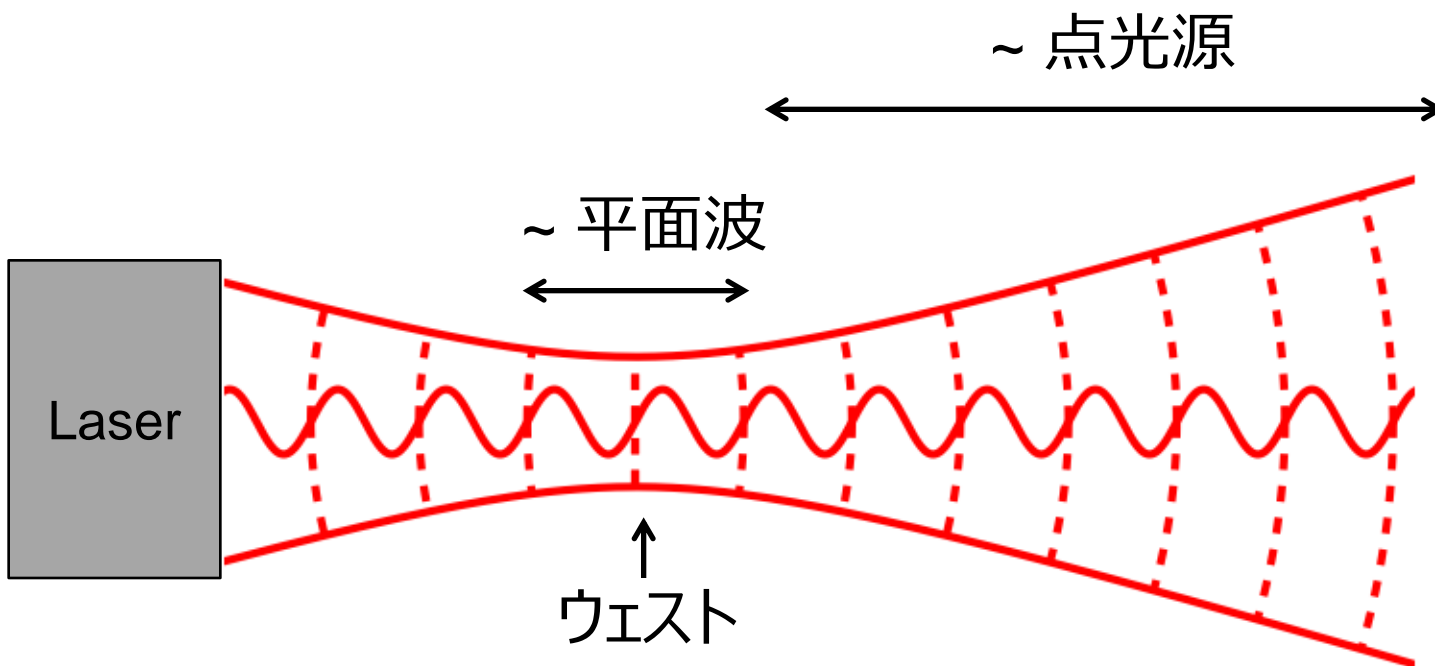
Gouy位相

$$E = E_0 U_{00}(x, y, z) e^{i(\omega t - kz + \eta(z))}$$



Near field と Far field

- Gaussian beamは
 - ウェストの近くでほぼ平面波
 - 遠くでは球面波(点光源)
- Gouy位相: 平面波からのずれ



Gaussianビームのパラメータ

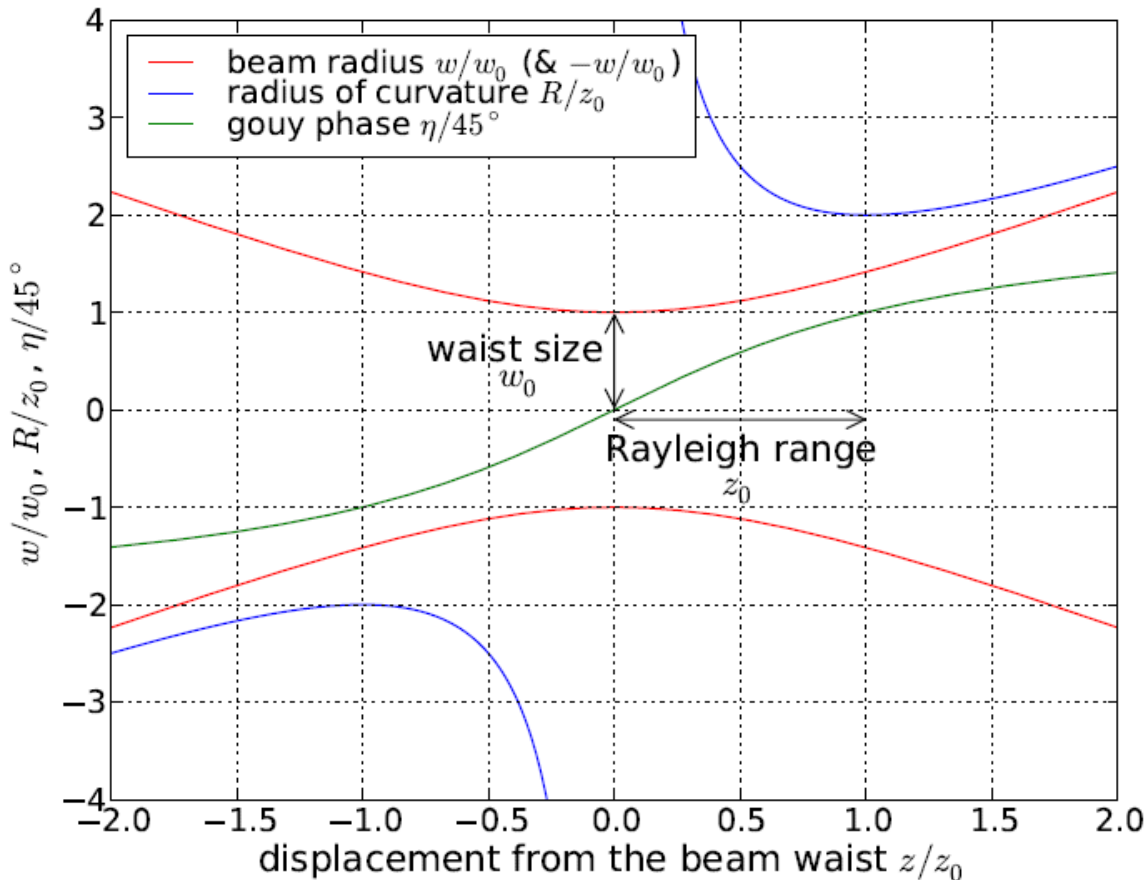
- Gouy位相は遠くでは 90°

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{2} \quad \text{Rayleigh レンジ}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad \text{ビーム半径}$$

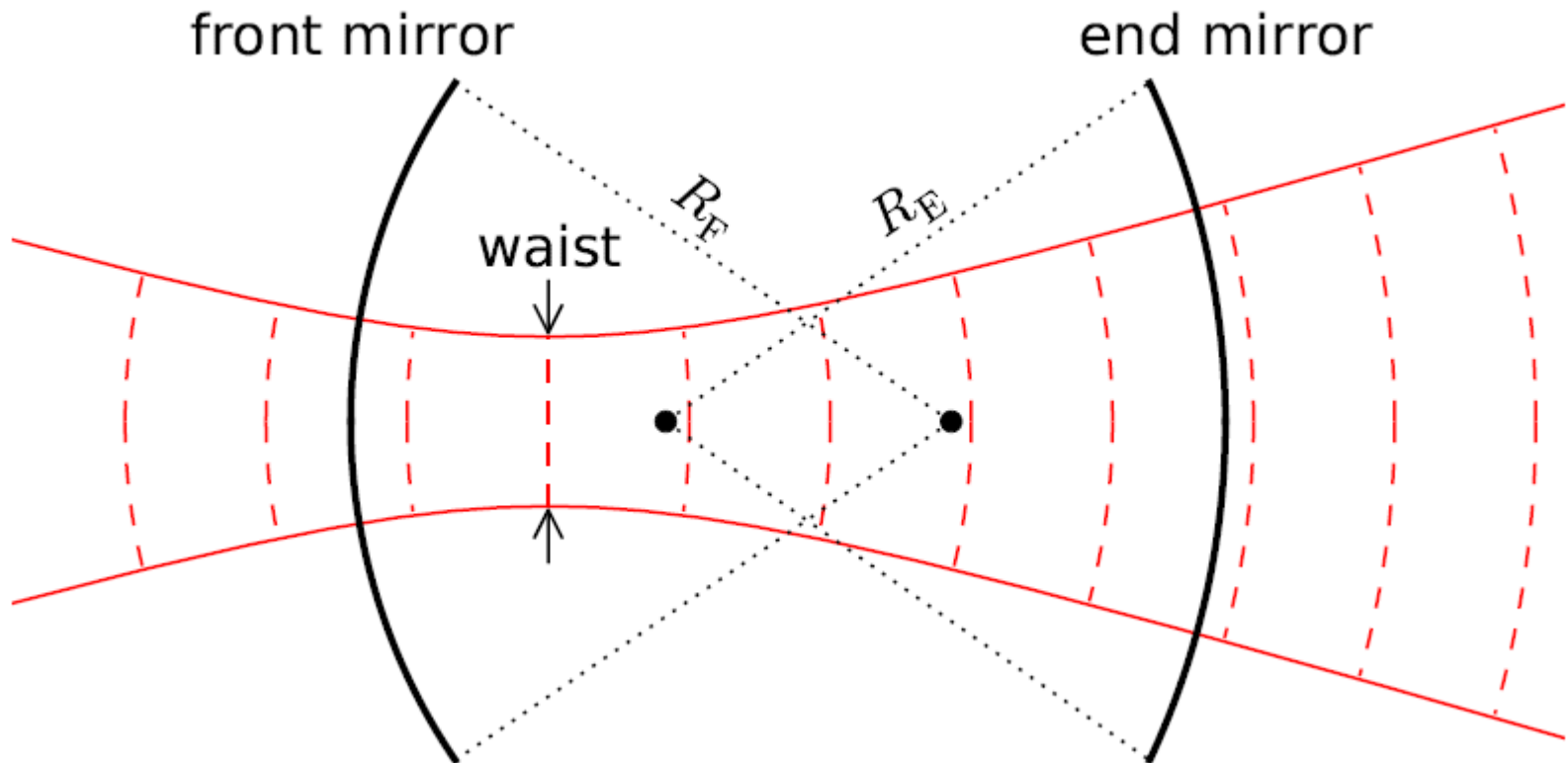
$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] \quad \text{波面の曲率半径}$$

$$\zeta(z) = \arctan \frac{z}{z_0} \quad \text{Gouy位相}$$



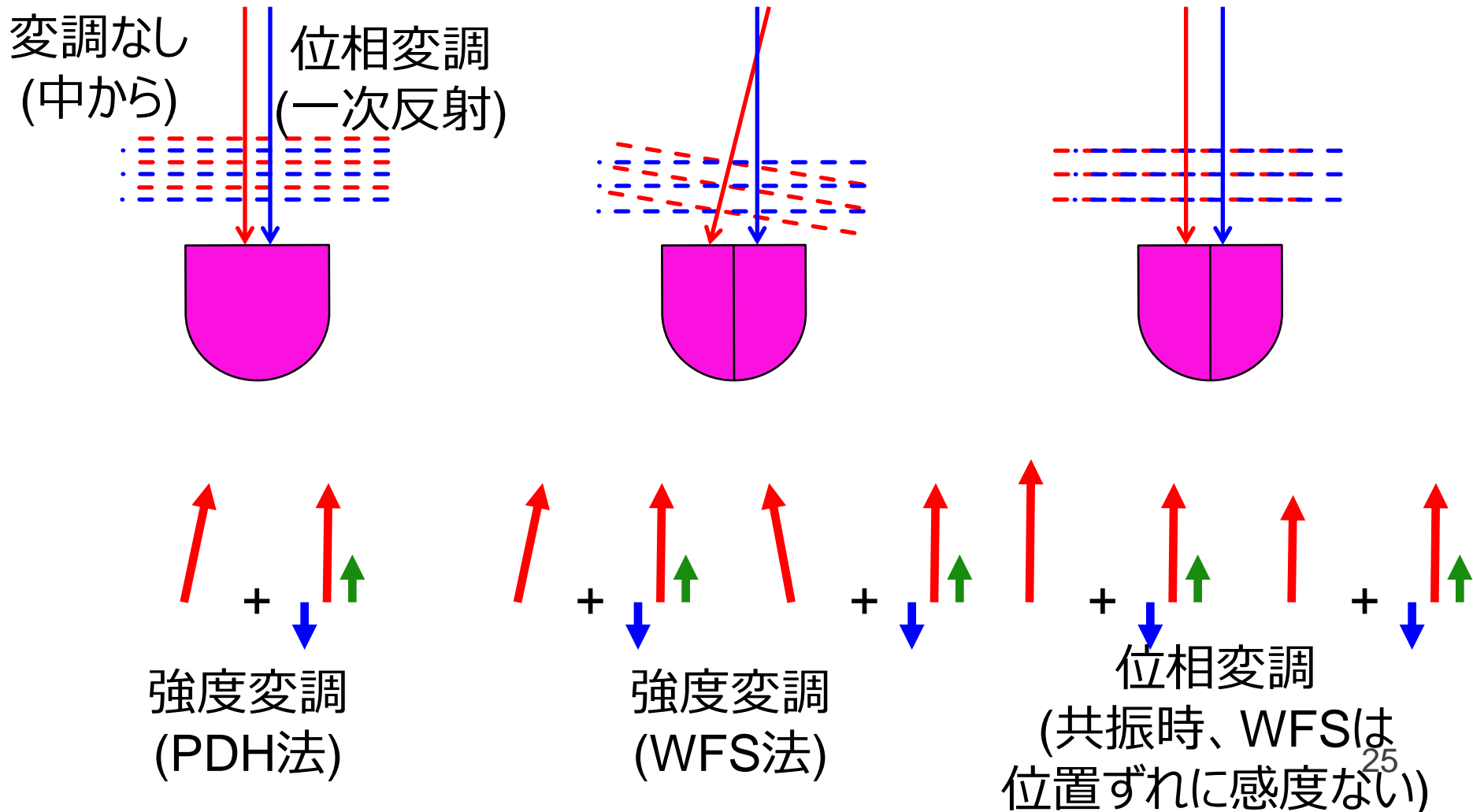
FP共振器の固有モード

- 波面の曲率に合うように鏡を置くと共振する
- 逆に、鏡を置くと共振するモードが決まる
(決まらない場合は共振器にならない)



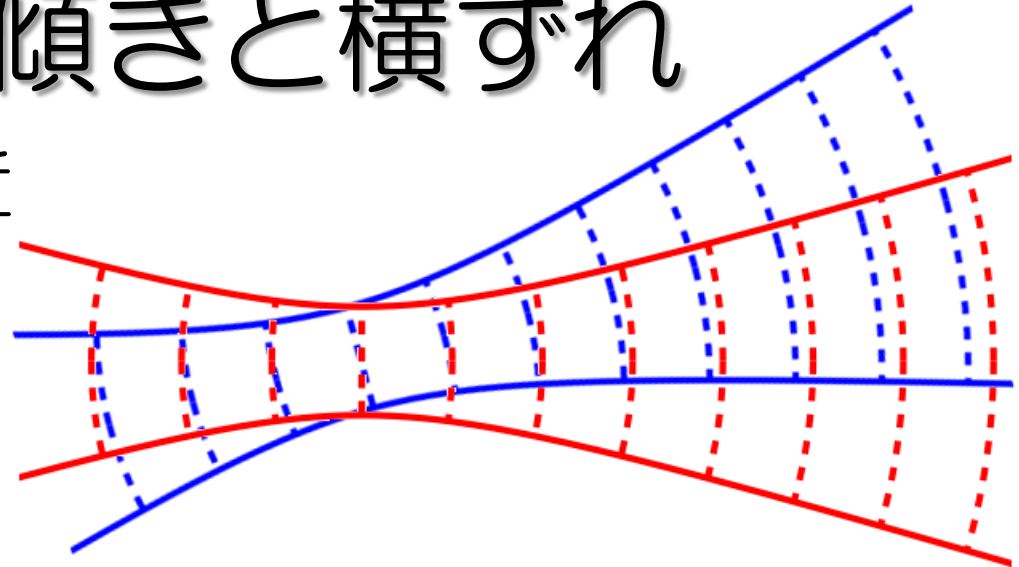
Wavefront sensor

- 位相変調がかかったビームと、そうでないビームの波面を比較する

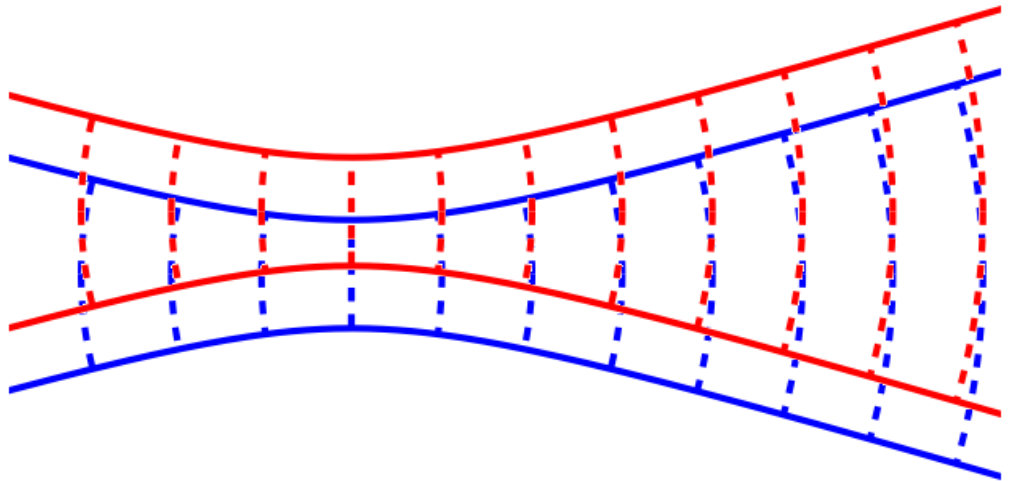


ビームの傾きと横ずれ

- WFSはウェスト付近ではビームの傾きに感度が高い



- WFSは遠くではビームの横ずれに感度が高い

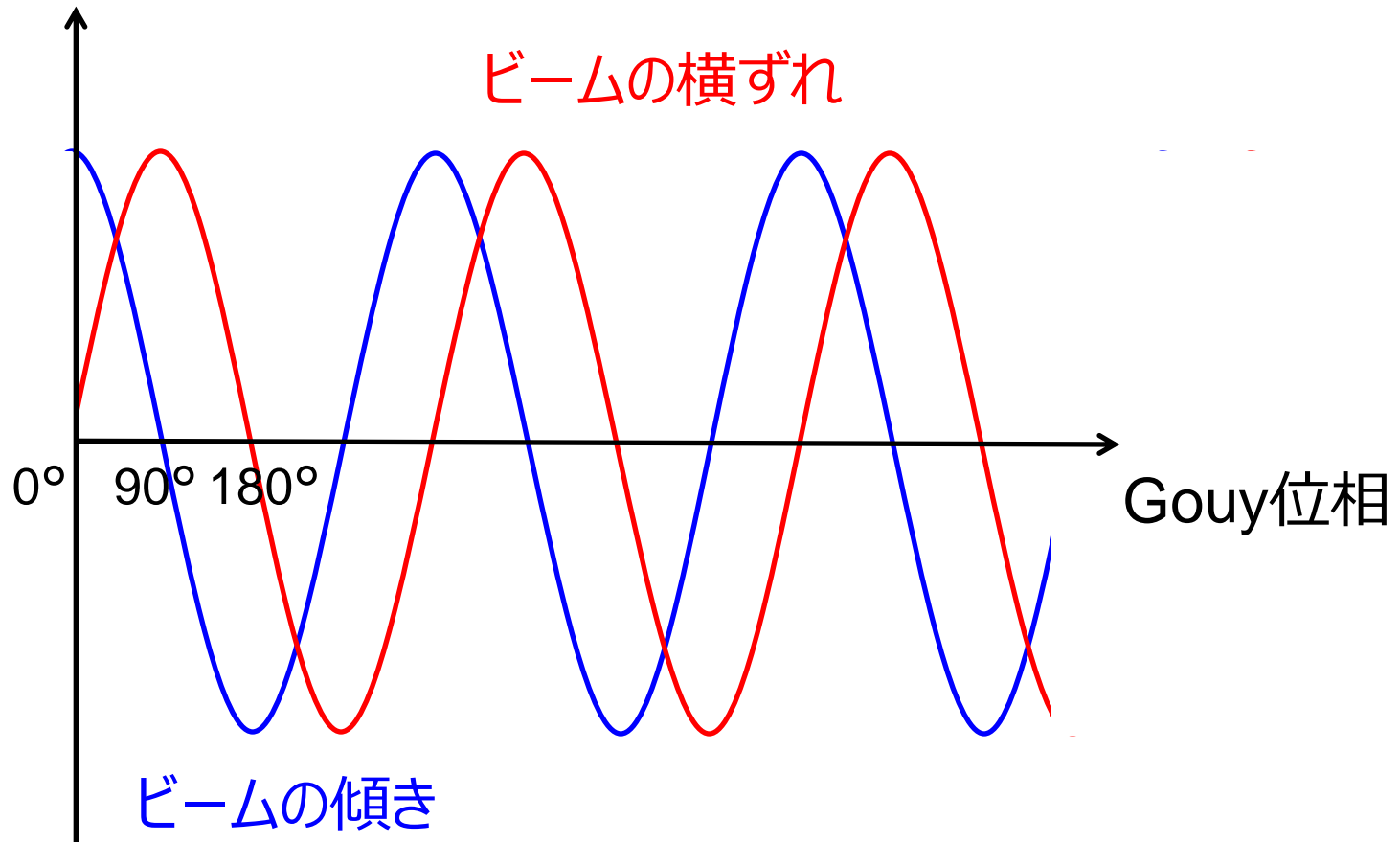


- 違う場所にQPDを置くことでビームのずれの違う自由度を見ることが出来る

WFS信号のGouy位相依存性

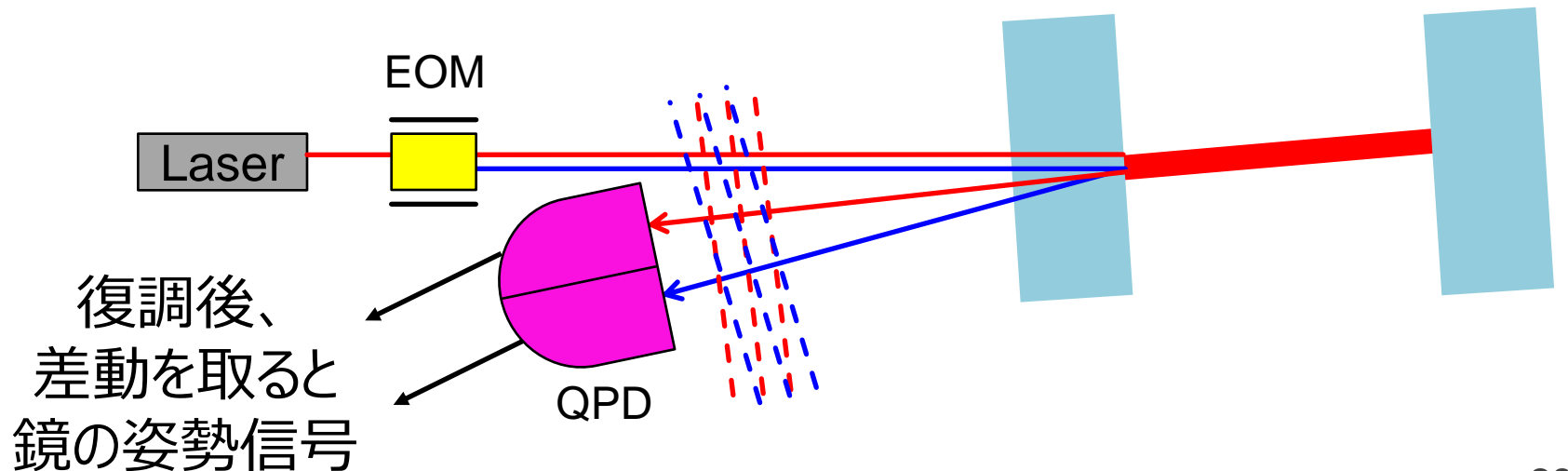
- 傾きはcos、横ずれはsinで変化する

WFS信号強度



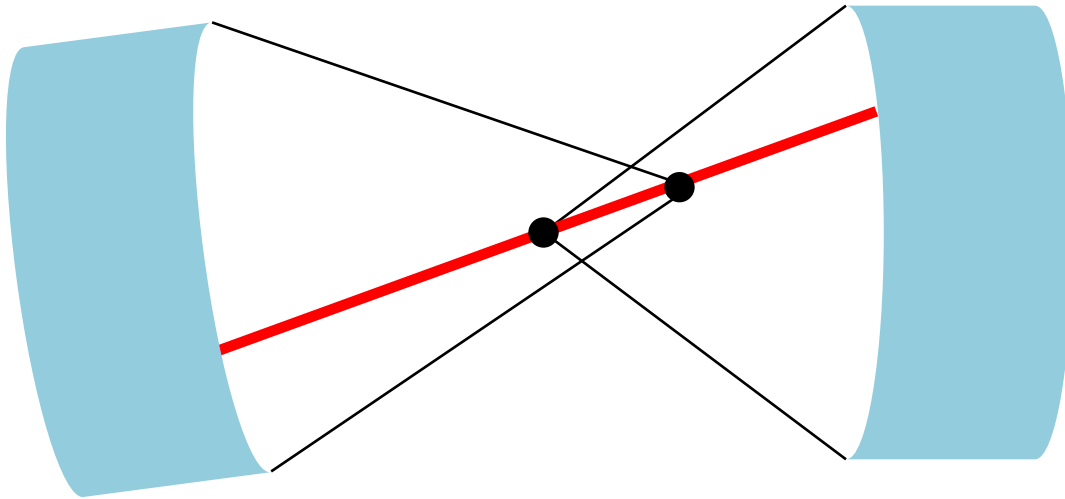
WFSによる鏡の姿勢信号取得

- 鏡が傾くと共振軸がずれる
- 位相変調がかかった一次反射光と共振器内から出てきた反射光の軸がずれる
→ WFSで検出できる



鏡の傾きと共振軸

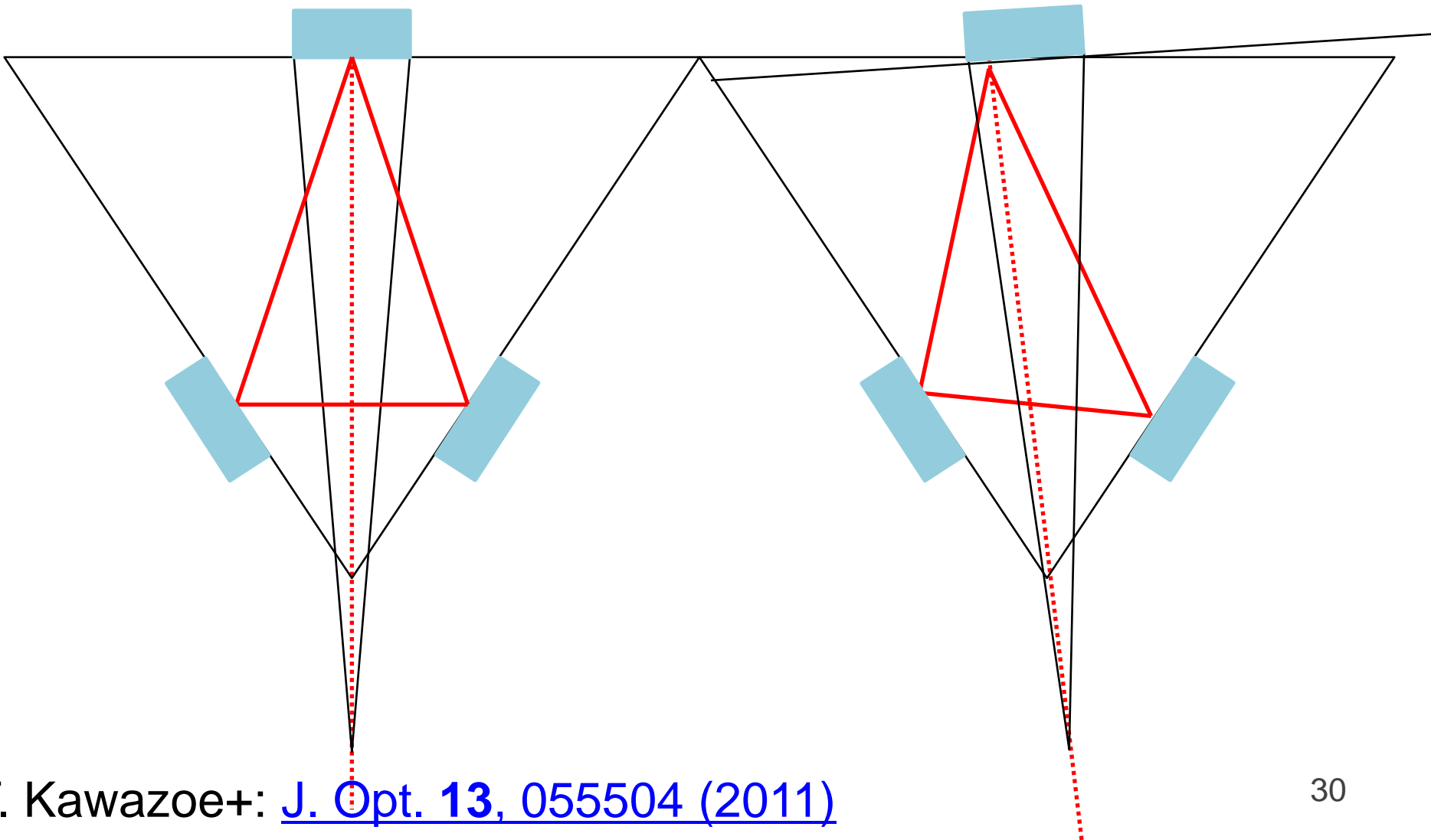
- 鏡の曲率中心を結んだ線が共振軸



- 例題: 平面鏡と球面鏡の場合は？
同じ球面鏡の場合は？

三角共振器の場合は？

- 鏡面を伸ばした交点と、曲率中心で決まるはず



高次モード

- WFS信号量の定量的な計算には高次モードの理解が必要
- HG00とHG01の位相差はGouy位相に等しい
- 00が共振している時に高次モードも共振するとは限らない (共振器のモード選択性)
→モードクリーナー

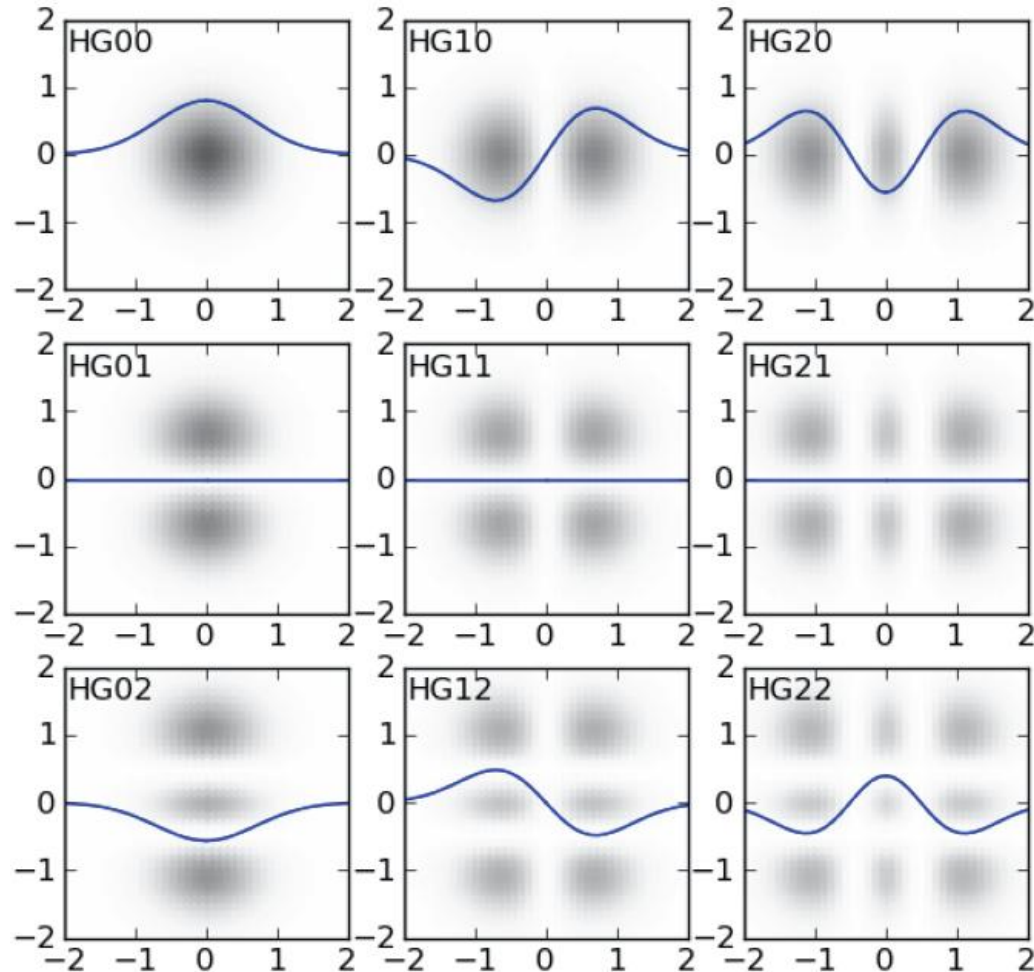


図 1: Hermite-Gaussian モード

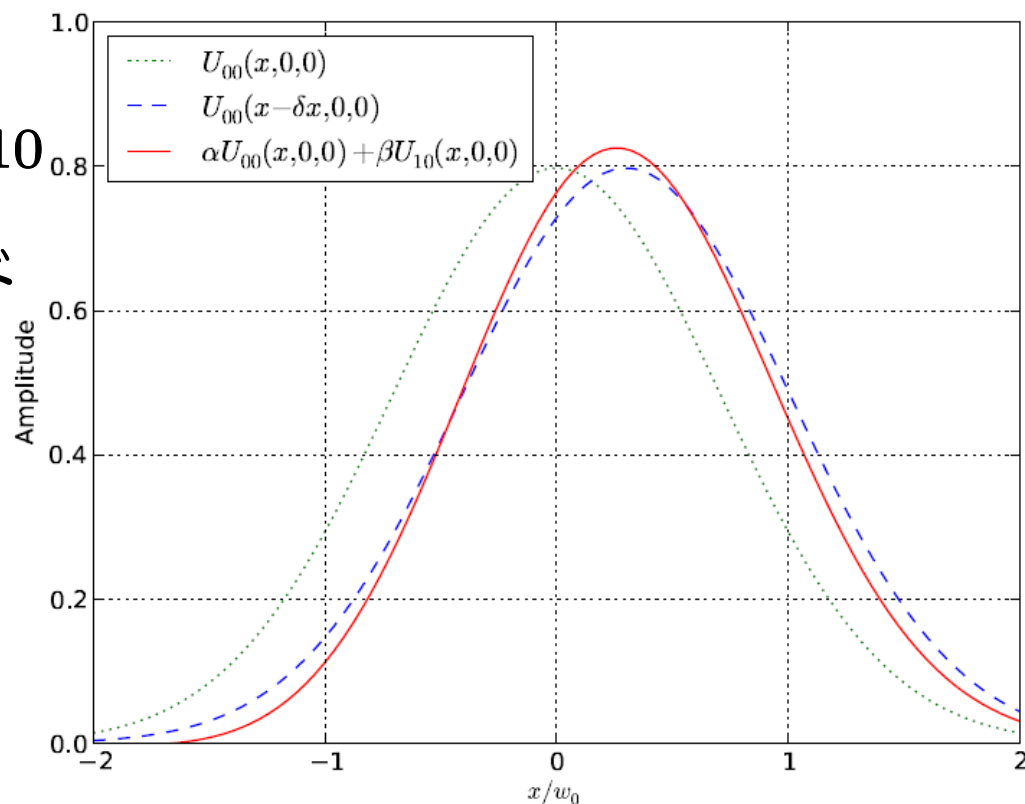
ビームのずれと高次モード

- ビームのずれは高次モードで表すことができる

$$U_{00}^{\text{shift}} \simeq U_{00} + \frac{\delta x}{w_0} U_{10}$$

$$U_{00}^{\text{tilt}} \simeq U_{00} + i \frac{\delta \theta}{\alpha_0} U_{10}$$

- WFSは01 / 10モードを検出しているとも言える
- 00モードと01 / 10モードの位相差はGouy位相に等しい



32
図 2: 基本モードの平行移動を高次モードで展開した様子