

量子化雑音について [JGW-T1301607]

伊藤洋介

平成 25 年 4 月 10 日

目次

第 1 章	Change log & TODO	5
第 2 章	量子化雑音を考える目的	7
第 3 章	量子化雑音について	9
3.1	このノートの目的	9
3.2	量子化誤差の分布	9
3.3	量子化のパワースペクトルへの影響	16
3.3.1	具体例	16
3.3.2	LSD と信号振幅、検出器雑音振幅の関係	20
3.4	量子化の振幅と位相への影響	22
3.5	量子化のマッチドフィルターへの影響	22
第 4 章	量子化誤差への対処法	27
第 5 章	量子化誤差についての LIGO 文書	29
5.1	Bruce & Patrick の議論の要約	29
第 6 章	「量子化雑音を考える目的」に対する結論	31

第1章 Change log & TODO

Change log:

2013.03.25 神田さん、鳥谷君(大阪市立大)との議論を反映。

TODO:

1. サイン波以外への量子化雑音の影響を見積もる。
 - (a) マッチドフィルターを使える場合: Chirp, Quasi-Normal Mode, Sine-Gaussian etc.
 - (b) マッチドフィルターを使えない場合: SNe
2. Bruce & Patrick の3 条件を KAGRA に適用して吟味。具体的には KAGRA の $S_v(f)$ が必要。
3. Bruce & Patrick の3 条件が matched filter を使えない場合にどうなるのかを吟味。
4. 量子化雑音が一様分布にしたがわない場合の Bruce & Patrick の3 条件の吟味。

第2章 量子化雑音を考える目的

アナログ・デジタル変換器 (Analogue Digital Converter: ADC) を考える。たとえば、ADC は一定の時間間隔でアナログ測定器の読み (もしくは平均などの、なんらかの処理をおこなった後の読み) を取得し、デジタルな読みに変換して出力する。AD 変換は ”処理” であり、一般に誤差の原因になる。つまり、アナログ測定器の読みは、アナログ・デジタル変換処理を施した後のデジタル測定器の読みとは一般には異なる。

そこで、気になることは、

1. ADC の量子化誤差 (“縦軸”(振幅) の離散化にともなう誤差)
2. サンプルする時刻の精度 (“横軸”(時間) の離散化にともなう誤差、timing jitter)

の影響と性質、とくに重力波干渉計への影響である。

より詳しくは、以下の疑問に答えたい。

1. 量子化誤差によって、ある程度以上信号対雑音比が小さい重力波信号は消えてしまうということは無いのか?
2. 積分時間を増やせば、いくらでも信号対雑音比が小さな重力波信号を得られると考えて良いのか?

第3章 量子化雑音について

3.1 このノートの目的

時系列 $x(t)$ を考え、これを離散化幅 Δt ごとにサンプルする。とりあえず timing jitter は考えない。Timing jitter については、5 章を参照せよ。量子化として、Least Significant Digit (LSD) を用いて

$$y_m = \text{LSD} \times \text{round} \left[\frac{x(m\Delta t)}{\text{LSD}} \right] \quad (3.1)$$

と書けるものを考える¹。検出器出力 $x(t)$ が重力波信号 $h(t)$ を含むとき、つまり、

$$x(m\Delta t) = n(m\Delta t) + h(m\Delta t) \quad (3.2)$$

と書けるとき、量子化が重力波信号に引き起こす影響を見るのがこのノートの目的である。

検出器出力を上式の式で定義される $x(t)$ とするとき、量子化検出器出力を y_m で表し、(3.1) 式で定義されたとする。また、今後のために、量子化信号 g_m

$$g_m = \text{LSD} \times \text{round} \left[\frac{h(m\Delta t)}{\text{LSD}} \right] \quad (3.3)$$

を定義しておく。

この文書では、量子化雑音 (量子化ノイズ)/量子化誤差/丸め誤差を区別しない。検出器の A/D 変換器の文脈では量子化雑音と呼ばれるかも知れないし、数値計算では、丸め誤差と呼ばれるかも知れない。

3.2 量子化誤差の分布

検出器出力 $x(m\Delta t)$ を量子化した出力 y_m の量子化誤差 $e_m \equiv y_m - x(m\Delta t)$ のしたがう統計的分布について調べる。

いま、検出器出力として

$$x(m\Delta t) = A_s \sin(2\pi f_s t) + A_n \hat{n}(m\Delta t) \quad (3.4)$$

を考える。検出器の規格化した雑音 $\hat{n}(m\Delta t)$ は平均0、分散1の白色ガウス雑音 $\hat{n}(m\Delta t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ である (したがって、 $n = A_n \hat{n}$ の分散は A_n^2)。簡単のため、各標本間で独立とする ($\langle n(i\Delta t)n(j\Delta t) \rangle = \delta_{ij}$)。

この節では、 A_s, A_n 以外のパラメータについては、以下のパラメータを考える。matlab スクリプト "quantizationError.m" を利用した。なお、least

¹切り捨て、切り上げの場合もありうる。

f_s [Hz]	f_{GW} [Hz]	T_{obs} [s]
16384	1234.56789	1

表 3.1: 量子化誤差分布を見るためのパラメータ。

significant digit (LSD) は 0.01 をとった。

以下にいくつかの A_s, A_n について量子化誤差分布と時系列を示す。なお、図は、1秒間のデータの各離散化時刻において、量子化誤差の値を計算し、その分布をトータル $f_s \times 1$ 秒個のデータについて調べたものである。

$A_n \gg A_s > \text{LSD}$: 図 3.1, 3.2。 $x(m\Delta t)$ が least significant digit LSD よりも十分大きいときには、量子化誤差 e_m は $[\text{LSD}/2, \text{LSD}/2]$ の間の一様分布にしたがう。

$A_n > \text{LSD} \gg A_s$: 図 3.3, 3.4。量子化誤差 e_m は $[\text{LSD}/2, \text{LSD}/2]$ の間の一様分布にしたがう。

$\text{LSD} > A_s \gg A_n$: 図 3.5, 3.6。量子化誤差は、三角関数は最大振幅を与える位相でもっとも滞在時間が長いこと（微分係数が小さいこと）を反映する分布を示す。

$\text{LSD} > A_n \gg A_s$: 図 3.7, 3.8。量子化誤差は、もともとの検出器雑音の統計分布（ガウス分布）を示す。

$A_s > \text{LSD} \gg A_n$: 図 3.9, 3.10。LSD に近い振幅を持つ信号に対しては、量子化誤差は信号の性質に依存した分布を持つ。

以上をまとめて、いくつかの A_s, A_n について量子化誤差分布の一様性をチェックした結果を図 3.11 に示す。ここで、一様分布からのずれを χ^2 検定でテストし、 p 値が 0.01 以下のときに一様性を棄却している。結論として、一般に $A_n > \text{LSD}, A_s$ のときには量子化誤差が一様分布すること、 $\text{LSD} > A_n$ のときには、 $A_s \gg \text{LSD}$ でないと一様分布しない傾向が見て取れる。

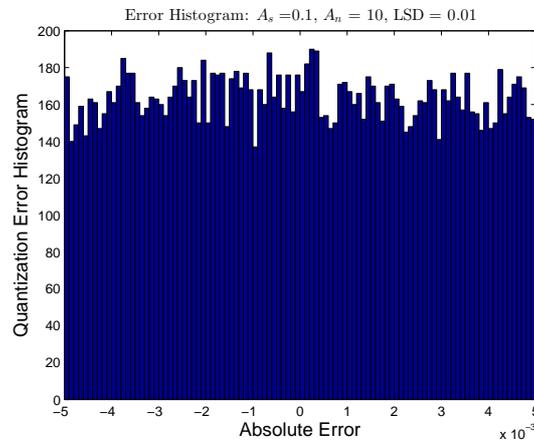


図 3.1: 量子化誤差の分布。信号振幅も検出器雑音振幅もともに、LSD よりも大きい場合。量子化誤差は一様分布にしたがう。

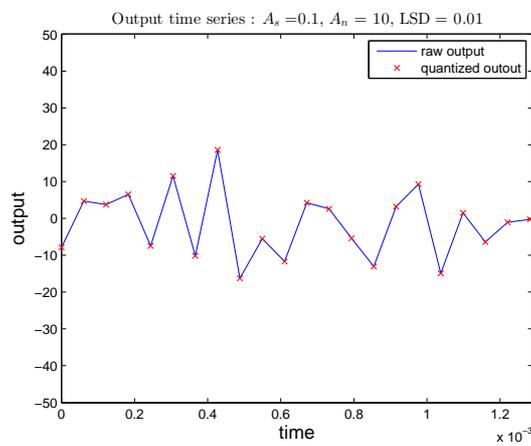


図 3.2: 生の出力と量子化出力の時系列。信号振幅も検出器雑音振幅もともに、LSD よりも大きい場合。量子化は出力に影響を与えない。

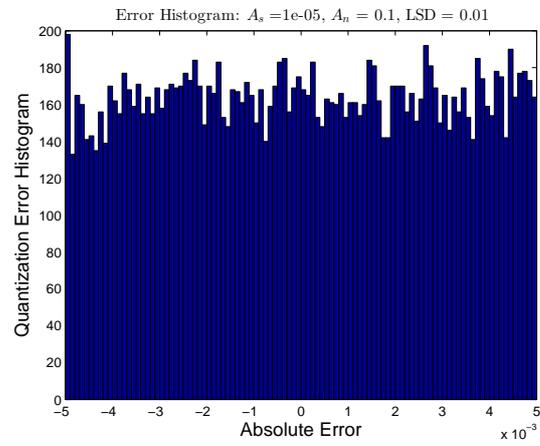


図 3.3: 量子化誤差の分布。 $A_n > LSD \gg A_s$ の場合。量子化誤差は一様分布にしたがう。

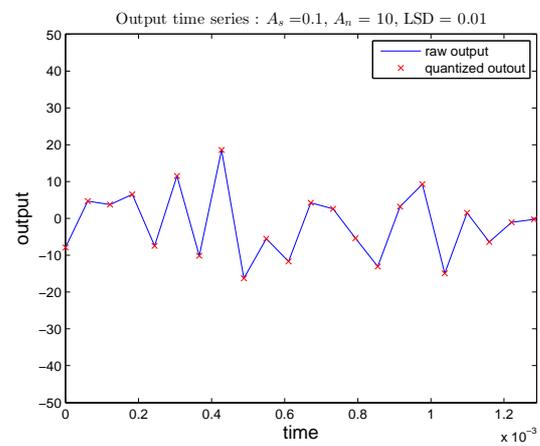


図 3.4: 生の出力と量子化出力の時系列。 $A_n > LSD \gg A_s$ の場合。量子化は出力に影響を与えない。

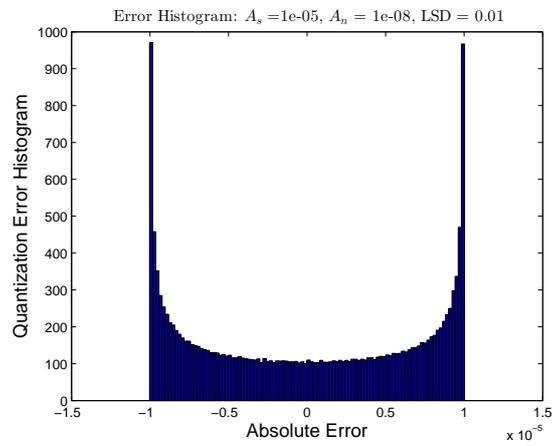


図 3.5: 量子化誤差の分布。LSD $>$ $A_s \gg A_n$ の場合。量子化誤差は、三角関数の各位相における「滞在時間」を示す。

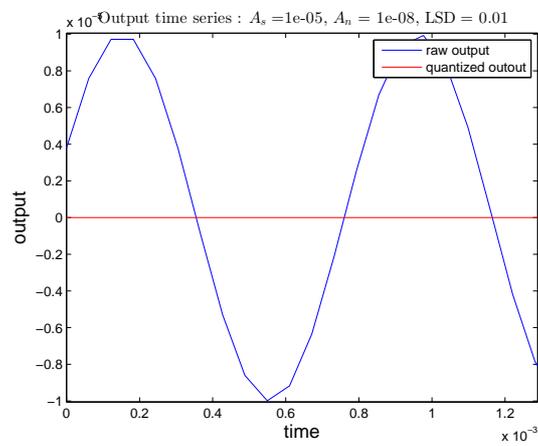


図 3.6: 生の出力と量子化出力の時系列。LSD $>$ $A_s \gg A_n$ の場合。出力はほとんど三角関数のみである。LSD $>$ $A_s + A_n$ なので、量子化後の出力はゼロである。

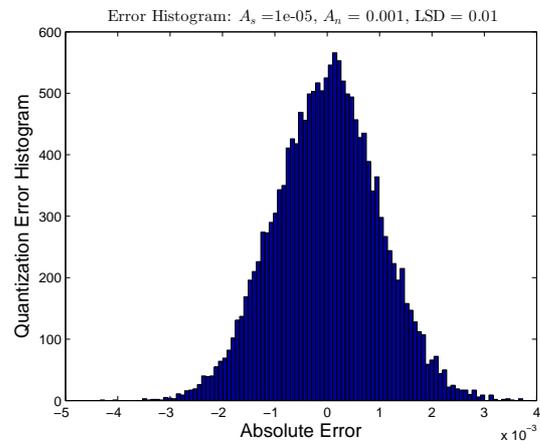


図 3.7: 量子化誤差の分布。LSD $>$ $A_n \gg A_s$ の場合。出力はほとんど検出器雑音(ガウス雑音)のみである。

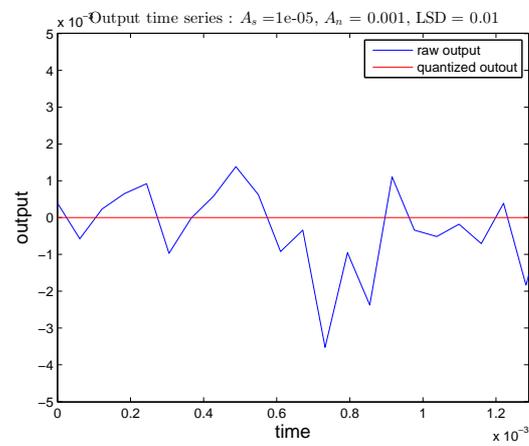


図 3.8: 生の出力と量子化出力の時系列。LSD $>$ $A_n \gg A_s$ の場合。出力はほとんど検出器雑音(ガウス雑音)のみである。LSD $>$ $A_s + A_n$ なので、量子化後の出力はゼロである。

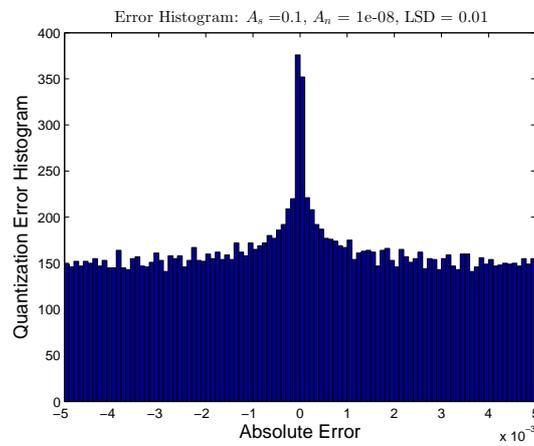


図 3.9: 量子化誤差の分布。 $A_s > LSD > A_n$ の場合。 LSD に近い振幅を持つ信号に対しては、誤差分布は信号の性質に依存した分布を持つ。

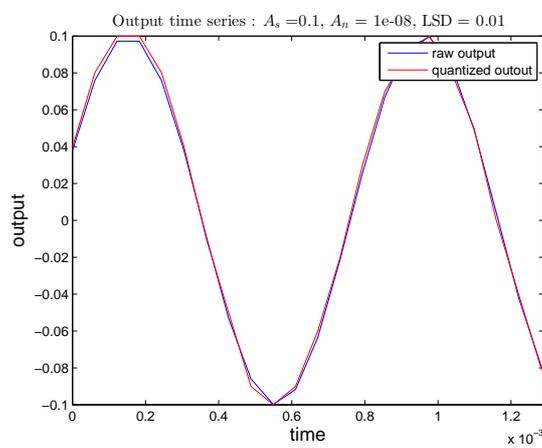


図 3.10: 生の出力と量子化出力の時系列。 $A_s > LSD \gg A_n$ の場合。時系列データではそれほど量子化誤差の影響は大きくないように見える。

f_s [Hz]	f_{GW} [Hz]	T_{obs} [s]
2	0.567	10^7
A_s	A_n	LSD
0.003	1	0.01

表 3.2: 記号はそれぞれ、サンプリング周波数 f_s 、重力波信号周波数 f_{GW} 、観測時間 T_{obs} 、重力波信号振幅 A_s 、白色ガウシアン雑音 $n(m\Delta t) = A_n \hat{n}(m\Delta t)$ の標準偏差 A_n 、least significant digit LSD である。また、重力波信号は $h(t) = A_s \sin(2\pi f_{\text{GW}} t)$ としている。

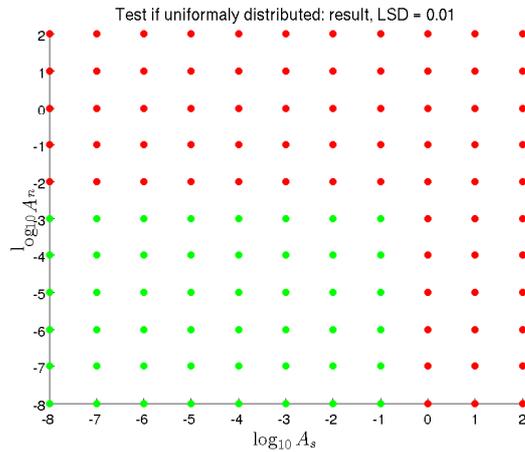


図 3.11: 量子化誤差の分布の一様性を χ^2 検定で確かめた結果。テストの結果、 (A_s, A_n) の各点で、赤丸は一様分布を棄却できないこと、緑丸は一様分布を棄却すべきことを示す。

3.3 量子化のパワースペクトルへの影響

3.3.1 具体例

この節では、パワースペクトルによって量子化の影響を見る。この節では以下のパラメータを考える。matlab スクリプト "quantizationErrorInPSD.m" を利用した。サンプリング周波数が 2Hz と低いのは、ヘテロダイニングをお

こなっていると考えれば良い。実際、長時間データの積分ではヘテロダイニングをおこなうのが普通である。

図 3.12 は量子化前後の信号(検出器雑音無し) の時系列の一部を示す。青は量子化前、赤は量子化後である。LSD が信号振幅よりも大きいので、量子化後の重力波信号 g_m はゼロである。図 3.13 は検出器出力 $x(m\Delta t)$ と量子化出力 y_m を示す。LSD は検出器雑音振幅よりも小さいため、量子化前後でほとんど時系列は変化しない。

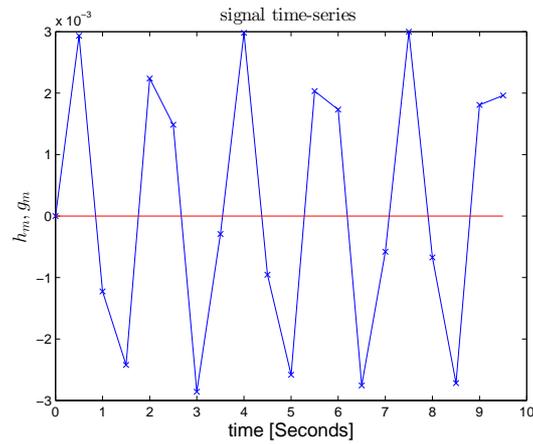


図 3.12: 重力波信号時系列: 量子化前(青)、量子化後(赤)

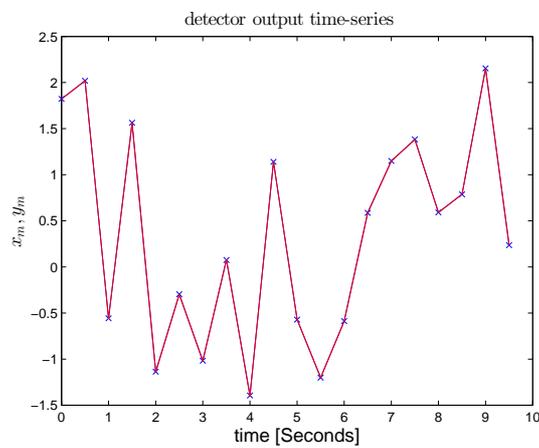


図 3.13: 検出器出力時系列: 量子化前(青)、量子化後(赤)

図 3.14 と 3.15 はそれぞれ重力波信号(検出器雑音無し) のフーリエパワーを示す。前者は量子化前、後者は量子化後で、後者はもちろんパワーは無い。

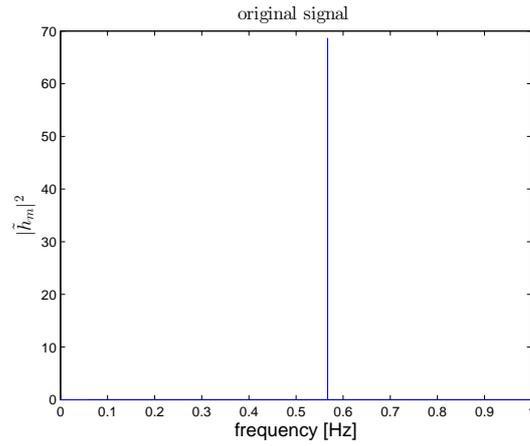


図 3.14: 重力波信号フーリエパワー：量子化前

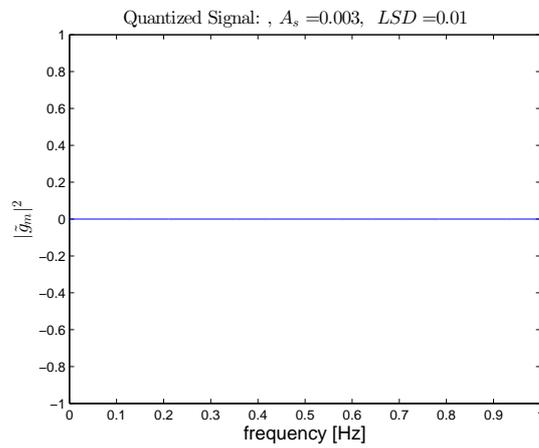


図 3.15: 重力波信号フーリエパワー：量子化後

最後に、図 3.16, 3.17 はそれぞれ検出器出力のフーリエパワーの量子化前後の様子を示す。検出器出力の時系列に変化がなかったように、フーリエパワーにもなんら影響が無い。

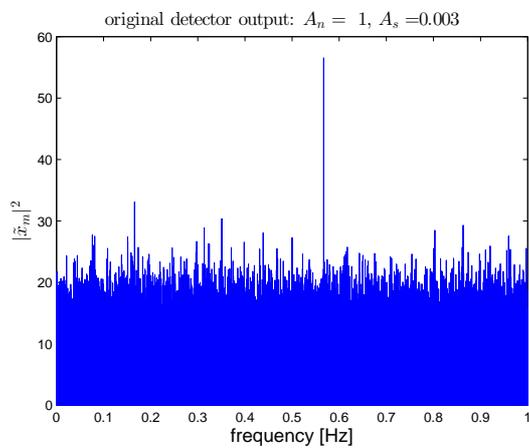


図 3.16: 検出器出力フーリエパワー: 量子化前

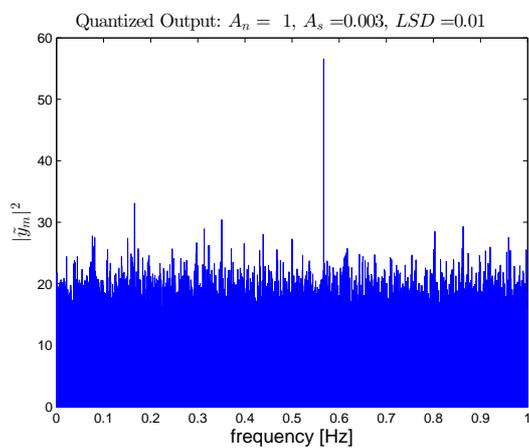


図 3.17: 検出器出力フーリエパワー: 量子化後

3.3.2 LSDと信号振幅、検出器雑音振幅の関係

以下の表にある異なる4つの least significant digit (LSD) で、それぞれ100の異なる検出器雑音時系列

$$\{n^{(\alpha)}(m\Delta t)\}_{m=0}^{m=f_s T-1}, \text{ for each } 1 \leq \alpha \leq 100$$

について、振幅が最大になる周波数およびその周波数における信号対雑音比を計算した。パラメータは以下のようにとった。matlab スクリプト "drive-QuantizationErrorInPSD.m" を利用した。

f_s [Hz]	f_{GW} [Hz]	T_{obs} [s]
2	0.576	10^7
A_s	A_n	LSD
0.003	1	[0.01,0.1,1,2]

表 3.3: 重力波信号の振幅への量子化の影響を見るためのパラメータ。

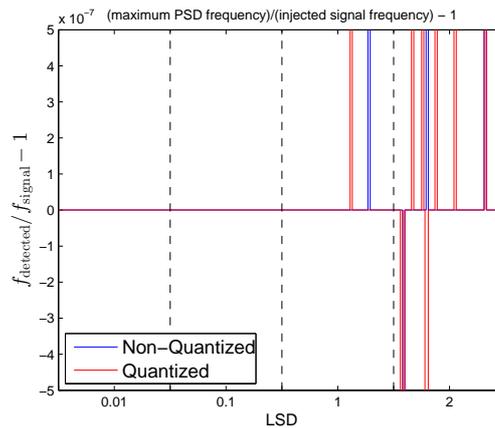


図 3.18: PSD で最大の振幅を与えた周波数を実際挿入した信号周波数で割った比から 1 を引いたものを least significant digit に対してプロットしたもの。4 つの least significant digit についてそれぞれ 100 回異なる検出器雑音時系列で計算している。量子化処理の有無に関わらず一定の割合で検出器雑音振幅が信号振幅よりも大きくなってしまいうため、信号を見失う。ただし傾向としては、LSD が大きくなると信号を見失う確率が高まる。周波数分解能が 10^{-7} Hz であることに注意。

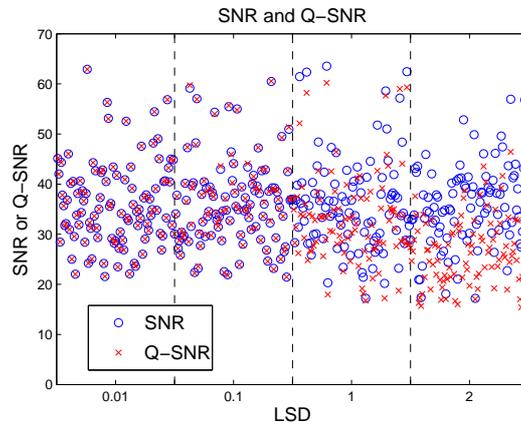


図 3.19: 量子化前後の信号対雑音比 $(SNR)_{非量子化}$ と $(SNR)_{量子化}$ を least significant digit に対してプロットしたもの。4 つの least significant digit についてそれぞれ100回異なる検出器雑音時系列で計算している。LSDが大きくなるにしたがって、振幅の再現性は悪くなる。

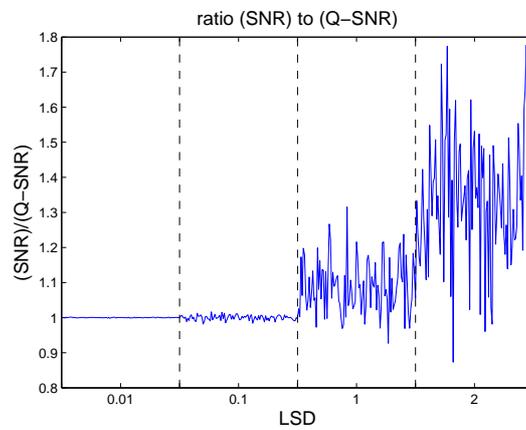


図 3.20: 量子化前後の信号対雑音比の比 $(SNR)_{非量子化}/(SNR)_{量子化}$ を least significant digit に対してプロットしたもの。4 つの least significant digit についてそれぞれ100回異なる検出器雑音時系列で計算している。LSDが大きくなるにしたがって、振幅の再現性は悪くなる。

3.4 量子化の振幅と位相への影響

この節では、量子化の、重力波信号振幅・位相への影響を見る。ここではいくつかの A_s, A_n, LSD の組について実験をおこなった。具体的には、各 A_s, A_n, LSD の組について、検出器雑音時系列を 10000 回生成し、信号に加え、量子化をおこない、その後、10000 個の時系列の平均を各時刻でとって信号が得られるかどうかを調べた。すなわち、 $N = 10000$ として、

$$x^{(\alpha)}(m\Delta t) \equiv h_m(m\Delta t) + n_m^{(\alpha)}(m\Delta t) \quad (3.5)$$

$$y_m^{(\alpha)} = \text{LSD} \times \text{round} \left[\frac{x^{(\alpha)}(m\Delta t)}{\text{LSD}} \right] \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N y_m^{(\alpha)} \stackrel{?}{=} g_m \stackrel{?}{=} h(m\Delta t) \quad (3.7)$$

を量子化前後で計算し、式 (3.7) の等号が成立するかどうかを確かめた。ただし、他の節と同じく、

$$h(m\Delta t) = A_s \sin(2\pi m f \Delta t), \quad (3.8)$$

$$n(m\Delta t) = A_n \hat{n}(m\Delta t) \quad (3.9)$$

$\Delta t = 1/f_s$, $\hat{n}(m\Delta t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ を考えている。

A_s, A_n, LSD 以外のパラメータについては、以下のパラメータを考える。matlab スクリプト "quantizationErrorInPhase.m" を利用した。

f_s [Hz]	f_{GW} [Hz]	T_{obs} [s]
16384	1234.56789	1

表 3.4: 重力波信号の振幅と位相への量子化の影響を見るためのパラメータ。

結果は、図 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 に示す。

3.5 量子化のマッチドフィルターへの影響

以下の信号とその量子化版

$$x(m\Delta t) = n(m\Delta t) + A_s \sin(2\pi f_{\text{GW}} m \Delta t), \quad (3.10)$$

$$y(m\Delta t) = \text{LSD} \times \text{round} \left[\frac{x(m\Delta t)}{\text{LSD}} \right] \quad (3.11)$$

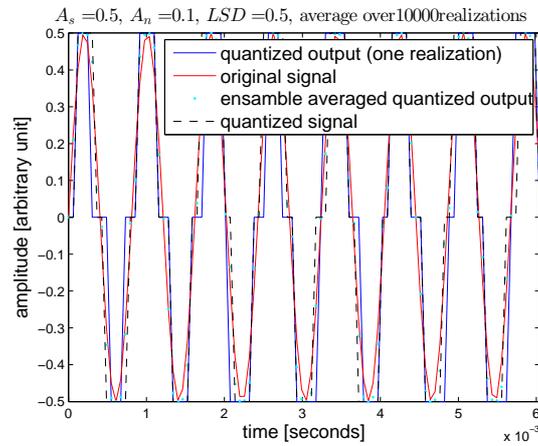


図 3.21: $A_s = 0.5$, $A_n = 0.1$, $LSD = 0.5$ 。 $LSD \simeq A_s > A_n$ の場合は、検出器出力をアンサンブル平均して得られると仮定された重力波位相・重力波振幅は量子化の影響をほとんど受けない。

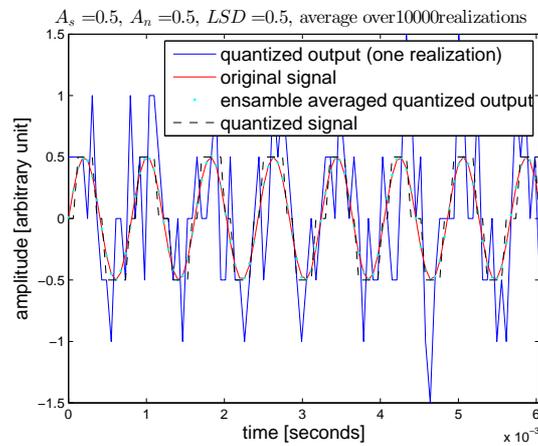


図 3.22: $A_s = 0.5$, $A_n = 0.5$, $LSD = 0.5$ 。 $LSD \simeq A_n \simeq A_s$ の場合は、検出器出力をアンサンブル平均して得られると仮定された重力波位相・重力波振幅は量子化の影響をあまり受けない。

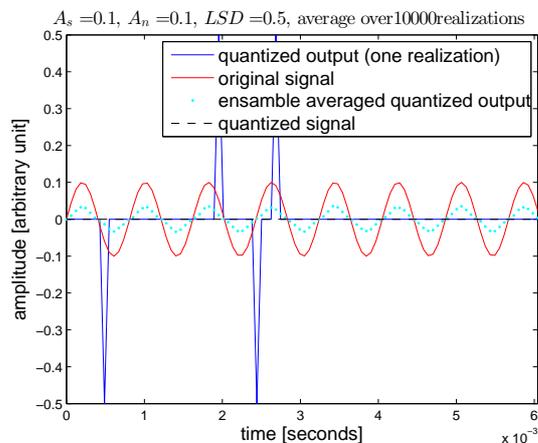


図 3.23: $A_s = 0.1$, $A_n = 0.1$, $LSD = 0.5$ 。 $LSD > A_n \simeq A_s$ の場合は、検出器出力をアンサンブル平均して得られると仮定された重力波位相・重力波振幅は量子化の影響を受ける。

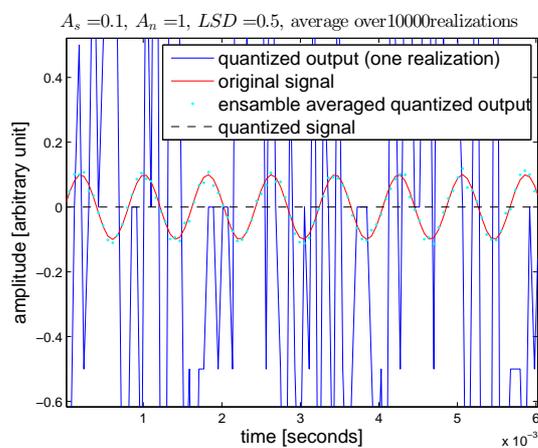


図 3.24: $A_s = 0.1$, $A_n = 1$, $LSD = 0.5$ 。 $A_n > LSD > A_s$ の場合は、検出器出力をアンサンブル平均して得られると仮定された重力波位相・重力波振幅は量子化の影響をほとんど受けない。

をマッチドフィルター

$$h_t(m\Delta t) = \sin(2\pi f_t m\Delta t + \phi_t) \quad (3.12)$$

を用いて検出することを考える。具体的には、パワースペクトルを求め、その最大振幅を与える周波数 f_t とその周波数におけるフーリエ係数から求まる位相 ϕ_t を100回求めた。

パラメータは以下のようにとった。matlabスクリプト”matchedFilterQuantizationError.m”を利用した。なお、位相の推定誤差はかなり信号周波数に

f_s [Hz]	f_{GW} [Hz]	T_{obs} [s]
16384	1000	1
A_s	A_n	LSD
0.1	1	0.1

表 3.5: 量子化のマッチドフィルターへの影響を見るためのパラメータ。

依存するため、今回は信号周波数をちょうど周波数ビン上に乗るようにしている。

周波数については、上記のパラメータの元で常に挿入した信号の周波数を再現した。位相についての結果は図 3.25 に示す。位相への影響はほぼ無いと言って良い。

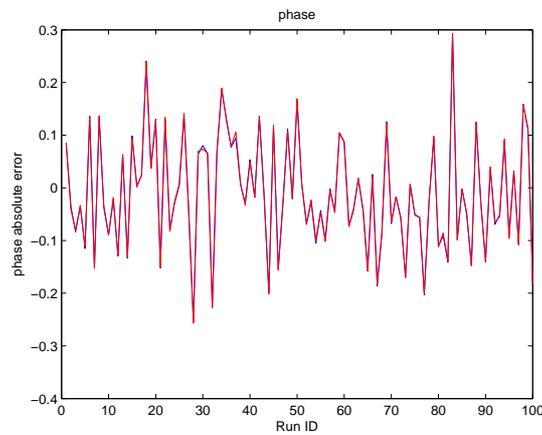


図 3.25: マッチドフィルターへの量子化の影響。青は量子化無し、赤は量子化あり。

第4章 量子化誤差への対処法

量子化誤差への対処法としては、ディザリング、 $\Sigma\Delta$ 法などがある。詳しくは、以下の電通大の三橋渉教授のwebページを参照。

<http://www.mlab.ice.uec.ac.jp/mit/text/singou/Siryu/Supplement-1/node16.html>

<http://www.mlab.ice.uec.ac.jp/mit/text/singou/Siryu/Supplement-1/node17.html>

第5章 量子化誤差についての LIGO 文書

LIGOにおける量子化誤差についての文書には”Quantization noise in LIGO interferometers” by Bruce Allen & Patrick Brady (T-970128-02.pdf) があり参考になる。この文書では、量子化誤差による重力波信号の信号対雑音比の低減の度合いを least significant bit、ダイナミックレンジ、デザリングに対する3つの条件から定式化している。

ただし、Bruce & Patrick の議論は、量子化誤差が一様分布にしたがう場合のみ使える議論であるように思われる。したがって、量子化誤差が一様分布にしたがわない場合にどうなるのか、議論が必要になる。

5.1 Bruce & Patrick の議論の要約

Bruce & Patrick は、whitening 後の IFO 出力が以下の3つの条件を満たすときに、信号対雑音比の損失は小さいことを示した。具体的には、IFO 出力が完全に白色な場合、6bit ADC は、

1. 信号対雑音比の損失は 0.4%以下を与え、
2. IFO 出力は、2乗平均平方根 (rms) 電圧出力の 8倍までカバーする dynamic range を持つ。

第6章 「量子化雑音を考える目的」 に対する結論

アナログ・デジタル変換器 (Analogue Digital Converter: ADC) を考える。たとえば、ADC は一定の時間間隔でアナログ測定器の読み (もしくは平均などの、なんらかの処理をおこなった後の読み) を取得し、デジタルな読みに変換して出力する。AD 変換は ”処理” であり、一般に誤差の原因になる。つまり、アナログ測定器の読みは、アナログ・デジタル変換処理を施した後のデジタル測定器の読みとは一般には異なる。

そこで、気になることは、

1. ADC の量子化誤差 (“縦軸”(振幅) の離散化にともなう誤差)
2. サンプルする時刻の精度 (“横軸”(時間) の離散化にともなう誤差、timing jitter)

の影響と性質、とくに重力波干渉計への影響である。

より詳しくは、以下の疑問に答えたい。

1. 量子化誤差によって、ある程度以上信号対雑音比が小さい重力波信号は消えてしまうということは無いのか?
2. 積分時間を増やせば、いくらでも信号対雑音比が小さな重力波信号を得られると考えて良いのか?