

# 量子論からみた検出限界について

佐々木寿彦

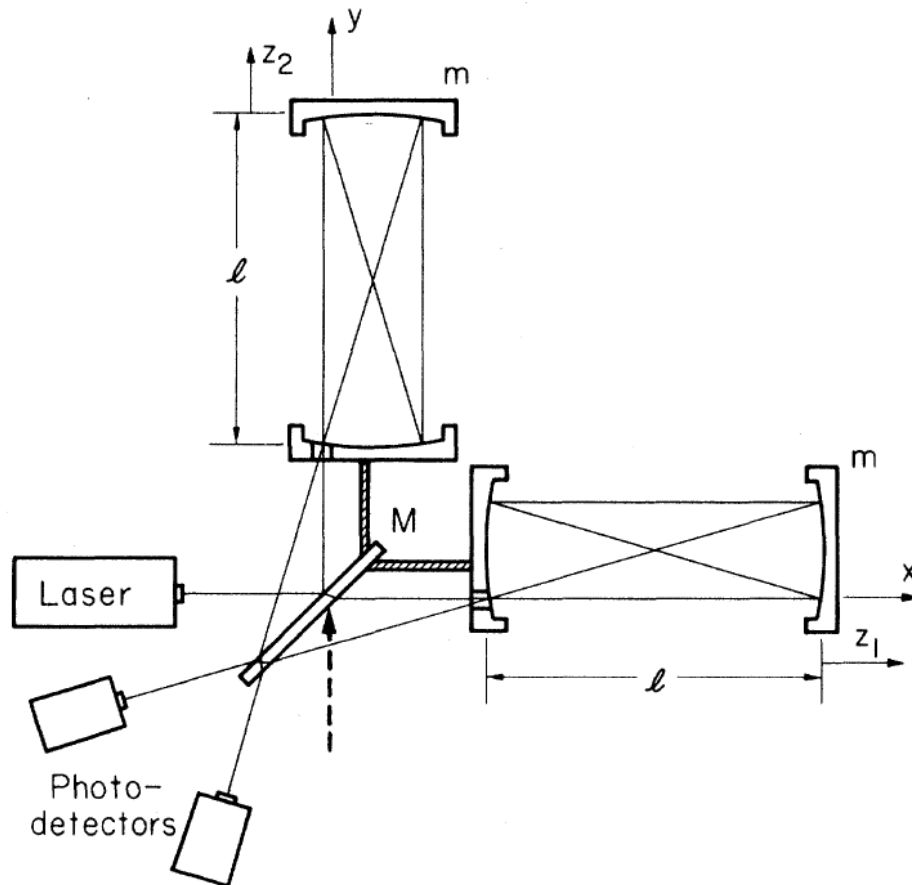
FIRST量子情報処理プロジェクト、東大PSC

# 目次

- 干渉計型重力波の測定限界の議論の流れ
- 小澤の不等式
- Standard Quantum Limit (SQL) を超える観測の例
- まとめ

# Caves の議論 1/2

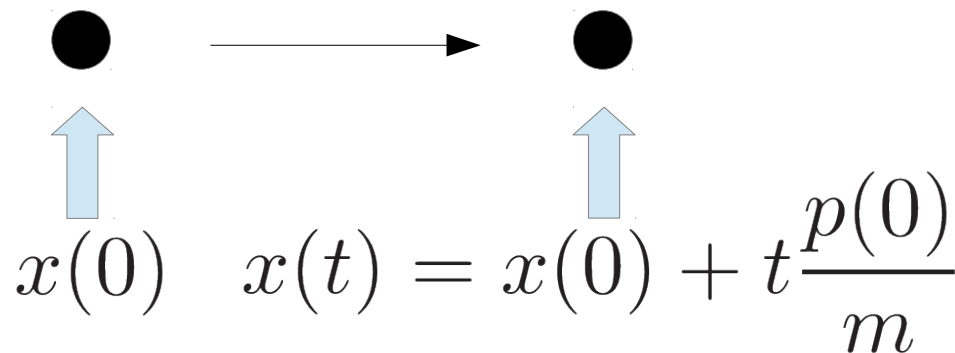
- 干渉計型重力波観測装置には原理的な測定限界がある。PRL 45, 75 (1980)



- レーザー強度大  $\rightarrow$  光子検出器のショットノイズの影響低減
- レーザー強度大  $\rightarrow$  ミラー (m) の位置が輻射圧で揺らいで位相が乱れる。
- 両方は抑えられない。

# Caves の議論 2/2

- Free mass position の Standard quantum limit (SQL)、Rev. Mod. Phys. **52**, 341 (1980)
- 質点に働く力を測定するために、位置を2回測定するときには不確定性がある。


$$x(t) = x(0) + t \frac{p(0)}{m}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

# Yuen の議論

- PRL 51, 719 (1983)
- Free mass position の SQL は破れる。
- SQLの議論は、分散

$$\begin{aligned} \langle \Delta X^2(t) \rangle &= \langle \Delta X^2(0) \rangle + \langle \Delta P^2(0) \rangle t^2 / m^2 \\ &\quad + \langle \Delta X(0) \Delta P(0) + \Delta P(0) \Delta X(0) \rangle t / m \end{aligned}$$

の後半の項を無視している。

- 例えば、 $x(0) + t \frac{p(0)}{m}$  を測定すれば分散は0。
- 時間とともに収縮して行く状態も構成した。  
(contractive state)

# Caves の反論

- PRL 54, 2465 (1985)
- 最初の位置がきちんと測定できていない。
- 1回目の測定は測定というより状態準備。
- ひとまりの測定セットで考えれば、SQLは正しい。

# 小澤の議論

- PRL **60**, 385 (1988)
- Free mass position の SQL は破れる。
- 実際、位置を誤差なく測定しながら、測定後の状態が contractive state であるような測定が存在する。

# 小澤の不等式1/2

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

- この不等式が効いてくる例。  
2つのモード、 $a, b$ を考える。

$$T(\theta) = \exp(\theta(ab^\dagger - a^\dagger b))$$

$$S(r) = \exp(r(ab - a^\dagger b^\dagger))$$

$$U(r, \theta) = T(\theta)S(-r)T(\theta)T(\theta)S(r)T(\theta)$$

$$r = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}}$$



## 小澤の不等式2/2

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

$$a = X_a + iY_a, b = X_b + iY_b$$

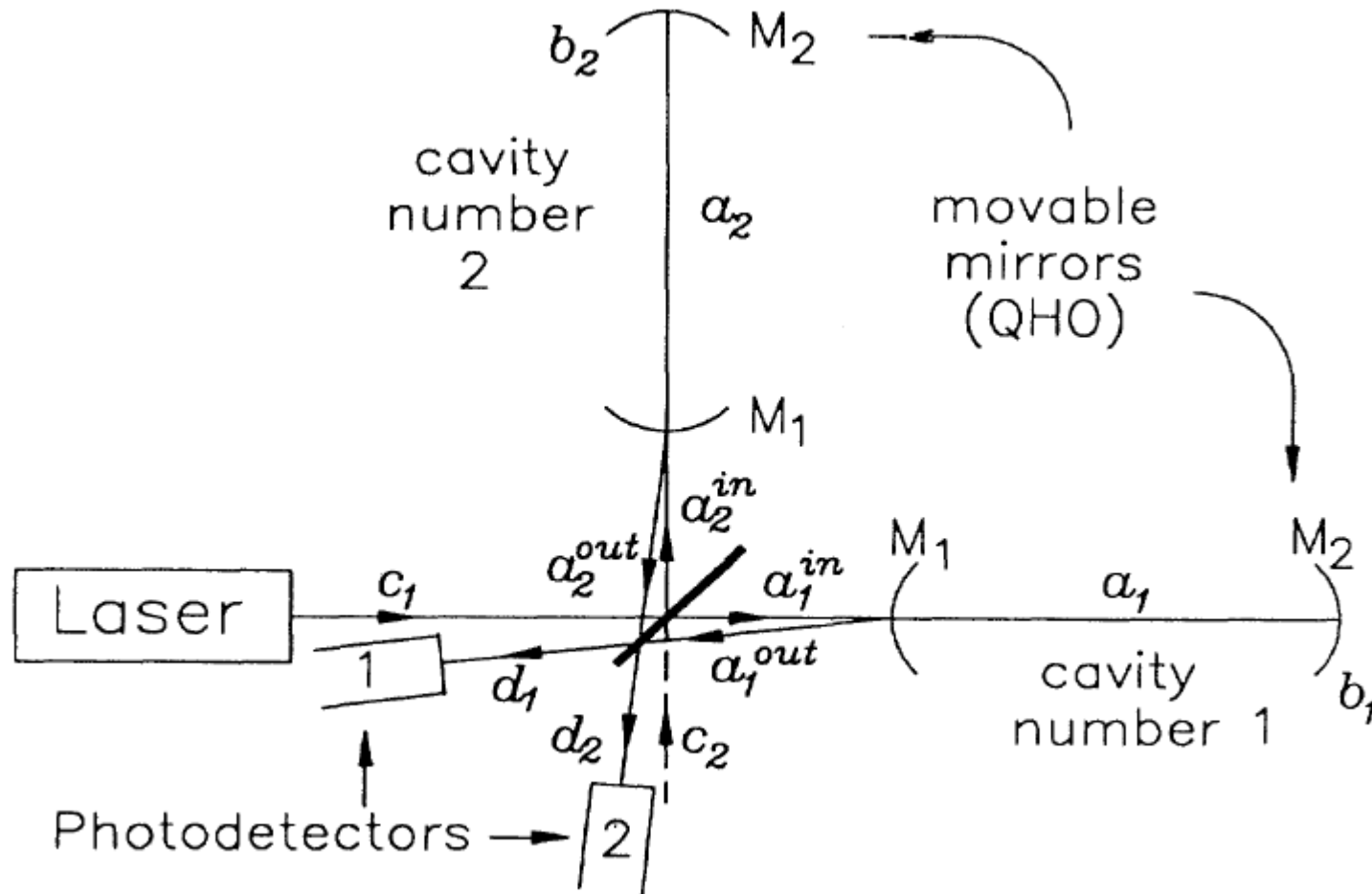
$$\begin{cases} X_a^{out} = X_a^{in} - X_b^{in} \\ X_b^{out} = X_a^{in} \\ Y_a^{out} = -Y_b^{in} \\ Y_b^{out} = Y_b^{in} + Y_a^{in} \end{cases}$$

$$X_b^{out} - X_a^{in} = 0$$

$$Y_a^{out} - Y_a^{in} = -Y_b^{in} - Y_a^{in}$$

# SQLを超える干渉計の具体例

- Pace, Collet, Walls, PRA 47 3173 (1993)



# 無限質量ミラーの場合1

- 干渉計の腕の長さが揃ったところを基準にして、そこから  $\phi$  ずれていると、ダークポートの出力は

$$d_2 = c_1 \frac{1 - e^{i\phi}}{2} + c_2 \frac{1 + e^{i\phi}}{2} =: c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2$$

- $c_1$  はコヒーレント状態、 $c_2$  は(スクイーズド)真空を想定。そこで、 $\delta c_1 := c_1 - \alpha$  とすると

$$\begin{aligned} d_2^\dagger d_2 &\sim |\alpha \gamma_1|^2 + \alpha \gamma_1^* (\delta c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2) + C.C. \\ &\sim |\alpha \gamma_1|^2 + \left( -\alpha \phi^2 \left( \delta c_1 + \delta c_1^\dagger \right) + i\alpha \phi \left( c_2 - c_2^\dagger \right) \right) \\ &\sim |\alpha \gamma_1|^2 + i\alpha \phi \left( c_2 - c_2^\dagger \right) \end{aligned}$$

# 無限質量ミラーの場合2

- ダークポートの信号強度

$$d_2^\dagger d_2 \sim |\alpha\gamma_1|^2 + i\alpha\phi \left( c_2 - c_2^\dagger \right)$$

- ダークポートのショットノイズ

$$\left( d_2^\dagger d_2 \right)^2 - \left\langle d_2^\dagger d_2 \right\rangle^2 \sim \left( i\alpha\phi \left( c_2 - c_2^\dagger \right) \right)^2$$

- S/N はコヒーレント光の強度のルート
- コヒーレント光の強度を上げなくとも、真空場の虚部を抑えればよい。つまり、スクイズすればよい。

# 有限質量ミラーの場合1/4

- 干渉系の片腕のハミルトニアン(a は光子、b はミラー、s(t) は重力波)

$$H_{\text{sys}} = \hbar\Delta a^\dagger a + \hbar\Omega b^\dagger b + \hbar\kappa a^\dagger a (b + b^\dagger) + \hbar k s(t) (b + b^\dagger) .$$

- 安定点からの微小変化を考えるので、実質的に

$$H_{\text{sys}} = \hbar\Omega b^\dagger b + \hbar\kappa\alpha (\delta a + \delta a^\dagger) (b + b^\dagger) + \hbar k s(t) (b + b^\dagger)$$

# 有限質量ミラーの場合2/4

$$H_{\text{sys}} = \Omega b^\dagger b + \kappa \alpha (\delta a + \delta a^\dagger) (b + b^\dagger) + k s(t) (b + b^\dagger)$$

- 全体として光子の影響がどうなるのか考える。

$$\delta a + \delta a^\dagger \xrightarrow{\kappa \alpha} b - b^\dagger \xrightarrow{\Omega} b + b^\dagger \xrightarrow{\kappa \alpha} \delta a - \delta a^\dagger$$

$$-i(\delta a - \delta a^\dagger) \rightarrow -i(\delta a - \delta a^\dagger) + \gamma_3 \alpha^2 (\delta a + \delta a^\dagger)$$

$$\left( \rightarrow -i(\delta a - \delta a^\dagger) + \frac{4 \alpha^2 \kappa^2 \Omega}{\omega^4} (\delta a + \delta a^\dagger) \right)$$

# 有限質量ミラーの場合3/4

- ダークポートの出力の分散は

$$\left(d_2^\dagger d_2\right)^2 - \left\langle d_2^\dagger d_2 \right\rangle^2 \sim \left(i\alpha\phi \left(c_2 - c_2^\dagger\right)\right)^2$$

だったが、これが

$$\alpha^2 \phi^2 \left(-i(c_2 - c_2^\dagger) + \gamma_3 \alpha^2 (c_2 + c_2^\dagger)\right)^2$$

$$= \alpha^2 \phi^2 (\gamma_3 \alpha^2 - i)^2 \left(c_2 + \frac{\gamma_3 \alpha^2 + i}{\gamma_3 \alpha^2 - i} c_2^\dagger\right)^2$$

となるので、パワーの最適点は  $\alpha = 1/\sqrt{\gamma_3}$   
で、そのときスキューズすべきは  $c_2 + ic_2^\dagger$

# 有限質量ミラーの場合4/4

- 結局のところ、分散の部分に共役な量がのってきたが、コヒーレントにのっているので単純にそれら全体を最小化すれば良いだけ。
- 真空のスクイーズドで分散が抑えられたのは、分散の主要な寄与にレーザーの入力が入っていなかったから。



# まとめ

- 干渉計から質点の位置の問題に途中から置き換わっているなので、ややこしい。
- 小澤先生の測定理論で相互作用が自由に使えれば所望の測定の作り方を自動的に与えることができるが、実際の実験の制限の元では簡単に作れるものでもない。