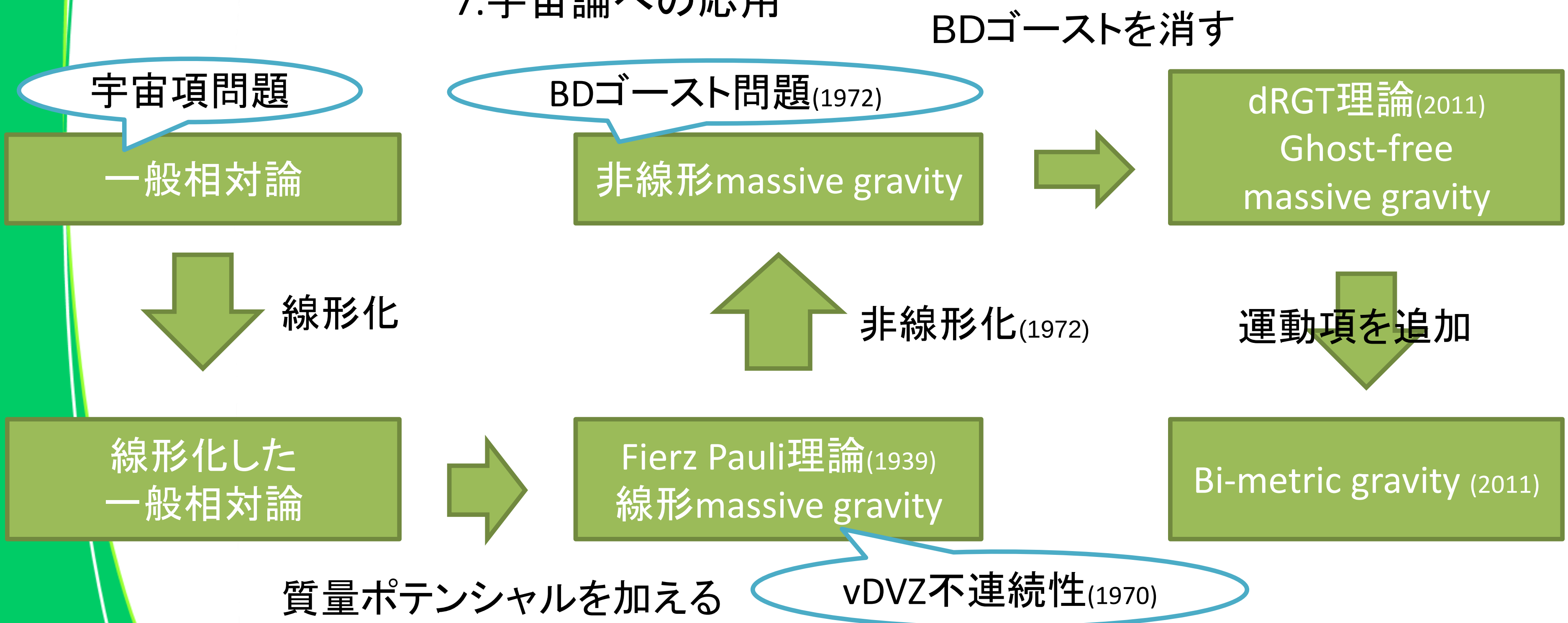
Massive Gravityの基礎と宇宙論

吉田大介　東工大

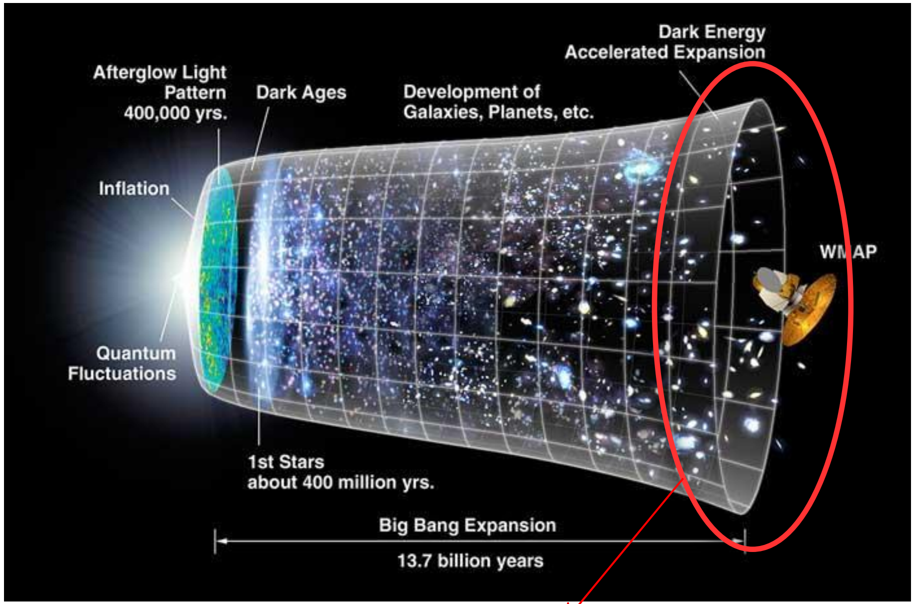
2013.8.23 第58回 重力波交流会

アウトライン

1. イントロダクション:宇宙項問題
2. 一般相対論とmassless graviton
3. Fierz,Pauliの線形massive gravity
4. 非線形massive gravity
5. ghost-free massive gravity
6. bi-metric gravity
7. 宇宙論への応用



1. イントロダクション：宇宙項問題①



現在の宇宙は加速的に膨張している

⇩

一般相対論でこれを説明するには
負の圧力を持ったダークエネルギーが必要

1. イントロダクション：宇宙項問題②

解決案A：ダークエネルギーを見つける

⇒ 真空のエネルギーが有力候補

→ 宇宙項

しかし、

観測と合う宇宙項の値 ⇔ 標準理論を用いて計算された真空のエネルギーの値

宇宙項問題

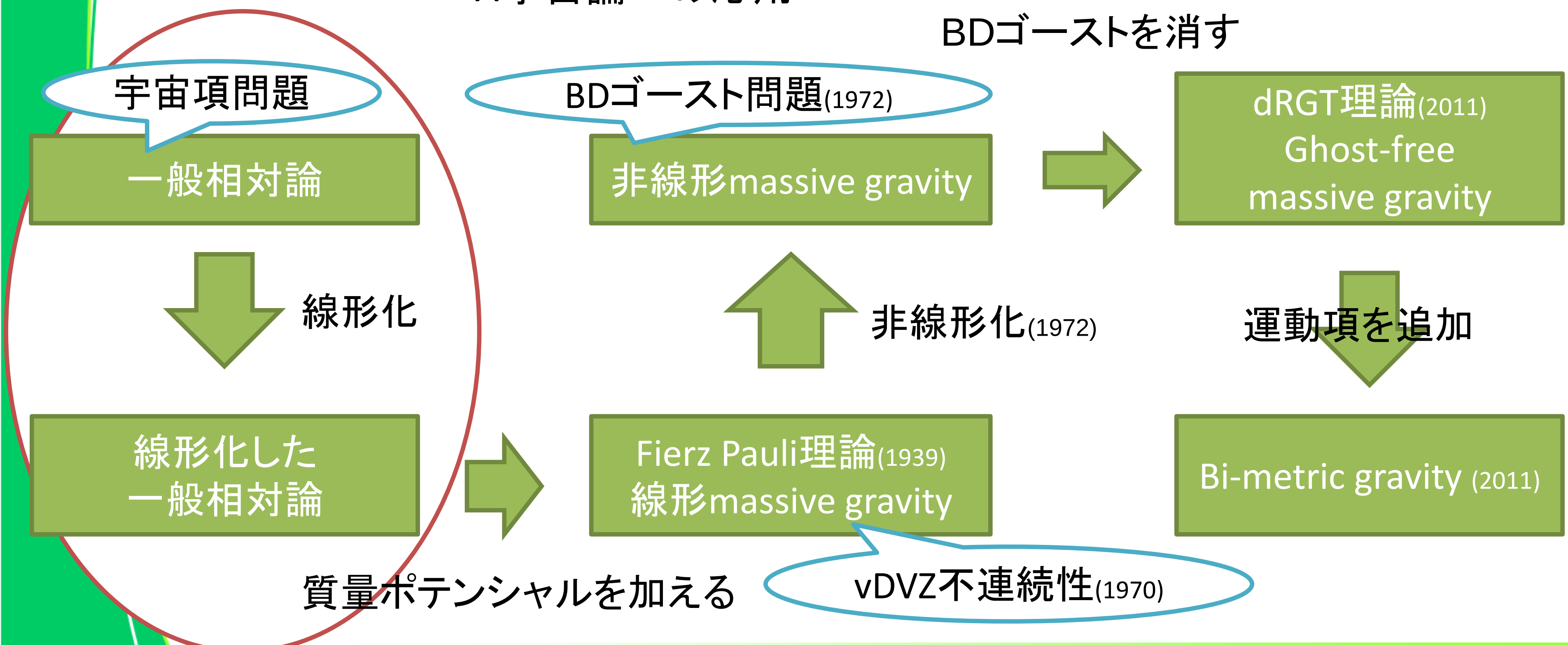
解決案B：通常の物質だけで加速膨張するような、新しい重力理論を考える

⇒ ***massive gravity***

質量を持ったgravitonが媒介する重力理論

massive gravityの基礎と宇宙論

1. イントロダクション:宇宙項問題
2. 一般相対論とmassless graviton
3. Fierz,Pauliの線形massive gravity
4. 非線形massive gravity
5. ghost-free massive gravity
6. bi-metric gravity
7. 宇宙論への応用



2. 一般相対論とmassless graviton①

一般相対論の解析力学

作用: $S_{GR} = S_{EH} + S_{matter}$

Einstein-Hilbert作用:

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G}\int dx^4 \sqrt{-g}\, R$$

Ricchi スカラー

重力定数

変分

Einsteinテンソル

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\, G_{\mu\nu}$$

$$S_{\mathrm{matter}} = \int dx^4 \sqrt{-g}\, L$$

変分

エネルギー運動量テンソル

$$\frac{\delta S_{matter}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{\mu\nu}$$

運動方程式 $\frac{\delta S_{GR}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ ⇔ Einstein方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$

2. 一般相対論とmassless graviton②

線形GR: $S_{GR,L} = S_{EH,L}\ (+S_{matter})$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$S_{EH,L} = \frac{1}{16\pi G}\int dx^4 \left[-\frac{1}{4}h_{\mu\nu,\rho}h^{\mu\nu,\rho} + \frac{1}{2}h_{\nu\rho,\mu}h^{\mu\rho,\nu} - \frac{1}{2}h_{,\nu}h^{\mu\nu}{}_{,\mu} + \frac{1}{2}h_{,\mu}h^{,\mu}\right]$$

ゲージ変換 $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ で作用は不変

➡ gauge を固定する(radiation gauge)

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0\,,\, h_{0\nu} = 0,\ h = 0$$ 8個の条件式

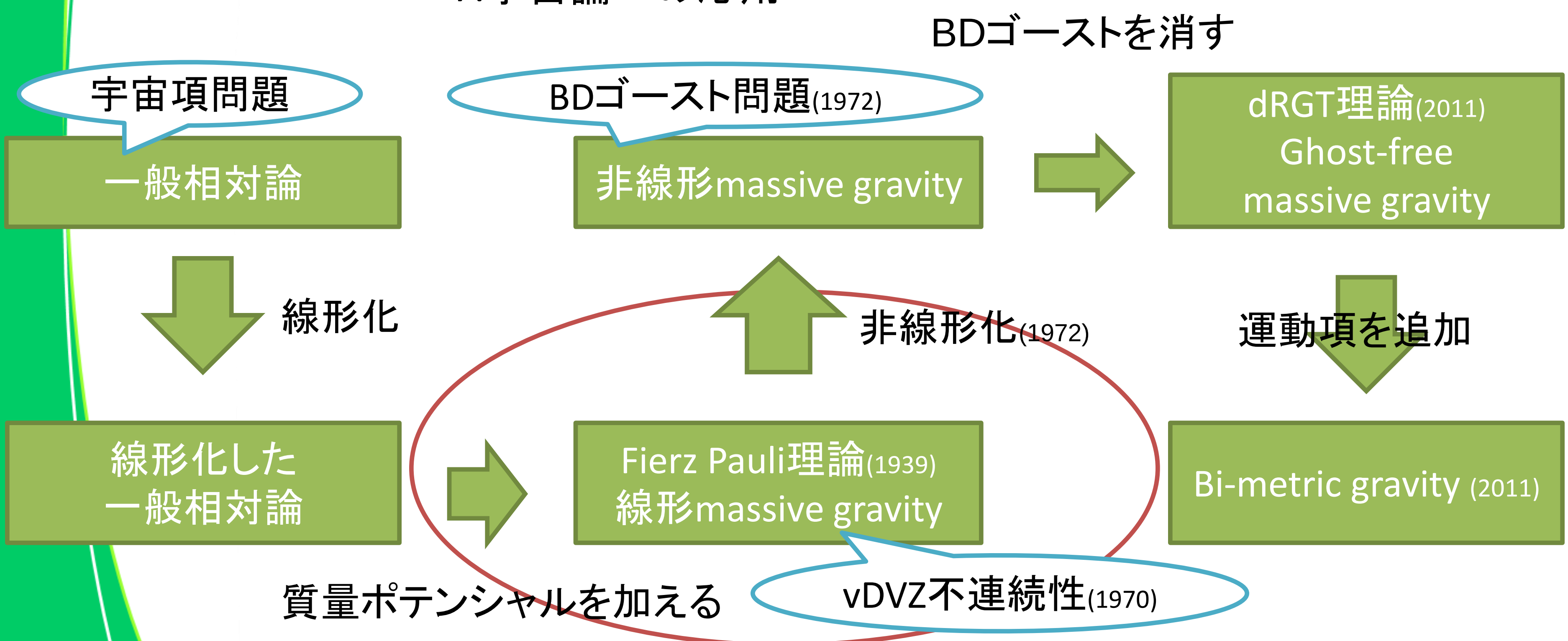
真空中($S_{matter} = 0$)の運動方程式は

$$\partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} = 0$$ massless KG方程式

➡ gravitonは10-8=2個のmassless場の自由度を持つ！

massive gravityの基礎と宇宙論

1. イントロダクション：宇宙項問題
2. 一般相対論とmassless graviton
3. Fierz,Pauliの線形massive gravity
4. 非線形massive gravity
5. ghost-free massive gravity
6. bi-metric gravity
7. 宇宙論への応用



3.Fierz-Pauliの線形massive gravity①

線形GR : $S_{GR,L} = S_{EH,L} \quad (+S_{matter})$

質量ポテンシャルを導入
Fierz,Pauli(1939)

FP理論 : $S_{FP} = S_{EH,L} + S_{mass,L}(+S_{matter})$

$$S_{mass,L} = \frac{1}{16\pi G}\int dx^4 \left[-\frac{1}{4}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2)\right]$$

真空中の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\partial^\mu(\text{運動方程式})_{\mu\nu} : \ \partial^\mu h_{\mu\nu} - h = 0 \\ &\eta^{\mu\nu}(\text{運動方程式})_{\mu\nu} : h = 0 \end{aligned}\right\} \text{5個の条件式}$$

$(\text{運動方程式})_{\mu\nu} : (\partial_\rho\partial^\rho - m^2)h_{\mu\nu} = 0$ 　質量mのKG方程式

この作用はゲージ変換に対して不変でない

⇒ ゲージ自由度はない

gravitonは10-5=5個のmassive場の自由度を持つ！

3.Fierz-Pauliの線形massive gravity②

FP理論のテスト: 質点の作る重力場

$$S_{matter} = \int d^4x\, h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \qquad T_{\mu\nu} = M\delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta^3(x^i)$$

運動方程式を解くと・・・

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{8MG}{3}\frac{e^{-mr}}{r} \to \frac{8MG}{3}\frac{1}{r} \\ h_{0i} &= 0 \\ h_{ij} &= \frac{8MG}{3}\frac{e^{-mr}}{r}\delta_{ij} \to \frac{8MG}{3}\frac{1}{r}\delta_{ij} \end{aligned}$$

Newtonポテンシャル

FP理論: $\phi = -\frac{1}{2}h_{00} = -\frac{4}{3}\frac{MG}{r}$ $\qquad \psi = -\frac{1}{6}h_{ii} = -\frac{8}{3}\frac{MG}{r}$

GR: $\phi = -\frac{MG}{r}$ $\qquad \psi = -\frac{MG}{r}$

Gravitonの質量をどんなに小さくしても、一般相対論と一致しない(vDVZ不連続性)

van Dam , Veltman (1970) , Zakharov (1970)

この問題を解決するためには、非線形項を考慮する必要がある！

3.Fierz-Pauliの線形massive gravity③

FP理論：　$S_{FP} = S_{EH,L} + S_{mass,L} (+S_{matter})$

非線形理論への（もっとも簡単な）拡張

(最も単純な)非線形MG:　$S_{MC} = S_{EH} + S_{mass,L} (+S_{matter})$

この理論で、質点の作る重力場を計算すると・・・

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -B(r)dt^2 + C(r)dr^2 + A(r)r^2 d\Omega^2$$

$$B(r) = 1 - \frac{8}{3}\frac{GM}{r}\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{r_V}{r}\right)^5 + \cdots\right)$$

$$C(r) = 1 - \frac{8}{3}\frac{GM}{r}\left(1 + 14\left(\frac{r_V}{r}\right)^5 + \cdots\right)$$

$$A(r) = 1 - \frac{4}{3}\frac{GM}{r}\left(1 - 4\left(\frac{r_V}{r}\right)^5 + \cdots\right)$$

$$r \ll r_V \equiv \left(\frac{GM}{m}\right)^{1/5}$$

で非線形項を無視できなくなる！

さらに $m \to 0$ で $r_V \to \infty$

massless極限では全領域で非線形項が重要

線形項の不連続性の議論に意味はない。

Vainstein(1972)

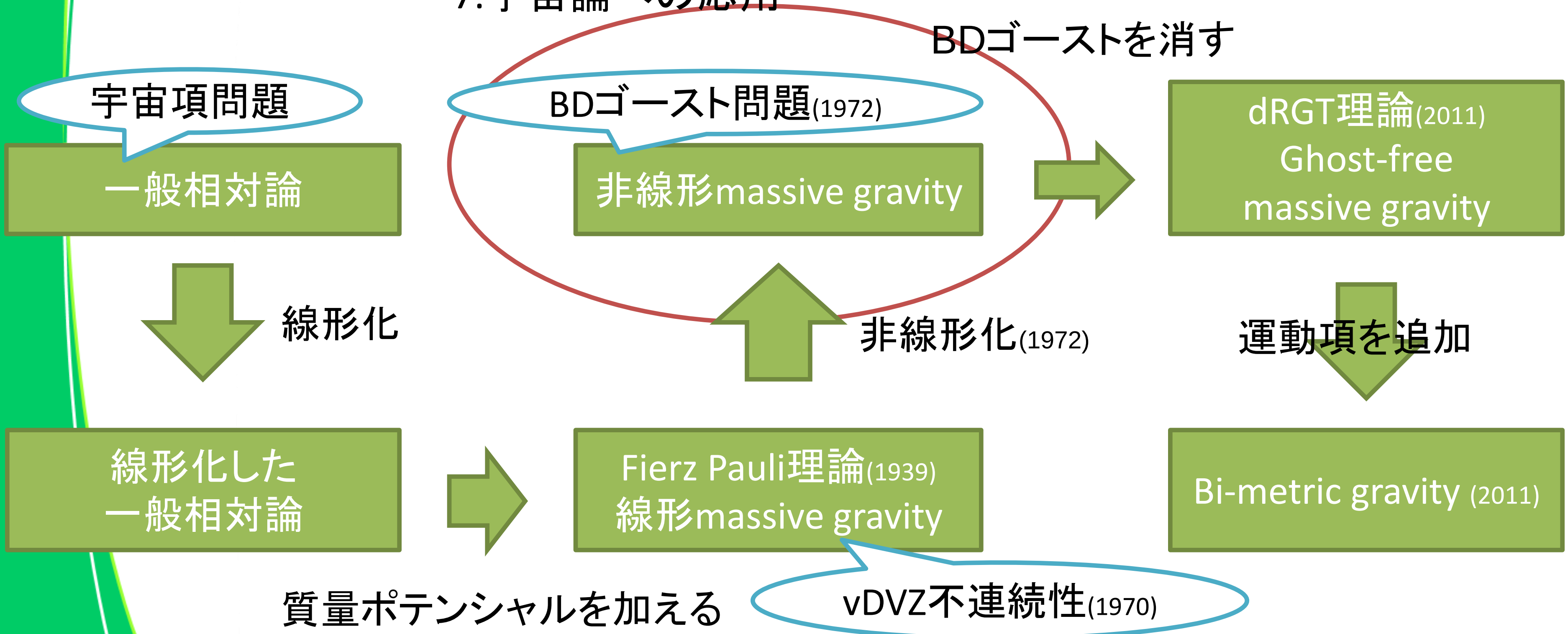
非線形項を考慮すれば、vDVZ不連続性は問題でない！

3.Fierz-Pauliの線形massive gravity まとめ

- FP理論では、gravitonは質量を持ち、自由度は5つある。
- FP理論は、質量をどんなに小さくとっても一般相対論と一致しないという問題を持つ
- これは、非線形項を無視していたことが原因

massive gravityの基礎と宇宙論

1. イントロダクション:宇宙項問題
2. 一般相対論とmassless graviton
3. Fierz,Pauliの線形massive gravity
4. 非線形massive gravity
5. ghost-free massive gravity
6. bi-metric gravity
7.宇宙論への応用



4. 非線形massive gravity ①

BDゴースト問題

Boulware,Deser (1972)

非線形massive gravityはゴーストと呼ばれる非物理的な自由度を持ってしまう

運動エネルギーの符号がマイナスの自由度
ゴーストがあると、系に安定な解がなくなってしまう

4. 非線形massive gravity ②

Stuckelberg場を導入しゲージ対称性を持った作用に書き換えると、
BDゴーストの自由度が具体的に表わせる。

Stuckelberg trick

	場の数	対称性	物理的な自由度
元の作用:	graviton(5自由度)	ゲージ対称性なし	5自由度
新しい作用:	graviton(5自由度) 新しく場を導入(4自由度)	ゲージ対称性あり(-4自由度)	5自由度

具体的には次の置き換えで、ゲージ対称性を持った作用となる

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \to H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$$

fiducial metric: $f_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b \eta_{ab}$　　ϕ^a:Stuckelbergスカラー場

ユニタリゲージ$\phi^a = x^a$ にゲージ固定すると元の作用になる

4. 非線形massive gravity ③

$$h_{\mu\nu} \to H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$$

fiducial metric: $f_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b \eta_{ab}$

ϕ^a:Stuckelbergスカラー場

Stuckelbergスカラー場を次のように書き直すと、BDゴーストの原因が明らかになる

$$\phi^a = x^a - (A^a + \partial^a \pi)$$

置き換え$h_{\mu\nu} \to H_{\mu\nu}$は

$$h_{\mu\nu} \to H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu \partial_\nu \pi - \partial_\mu \partial^\rho \pi \partial_\nu \partial_\rho \pi + (A^\mu\text{を含む項})$$

質量ポテンシャル($H_{\mu\nu}$の多項式)はπの高階時間微分を含む

実際、πの運動方程式は4階の微分方程式

πは2自由度持つ

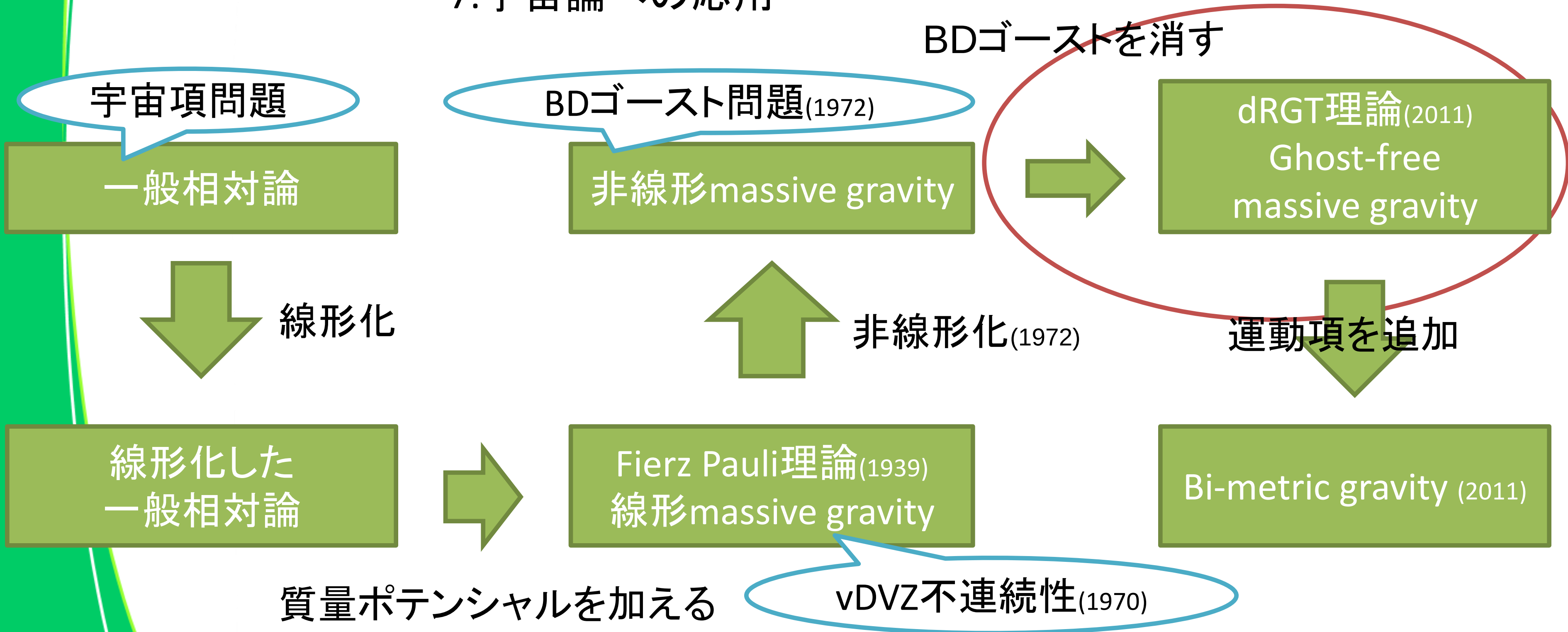
このうちの1自由度がゴーストとなっている

4. 非線形massive gravity まとめ

- 非線形massive gravityではBDゴーストという非物理的な自由度が現れる。
- BDゴーストはπの高階微分項が原因

massive gravityの基礎と宇宙論

1. イントロダクション：宇宙項問題
2. 一般相対論とmassless graviton
3. Fierz,Pauliの線形massive gravity
4. 非線形massive gravity
5. ghost-free massive gravity
6. bi-metric gravity
7. 宇宙論への応用



5. ghost free massive gravity①

BDゴーストを消すためには･･･

⇩

πの高階微分項が作用からなくなればいい

⇩

πの高階微分項が作用の中で完全微分となるように
質量ポテンシャルを調節する

5. ghost free massive gravity②

一般的な非線形massive gravityの作用:

$$S_{\mathrm{MG}} = S_{EH} + S_{mass} (+S_{matter})$$

$$S_{mass} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \left[-\frac{1}{4}m^2([H^2]-[H]^2) \right.$$

$$[A] \equiv Tr[\eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\nu}] = \eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\mu}$$

$$\left. + (c_1[H^3] + c_2[H^2][H] + c_3[H]^3) + (d_1[H]^4 + \cdots) + \cdots \right]$$

πの高階微分項がすべて完全微分となるように係数$c_1, c_2, \cdots$を決めていく

$$c_1 = 2c_3 + \frac{1}{2}, c_2 = -3c_3 - \frac{1}{2}$$

$$d_1 = -6d_5 + \frac{1}{16}(24c_3 + 5), d_2 = \cdots$$

$$f_1 = \frac{7}{32} + \frac{9}{8}c_3 - 6d_5 + 24f_7, f_2 = \cdots$$

$$\cdots$$

ゴーストが消えるようなパラメータのとり方が存在
(c_3, d_5は任意)

de Rham , Gabadadze ,Tolley (2010)

5. ghost free massive gravity③

無限級数の形をしているため、扱いづらい

⇩

有限の和の形に書き直すことが成功

de Rham , Gabadadze ,Tolley (2011)

任意パラメーター

$$S_{mass} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \left[-\frac{1}{4}m^2(U_2[K] + \alpha_3 U_3[K] + \alpha_4 U_4[K])\right]$$

$$[A] \equiv Tr[\eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\nu}] = \eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\mu}$$

$$U_2[K] = [K]^2 - [K^2]$$
$$U_3[K] = [K]^3 - 3[K][K^2] + 2[K^3]$$
$$U_4[K] = [K]^4 - 6[K^2][K]^2 + 8[K^3][K] + 3[K^2]^2 - 6[K^4]$$

$$K^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \sqrt{g^{\mu\rho}f_{\rho\nu}}$$

$(K^\mu_\nu = \partial^\mu\partial_\nu\pi + (h, A$を含む項$)$となる$)$

fiducial metric: $f_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b\eta_{ab}$

dRGTのghost-free massive gravity

5. ghost free massive gravity まとめ

・Stuckelberg場の自由度πの高階微分を消すことで、
BDゴーストの現れない非線形massive gravityが実現

$$S_{mass} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\left[-\frac{1}{4}m^2(U_2[K] + \alpha_3 U_3[K] + \alpha_4 U_4[K])\right]$$

$$K^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \sqrt{g^{\mu\rho} f_{\rho\nu}}$$

fiducial metric: $f_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b \eta_{ab}$

・表式が複雑だが、重要なことは

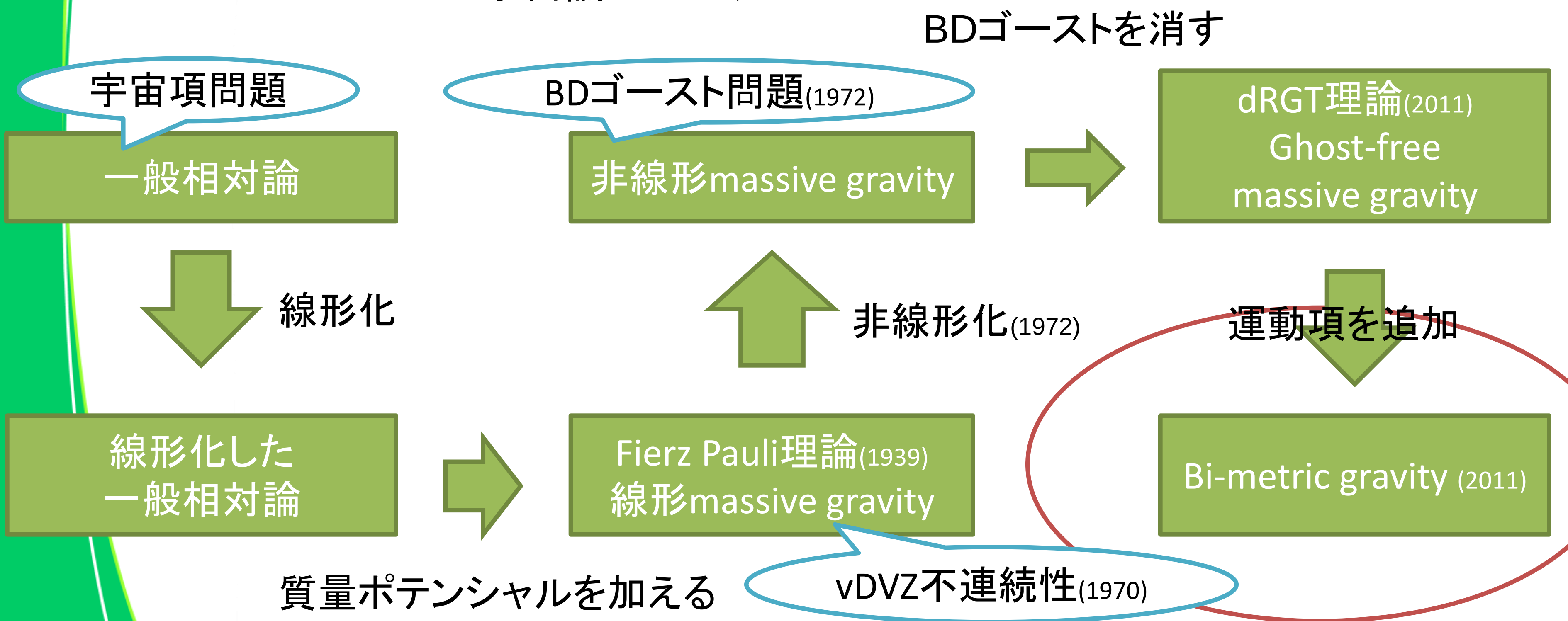
- 任意パラメータが2つある。(α_3, α_4)
- Stuckelberg場ϕ^aはすべて$f_{\mu\nu}$を通して現れている。

$\Rightarrow$ 物理的な自由度 : $g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$

- $\sqrt{g^{\mu\rho} f_{\rho\nu}}$の代数多項式となっている。

massive gravityの基礎と宇宙論

1. イントロダクション：宇宙項問題
2. 一般相対論とmassless graviton
3. Fierz,Pauliの線形massive gravity
4. 非線形massive gravity
5. ghost-free massive gravity
6. bi-metric gravity
7.宇宙論への応用



6. bi-metric gravity①

dRGTのMassive gravity:

$$S_{\mathrm{MG}} = S_{EH}[g_{\mu\nu}] + S_{mass}[g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}] \ \ (+S_{matter}[g_{\mu\nu}, \Psi])$$

相互作用する2つのテンソル場$g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}$の理論に見える

ただし、$f_{\mu\nu}$は運動項がなく非ダイナミカルな補助場となっている。

$f_{\mu\nu}$に運動項を導入して、2つのダイナミカルなテンソル場の理論に拡張してみよう。

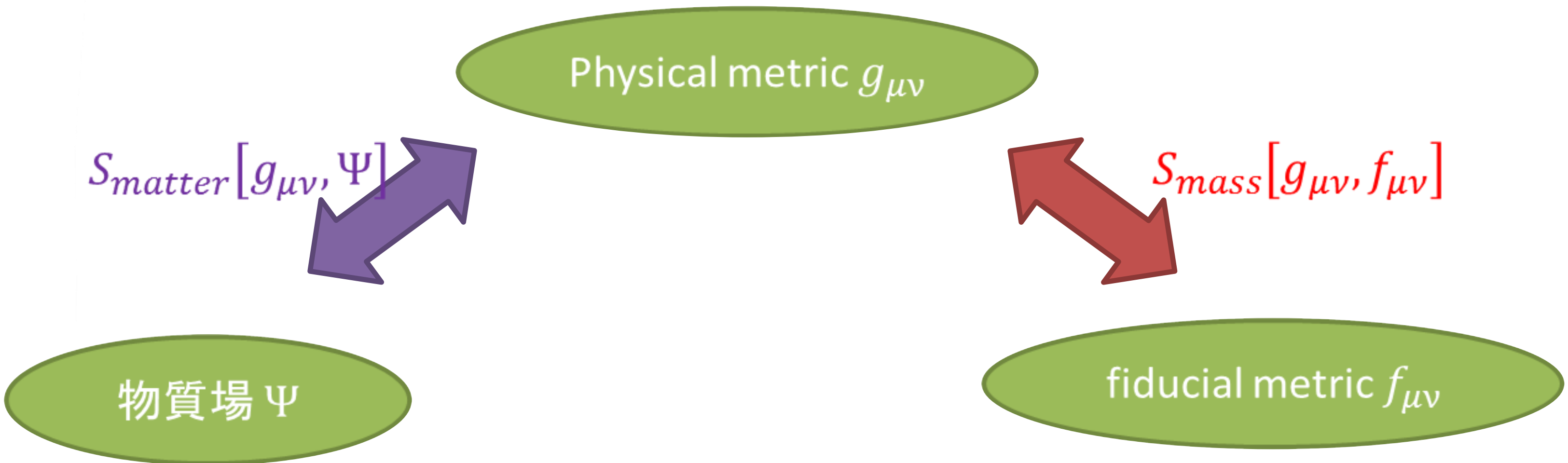
Bi-metric gravity:

$$S_{BG} = S_{EH}[g_{\mu\nu}] + S_{EH}[f_{\mu\nu}] + S_{mass}[g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}] \ \ (+S_{matter}[g_{\mu\nu}, \Psi])$$

6. bi-metric gravity②

Bi-metric gravityの構造

$$S_{BG} = S_{EH}[g_{\mu\nu}] + S_{EH}[f_{\mu\nu}] + {\color{red}S_{mass}[g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}]} \quad (+{\color{purple}S_{matter}[g_{\mu\nu}, \Psi]})$$



$f_{\mu\nu}$は物質場と直接相互作用しない

⇩

重力場$g_{\mu\nu}$だけに影響を与える

ダークエネルギーのように振る舞うと期待

これまでのまとめ

・質量を持ったgravitonの理論として、BDゴースト等の問題が解決された dRGT理論が得られた。

$$S_{\mathrm{MG}} = S_{EH}[g] + S_{mass}[g,f] + S_{matter}[g,\Psi]$$

$$S_{mass} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\left[-\frac{1}{4}m^2(U_2[K] + \alpha_3 U_3[K] + \alpha_4 U_4[K])\right]$$

・dRGT理論をさらに、相互作用する動的な2つの計量の理論へ拡張することで bi-metric gravityが得られた。

$$S_{BG} = S_{EH}[g_{\mu\nu}] + S_{EH}[f_{\mu\nu}] + S_{mass}[g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}] + S_{matter}[g,\Psi]$$

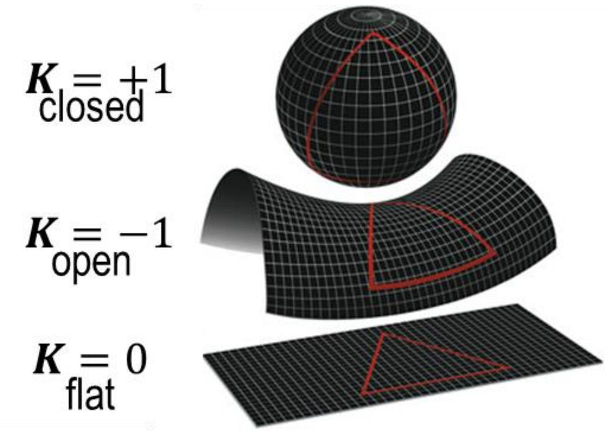
7. 宇宙論への応用 ①

新しい重力理論の候補としてdRGT理論やbi-metric gravityが得られたが
当初の目的であった　宇宙の加速膨張　は実現できているのか？

実際に我々の宇宙を表す一様等方時空(FLRW時空)の膨張を調べてみよう。

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{1}{1-Kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{Sin}^2\theta d\phi^2)\right)$$

FLRW時空：時間t ×一様等方な空間



7. 宇宙論への応用②

Massive gravityで、FLRW解を調べる。 D.Yoshida et.al.(2012)

$f_{\mu\nu}$の対称性は、こちらで勝手に仮定する。 ⇒ (非一様)等方だと仮定

・$g_{\mu\nu}$の対角座標系: $g_{\mu\nu}$:一様等方 $f_{\mu\nu}$:(非一様)等方

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{1}{1-Kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{Sin}^2\theta d\phi^2)\right)$$

$f_{\mu\nu} = ?$ ((非一様)等方座標で書いたMinkowski計量)

・ユニタリゲージ: $g_{\mu\nu}$:(非一様)等方 $f_{\mu\nu}$:平坦

$g_{\mu\nu} = ?$ ((非一様)等方座標で書いたFLRW計量)

$f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$g_{\mu\nu}$をFLRW計量を非一様座標で書いたPainleve-Grustrand型計量であると仮定する

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -\kappa^2 dt^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2}{1-K\tilde{\alpha}^2 r^2/a^2}\left(dr - \frac{\dot{a}}{a}rdt\right)^2 + \tilde{\alpha}^2 r^2 d\Omega^2$$

7. 宇宙論への応用 ③

後はひたすら計算

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\kappa^2 dt^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2}{1 - K\tilde{\alpha}^2 r^2/a^2}\left(dr - \frac{\dot{a}}{a} r dt\right)^2 + \tilde{\alpha}^2 r^2 d\Omega^2$$

$$f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}(\alpha - 1), \alpha_4 = \frac{1}{12}(\alpha^2 - \alpha + 1), \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \tilde{\alpha}}$$

$$\frac{\delta S_{mass}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\frac{m^2}{\alpha} g_{\mu\nu}$$

運動方程式は

$$G_{\mu\nu} + \frac{m^2}{\alpha} g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

Gravitonの質量は宇宙項$\Lambda_{eff} = m^2/\alpha$のような効果を引き起こす！

7. 宇宙論への応用④

他のFLRW解

A. $f_{\mu\nu}$は一様等方。 ゴースト

BG: 2種類の解が存在

- A.1:任意パラメータを調節。補正は宇宙項型となる。 あり
- A.2:$g_{\mu\nu}$と$f_{\mu\nu}$の間に関係式。補正は時間変化。 なし

MG:A.1に対応するopen FLRW解だけ存在 あり

B. $f_{\mu\nu}$は(非一様)等方。

MG,BGともに2種類の解が存在

- B.1:任意パラメータを調節。補正は宇宙項型となる。 ?
- B.2:$g_{\mu\nu}$と$f_{\mu\nu}$の間に関係式。補正は宇宙項型。 あり(MG) ?(BG)

Massive gravityは再びゴースト問題に直面！

まとめ

・質量を持ったgravitonの理論を作り、理論的な問題を取り除いていくと
dRGTのmassive gravityにたどり着く。

・dRGT理論には、重力場以外のテンソル場が現れる。
このテンソル場に運動項を与えることで、bi-metric gravityが得られた。

・massive gravity,bi-metric gravityともに複数の種類の一様等方解が存在する。
運動方程式への補正は、確かにダークエネルギーのようにふるまう。

・一様等方解の安定性を調べると、多くの解で、ゴーストが存在してしまう。
まだ調べられていない解の解析を急ぐことが、現在の最重要課題。