

宇宙線の干渉計型検出器への影響 III

(momentum deposit による励起)

山元 一広

東京大学宇宙線研究所

2006/9/8

1 Introduction

宇宙線のような高エネルギー粒子が物体を通過し、エネルギーを落とす (energy deposit) と、弾性振動を励起すること、そしてそれが共鳴型重力波検出器の雑音となりうることは 40 年ほど前に指摘され、現在もなお研究が進められている。同様の現象の干渉計型検出器への影響の見積もりを [1, 2, 3] で行った。ここでは momentum deposit による影響について考える。

2 研究に関する歴史

全てを網羅しているわけではなく、担当者が知っているものだけであることに注意。momentum deposit に限定している。なおこれらと今回の見積もりの差異は後述する。

- 1988 年 : Giazotto による見積もり [4]。振り子と鏡の基本モードの励起を考えている。burst や periodic signal 解析においては問題にならないという結論。
- 1997 年 : Marin による見積もり [5]。
- 1997 年 : Clay による見積もり [6]。[4] を引用して議論。
- 2006 年 : Braginsky et al. による見積もり [7]。カスケードシャワーによる影響を考えている。振り子の振動、鏡の内部振動、帯電による周囲の導体との間の力の影響を調べており、Advanced LIGO では最初の 2 つは大きな問題ではないが、最後の 1 つは検討の必要ありとしている。

3 Momentum deposit の概略

Momentum deposit のおおまかなシナリオは以下の通り。

- 宇宙線が物体中を走り抜けるとエネルギーを失う。これはそれに応じた運動量も失われている。
- この失われた運動量は、物体に渡される。
- 干渉計の鏡の場合、これによって振り子モードが励起される。
- 物体の内部に不均一に運動量が渡されることによって弾性振動が励起される。

4 Energy deposit との違い

Energy deposit は、物体の一部を加熱することによって発生する熱応力で弾性振動が励起される。熱応力は熱が緩和する間ずっと作用し続ける。共鳴型や常温の干渉計においてはこの緩和時間は target とする重力波の周期よりずっと長いため、ほぼ step 応答となる。一方、momentum deposit の場合、運動量の受け渡しは一瞬で終わるため impulse 応答となる。また energy deposit は鏡の重心を動かすことは出来ないが、momentum deposit は重心を動かすことができる。

5 Momentum deposit による振動の公式の導出

5.1 計算の前提

話を簡単にするために、particle はほぼ光と同じ速さ、 c 、で走り¹、自分の持つエネルギーのごく一部だけを物体に渡すと仮定する。物体の中を一直線に進み、突き抜ける。以上のことから momentum deposit は一瞬のうち ($0.1\text{m}/c \sim 3 \times 10^{-10}\text{sec}$) で行われる。これは振り子や弾性振動の共鳴の周期よりずっと短い。

¹宇宙線に関してこの前提は基本的に正しい [2]。

5.2 振り子モード

まず振り子モードを考える。これは共鳴型ではなく干渉計特有のものである。鏡が受け取るエネルギーと運動量を $\Delta E, \Delta P$ としよう。宇宙線はほぼ光と同じ速さであるので²、

$$\Delta P = \frac{\Delta E}{c} = \frac{1}{c} \left(\frac{dE}{dl} \right) l \quad (1)$$

$dE/dl, l$ は宇宙線が単位長さ進むときに失うエネルギーと鏡の中の軌跡の長さである。光とほぼ同じ速さで通過するので、鏡を通りぬけるのに要する時間は重力波の周期に比べ、ずっと短い。このため momentum deposit によって鏡にかかる力は δ 関数と同じ時間依存性を持つとしてよい。鏡にかかる力積は渡される運動量に等しいことに気をつけると運動方程式は以下ようになる（散逸は省略した）。

$$M\ddot{X}(t) + M\omega_0^2 X(t) = \Delta P \delta(t) \quad (2)$$

M, ω_0, X は鏡の質量、振り子の共鳴角周波数、鏡の変位である。Fourier 変換³して、振り子の散逸と式 (1) を考慮すると、

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{l}{2\pi c} \left(\frac{dE}{dl} \right) \frac{1}{-M\omega^2 + M\omega_0^2(1 + i\phi_0)} \quad (3)$$

ϕ_0 は振り子の loss angle。これを逆 Fourier 変換すると

$$X(t) = \frac{l}{cM\omega_0} \left(\frac{dE}{dl} \right) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q_0}t\right) \sin(\omega_0 t) \quad (4)$$

$Q_0 = 1/\phi_0(\omega_0)$ は振り子の Q 値。励起直後の振動の振幅は

$$\begin{aligned} \frac{l}{cM\omega_0} \left(\frac{dE}{dl} \right) &= 2.9 \times 10^{-22} \text{m} \left(\frac{l}{0.1 \text{cm}} \right) \left(\frac{30 \text{kg}}{M} \right) \\ &\times \left(\frac{2\pi \times 0.79 \text{Hz}}{\omega_0} \right) \left(\frac{\rho}{4 \text{g/cm}^3} \right) \left(\frac{1}{2 \text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})} \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dl} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

5.3 弾性振動モード

こちらでは少々方針を変え、energy deposit による弾性振動と momentum deposit による弾性振動の大きさを比較してみよう。機械的応答は同じであるので力の Fourier 成分を比較すればよい。Energy deposit による力の Fourier 成分は⁴

$$|\tilde{F}_{\text{energy}}(\omega)| = \frac{1}{2\pi} \frac{Y\alpha}{1 - 2\sigma} \frac{1}{\rho C} \frac{\omega_n}{v_s} \sqrt{\frac{m_n}{M}} l \left(\frac{dE}{dl} \right) \frac{1}{\omega} \quad (6)$$

²問題となるのは運動量の光軸方向の成分であるが、このレポートでは運動量のノルムを考えることにする。

³Fourier 変換の定義は [3] の式 (12)(13) 参照のこと。

⁴[1] の式 (8)(13) と、式 (33) を求めるときに用いた近似、共鳴型や常温の干渉計では $\omega\tau_n \gg 1$ である [2] ことを考慮した。また式 (33) を求めるときは軌跡の長さを鏡の半径としたが、ここでは l とそのままにした。

である。\$Y, \sigma, \alpha, \rho, C, \omega_n, v_s, m_n\$ は鏡の Young 's modulus、Poisson ratio、熱線膨張率、密度、単位質量当たりの比熱、共鳴角周波数、音速、換算質量である。一方 momentum deposit による力であるが、渡された運動量がすべて弾性振動励起に寄与するわけではない。例えば、軌跡が重心を通る場合には弾性振動を励起することはできない [4]。しかしここでは全て寄与すると考えよう (つまり過大評価)。すると

$$|\tilde{F}_{\text{momentum}}| = \frac{l}{2\pi c} \left(\frac{dE}{dl} \right) \quad (7)$$

である。比をとると

$$\frac{|\tilde{F}_{\text{momentum}}|}{|\tilde{F}_{\text{energy}}(\omega)|} = \frac{1}{c} \frac{1-2\sigma}{Y\alpha} \rho C \frac{v_s}{\omega_n} \sqrt{\frac{M}{m_n}} \omega \quad (8)$$

基本モードを考えると、鏡の径と厚さが大体同じ時は

$$\omega_1 \sim \frac{\pi}{R} v_s \sim \frac{\pi}{E} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (9)$$

$$m_1 \sim \frac{M}{2} \quad (10)$$

である [8, 9]。よって

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{F}_{\text{momentum}}|}{|\tilde{F}_{\text{energy}}(\omega)|} &= \frac{1}{c} \frac{1-2\sigma}{Y\alpha} \rho C \frac{R}{\pi} \sqrt{2} \omega \\ &= 7.8 \times 10^{-8} \left(\frac{1-2\sigma}{0.42} \right) \left(\frac{4 \times 10^{11} \text{Pa}}{Y} \right) \left(\frac{5 \times 10^{-6} / \text{K}}{\alpha} \right) \\ &\times \left(\frac{\rho}{4 \text{g/cm}^3} \right) \left(\frac{C}{7.9 \times 10^2 \text{J/kg/K}} \right) \left(\frac{R}{12.5 \text{cm}} \right) \left(\frac{\omega}{2\pi \times 100 \text{Hz}} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

以上のことからわかるように弾性振動について考えると energy deposit による力の方が momentum deposit よりずっと大きい。共鳴周波数は 10kHz の order であるから共鳴周波数においてもそうである。これは energy deposit は熱緩和に要する時間だけ作用するのでほとんど step 応答であるのに対し、momentum deposit は一瞬で終わるので impulse 応答に相当するからである。よって以下では momentum deposit による弾性振動の励起を考えない。それより energy deposit による弾性振動の方が大きいからである。

6 宇宙線による momentum deposit の見積もり

ここでは momentum deposit による振り子の振動と energy deposit による弾性振動の振幅の大きさ (Fourier 成分の絶対値) を比較する。まず momentum deposition の方は式 (3)

より ($\omega \gg \omega_0$ とした。また l は鏡の半径 R とした)、

$$\begin{aligned}
|\tilde{X}_{\text{mom}}(\omega)| &= \frac{R}{2\pi c} \left(\frac{dE}{dl} \right) \frac{1}{M\omega^2} \\
&= 7.3 \times 10^{-28} \text{m sec} \left(\frac{R}{12.5 \text{cm}} \right) \left(\frac{\rho}{4 \text{g/cm}^3} \right) \left(\frac{1}{2 \text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})} \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dl} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{30 \text{kg}}{M} \right) \left(\frac{2\pi \cdot 100 \text{Hz}}{\omega} \right)^2 \tag{12}
\end{aligned}$$

一方 energy deposit は [1] の式 (33) から

$$\begin{aligned}
|\tilde{X}_{\text{ene}}(\omega)| &= \frac{1}{2\pi^{7/4}} \frac{\alpha \sqrt{(1-\sigma^2)}}{1-2\sigma} \frac{1}{\rho C} \left(\frac{dE}{dl} \right) \frac{1}{\sqrt{Rr_0}} \frac{1}{\omega} \\
&= 8.1 \times 10^{-25} \text{m sec} \left(\frac{\alpha}{5 \times 10^{-6}/\text{K}} \right) \left(\frac{1}{2.3} \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{1-2\sigma} \right) \left(\frac{7.9 \times 10^2 \text{J/kg/K}}{C} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2 \text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})} \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dl} \right) \left(\frac{12.5 \text{cm}}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{3 \text{cm}}{r_0} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi \cdot 100 \text{Hz}}{\omega} \right) \tag{13}
\end{aligned}$$

である。つまり 100Hz 付近で momentum deposit による振り子の振動の Fourier 成分は energy deposit の 1/1000 倍である。以上のことから energy deposit による弾性振動の方が momentum deposit による振り子の振動より大きいことがわかる。よって momentum deposit による励起は弾性振動でも振り子でも energy deposit より小さいので、配慮する必要はないということがわかった。また式 (11)、(12)、(13) から 100Hz 付近では momentum deposit による振り子振動の方が、momentum deposit による弾性振動より大きいことがわかる。

7 過去の論文との比較

Giuzotto が 1988 年に発表した見積もり [4] は、今回求めた公式と同一のものを提示している。しかし energy deposit の方を過少評価している (熱応力に対する応答を step 応答でなく impulse 応答と勘違いしているため)。それでも energy deposit は momentum deposit による弾性振動より大きく、momentum deposit による振り子振動と同程度である。そして干渉計にとって問題となる大きさではないとしている。

Marin の結果 [5] は最初の式は定数倍を除くとこのレポートと同じ (定数倍の違いは近似などによるもので本質的でない) が、burst 以降はよくわからない計算をしている。

Clay et al. も momentum deposit について述べているが [6]、基本的に [4] の引用である。

Braginsky et al. [7] では 0.01sec (おそらく重力波の周期) の間の鏡の移動量を計算している。Power spectrum density を幅 100Hz で積分した値に相当するか。ともかく Advanced LIGO で問題にならないという結果。

8 Exotic particle search

ここでは exotic particle search の可能性について考える。宇宙線の場合、momentum deposit による励起は energy deposit より小さかった。宇宙線の場合、光と同じ速さで走っていることを前提として、計算した。しかし exotic particle は光と同じ速さで走っているという必然性はない。よってここでは光より遅い exotic particle (速さ v) について考える。また先の議論から momentum deposit によって励起される弾性振動は振り子モードより小さいので以下では振り子のみ考える。

8.1 光より遅い場合

Exotic particle が鏡を通過してエネルギー ΔE 、運動量 ΔP だけ失ったとしよう。光より遅いので

$$E - \Delta E = \frac{(P - \Delta P)^2}{2m} \quad (14)$$

となる。 E, P はもともと持っていたエネルギーと運動量。 m は exotic particle の質量。 $E \gg \Delta E, P \gg \Delta P$ として、1次の微小量まで考えると

$$\delta E \sim \frac{P\Delta P}{m} = v\Delta P \quad (15)$$

となる。よって式(1)は

$$\Delta P = \frac{\Delta E}{v} = \frac{1}{v} \left(\frac{dE}{dl} \right) l \quad (16)$$

となる。以降の計算は全く同じであるので⁵、式(3)、(4)は c を v に置き換えればよい。

以上のことから遅い exotic particle は光と同じ速さの場合と比べて形式上は c/v 倍大きいことになる。この factor はかならず 1 より大きく、また桁違いに大きい可能性もある。 dE/dl が速度依存性を持つことを考慮しなければならないが、exotic particle search に関してかなり有利な点と言える。

なぜ速度が遅いと大きくなるのかというと、光とほぼ同じ速さのときは E は P に比例するが、遅いときは E はほとんど P に依存しないからである (E は静止エネルギーである Mc^2 にほぼ等しいから)。このため P が少し変化しても E は変わらない。逆に E が変化すると P は drastic に変わることになる。これによって ΔE から ΔP への変換係数が大きくなる。

さて v が小さい方が有利であるが、どのくらいまで許容されるのだろうか。原理的にはいくら小さくてもよいが、reasonable な平均の最小値を考える。地球上に検出器を置くこ

⁵理由はこの subsection の最後の paragraph を参照。

とを考えると、exotic particle が地球と一緒に移動するときが一番小さい v となる。これは exotic particle が地球の重力 potential に捕らえられていることを意味する。このとき Virial 定理から平均的な exotic particle の速さは大体地球からの脱出速度

$$v \sim 10\text{km/s} \quad (17)$$

に等しい。以下では v をこの値として計算する。

式 (2) を導くときに cosmic ray particle が鏡を通過する時間は重力波の周期より短いとして、力は δ 関数に従うとした。上記の速度 $v \sim 10\text{km/s}$ のときでも鏡の径は 10cm の order だから通過に要する時間は $10\mu\text{m}$ 程度となり、やはり重力波の周期より短く同じ議論が成り立つ⁶。

8.2 Exotic particle search についての利点

Momentum deposit による振り子モードの励起による exotic particle search は以上に述べた遅いと振動が大きくなるという以外に以下のような利点がある。

- template の数が少ない：励起振動の時間依存性が計算できるので matched filter を使うことになるが、弾性振動の場合、particle の軌跡の位置に強く依存するので大量の template が必要になる。振り子モードの場合は式 (3) を使えばそれで終わりである⁷。
- 低温でも振動の大きさは変わらない：energy deposit の場合は熱緩和時間が低温で短くなるので低周波の Fourier 成分が小さくなった [2, 3]。Momentum deposit は熱的な過程でなく温度に依存しない。Energy deposit で exotic particle search をするとき、exotic particle に対する感度をよくすることは cosmic ray に対する感度を良くすることと同じである。しかし momentum deposit で search を行う場合は、低温にして energy deposit の感度を下げれば、cosmic ray は energy deposit dominant なので、cosmic ray に関しては感度が下がり、exotic particle は momentum deposit dominant なので、感度が下がらない。

⁶もし重力波の周期より長くなると力は δ 関数として扱えないが、力積は particle から渡された運動量に等しいので力の積分値は変わらない。このため力の Fourier 成分は particle が鏡を通過する時間の逆数の周波数より低いところは δ 関数のときと同じで、高いところは周波数に対して単調減少する。よって式 (3) は過大評価ということになる。以下ではこのような場合を考えない。

⁷鏡の回転などのモードが無視できれば。

8.3 Second generation interferometer の場合

Second generation interferometer の exotic particle への感度を見積もってみよう。Advanced LIGO や LCGT が考えられるが、ここでは LCGT を考える。Momentum deposit で励起された振動は計算できるので matched filter を使うことができる。Signal-to-noise ratio(S/N) は [10]

$$S/N = 4\pi \sqrt{\int_0^\infty \frac{|X_{\text{mom}}(\omega)|^2}{L^2 G_{\text{int}}(f)} df} \quad (18)$$

となる。\$L, G_{\text{int}}\$ は干渉計の腕の長さ と感度 (strain) である。式 (12) の \$c\$ を \$v\$ にして代入して計算すると、

$$\begin{aligned} S/N &= 10^1 \left(\frac{R}{12.5\text{cm}} \right) \left(\frac{\rho}{4\text{g/cm}^3} \right) \left(\frac{1}{50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2}) \rho} \frac{dE}{dl} \right) \\ &\times \left(\frac{10\text{km/s}}{v} \right) \left(\frac{30\text{kg}}{M} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

[3] の Ref.[75] によると共鳴型重力波検出器 (bar) や scintillator や track-etch detector は \$10\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})\$ の order の loss の exotic particle を検出出来る。つまり second generation interferometer は momentum deposit の振り子振動モードを利用すると bar、scintillator や track-etch detector と同程度の感度を持つ。

8.4 First generation interferometer の場合

現在稼働中の first generation について考えてみる。Second generation と同じく km scale の LIGO と VIRGO について考えた。感度を図 1 に載せた。縦軸は displacement、すなわち式 (18) の \$L\sqrt{G_{\text{int}}}\$ に相当することに注意。\$(1/\rho)dE/dl = 50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})\$ のときの S/N をグラフに載せた。LIGO と VIRGO はどちらも鏡は fused silica なので \$\rho = 2.2\text{g/cm}^3\$ とし、[11] から LIGO の鏡は半径 \$12.5\text{cm}\$、厚さ \$10\text{cm}\$、VIRGO は半径 \$17.5\text{cm}\$、厚さは front と end の平均をとって \$15\text{cm}\$ としたが、少々異なるかもしれない。LIGO, VIRGO とともに LCGT より 1 桁半程度小さい。\$|\tilde{X}_{\text{mom}}|\$ が \$\omega^{-2}\$ に比例するので \$100\text{Hz}\$ 及びそれより下の帯域の感度が一番重要となる。\$100\text{Hz}\$ の displacement noise は LIGO、VIRGO は LCGT より 1 桁程度悪く、かつ低周波側の感度が悪く積分範囲が実質的に狭いことが効いている。

CLIO についても考えてみた。図 2 を参照のこと。CLIO の S/N は LIGO や VIRGO とほぼ同等であることに注意。これはまず exotic particle search に求められるのは displacement sensitivity であって strain sensitivity でないということである [2, 3]。CLIO の最新の displacement sensitivity は LIGO、VIRGO より \$100\text{Hz}\$ 付近で 1 桁程度悪い。この差は鏡が

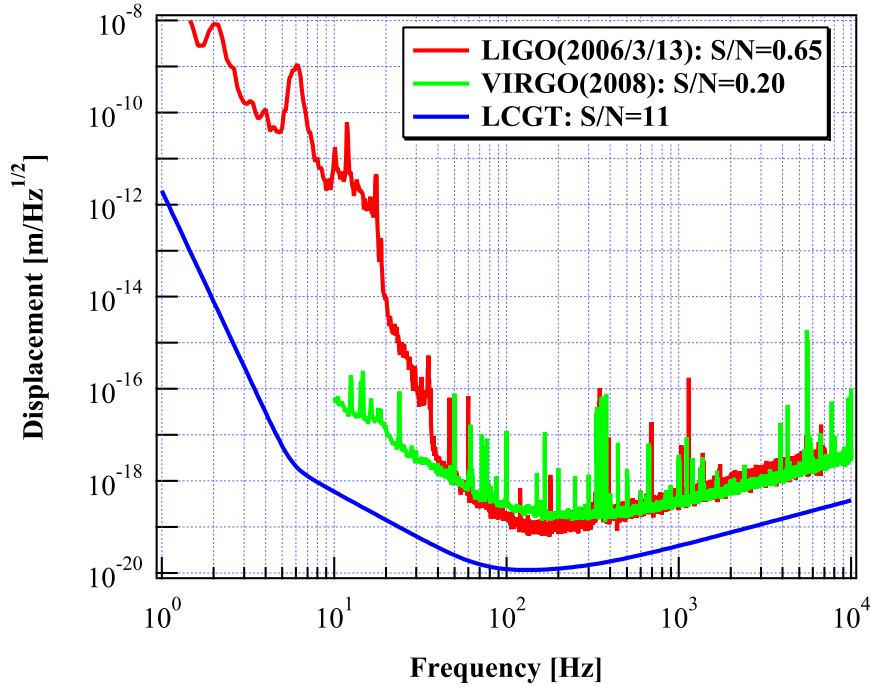


図 1: Second generation interferometer (LIGO and VIRGO)。縦軸は displacement、すなわち式 (18) の $L\sqrt{G_{\text{int}}}$ に相当することに注意。 $(1/\rho)dE/dl = 50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$ のときの S/N をグラフに載せた。

軽いということで相殺される。式 (3) からわかるように \tilde{X}_{mom} は鏡の中の軌跡の長さ l に比例し、質量 M に反比例する。前者は鏡の scale に、後者は scale の 3 乗に比例するので、結果として $|\tilde{X}_{\text{mom}}|$ すなわち S/N は scale の 2 乗に反比例する。CLIO が常温の限界感度に到達すると、LIGO より良くなり (displacement noise が LIGO と同じ)、低温の限界感度では LCGT の半分程度にまでなるということを強調しておく。

8.5 Interferometer for exotic particle

Momentum deposit による振り子振動を利用すると LCGT は共鳴型検出器 (bar) やその他の scintillator や track-etch detector と同程度の感度を持っていることがわかった。しかしこれだけでは十分でない。干渉計の cross section は他の装置に比べると小さい [2, 3] ので感度が他よりもずっとよいということが必要条件になるだろう⁸。ここでは LCGT を元にして exotic particle search 向きに改良することを考える。干渉計の感度の諸公式に関しては

⁸十分条件かはわからない。

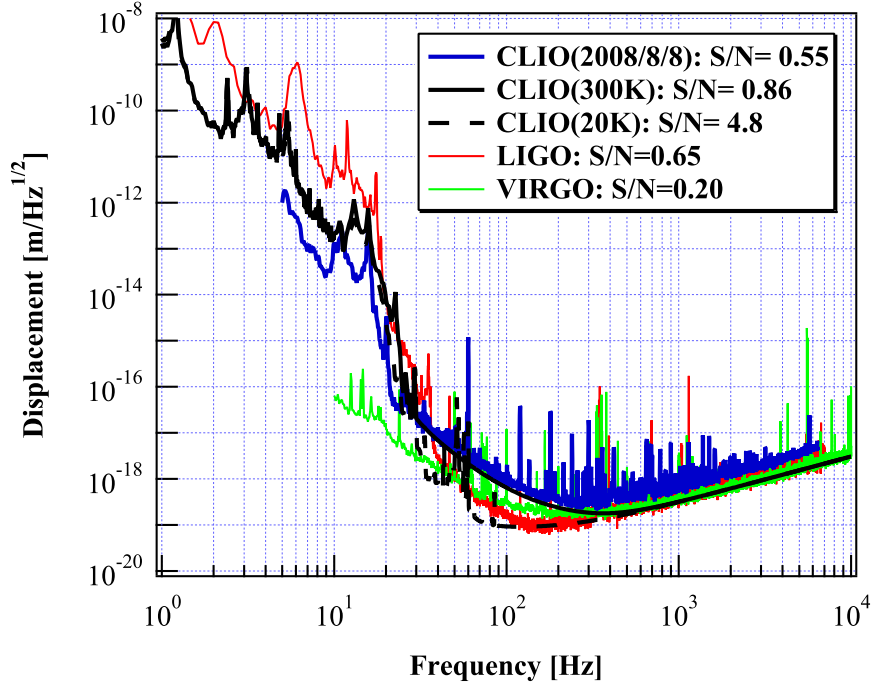


図 2: Second generation interferometer (CLIO)。縦軸は displacement、すなわち式 (18) の $L\sqrt{G_{\text{int}}}$ に相当することに注意。 $(1/\rho)dE/dl = 50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$ のときの S/N をグラフに載せた。CLIO 300K と 20K は常温と低温での CLIO の限界感度である。

[12] を参考のこと。

まず $|\tilde{X}_{\text{mom}}|$ を考える。 $(1/\rho)dE/dl$ は物質に依存しないので式 (12) から $|\tilde{X}_{\text{mom}}|$ で検出器に依存する parameter だけ書き出すと

$$|\tilde{X}_{\text{mom}}| \propto \frac{R\rho}{M} = \frac{R}{V} \quad (20)$$

V は鏡の体積。 R は鏡の scale に比例し、 V は scale の 3 乗に比例するので、 $|\tilde{X}_{\text{mom}}|$ は scale の 2 乗に反比例する。ただし cross section が scale の 2 乗に比例することに注意。しかしこれは cross section が小さくなった分、沢山つくるということで原理的には補償することが可能である。よって感度向上だけを考える。

鏡を小さくすることで $|\tilde{X}_{\text{mom}}|$ を大きくすることができるが、基準とするのが LCGT なので注意する必要がある。 Exotic particle search にとって一番大事なのは 10Hz から 100Hz の帯域であるが、ここは LCGT は radiation pressure noise で制限されており、これは鏡の質量、つまり scale の 3 乗に反比例するからである。つまり軽くすると radiation pressure noise によって S/N が悪化してしまう。これをさけるために laser power を下げる。ただあまり下げすぎて shot noise の方が大きくなるとまた S/N が低下するので最適値が存在する

はずである。よって以下のように考える。

- LCGT の鏡を小さくしてみる
- laser power を下げて最適な値を考える
- 話を簡単にするために腕の長さは縮めることを考える。これは exotic particle search では displacement sensitivity が問題となるからである [2, 3]。これにより cavity の帯域幅が広がるので shot noise と radiation pressure noise は低周波近似を用いる。
- 話を簡単にするため熱雑音はとりあえず無視し、shot noise, radiation pressure noise, seismic noise のみ考える。

結果を図 3 にまとめた。それぞれ鏡の scale が LCGT の 1 倍 (左上) 0.1 倍 (右上) 0.01 倍 (左下) のときである。横軸は beam splitter での power を LCGT の値⁹で規格化したもの、縦軸は S/N である。今までと同じく $v = 10\text{km/s}$ 、 $(1/\rho)dE/dl = 50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$ とした。各々の鏡の scale で最適な power があること、その最適な場合の S/N は鏡が小さいほど大きいこと (だが scale にそれほど強く依存しない) ことがわかる。

ここでは鏡の scale が 0.01 倍のときを考えてみよう。鏡は半径 1.25mm、厚さ 1.5mm とかなり小さい。質量はおよそ 30mg となる。鏡の scale が小さくなった分 beam 径も小さくする必要がある。beam 径は基線長の平方根に比例するので長さを 30cm 以下にすれば beam 半径は 3cm から 0.3mm 以下になる。S/N の最大値はおよそ 320 である。これは particle と material の電磁相互作用を考えた時の energy loss の最小値 (電離による energy loss [13, 14]) $(1/\rho)dE/dl = 2\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$ においても S/N が 10 を超える (S/N=13) ことを意味している。またこれは共鳴型検出器 (bar) やその他の scintillator や track-etch detector より 1 桁は感度がよいことを意味している。この最適な S/N を与える power は LCGT の 5×10^{-9} 倍である。LCGT の power recycling 前の入射 power と power recycling gain の積は 825W なので exotic particle search では power recycling なしで $4\mu\text{W}$ 入射すれば十分であることがわかる。Cross section が半分になることを許容して、単純な Michelson 干渉計にすることも可能であろう。Shot noise は finesse に比例し、LCGT の finesse は 1550 なので、0.25W 程度¹⁰の power を干渉計に入射できれば、腕の cavity は必要ない。LCGT と同じ finesse の cavity がある場合の干渉計の displacement sensitivity を図 4 に示す。鏡の scale が LCGT の 0.01、0.1、1 倍のときに光の power を調節して S/N を最大にした場合の sensitivity ($(1/\rho)dE/dl = 50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$, $v = 10\text{km/s}$ とした) を示している。Beam

⁹Power recycling mirror 前の power が 75W で power recycling gain が 11。よって 825W。

¹⁰正確な値を計算するためには鏡の数が 4 から 2 になって radiation pressure noise が半分になることを考慮する必要がある。それほど異なるとは思えないが。

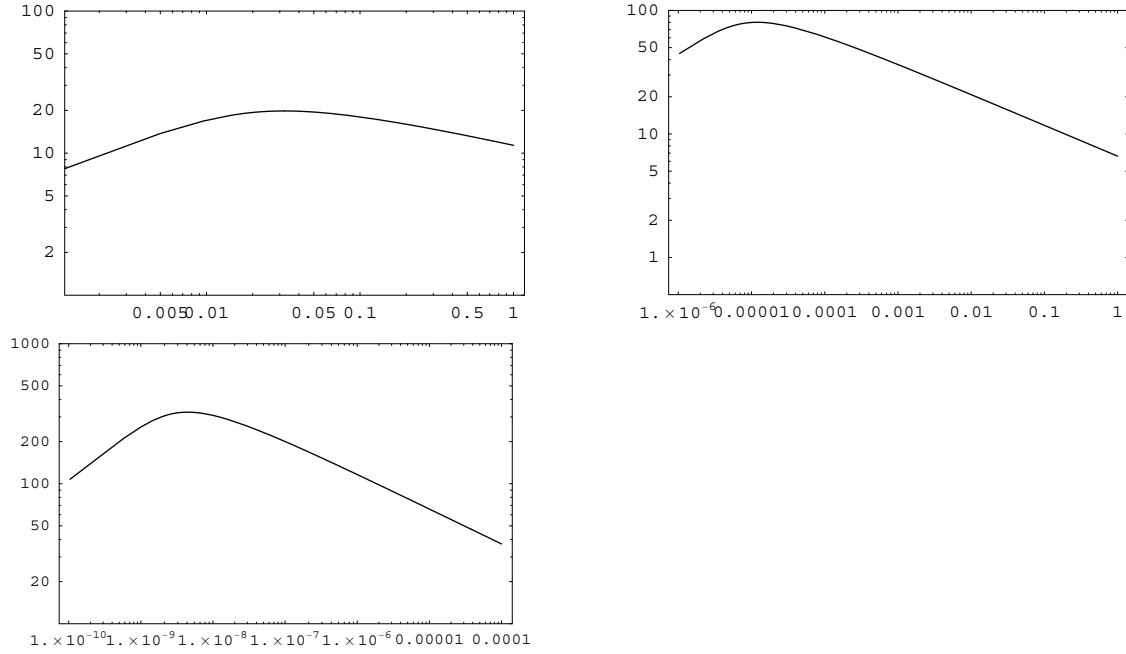


図 3: 鏡の大きさと laser power を変えたときの S/N の変化。それぞれ鏡の scale が LCGT の 1 倍 (左上)、0.1 倍 (右上)、0.01 倍 (左下) のときである。横軸は beam splitter での power を LCGT の値 (825W) で規格化したもの、縦軸は S/N である。今までと同じく $v = 10\text{km/s}$ 、 $(1/\rho)dE/dl = 50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$ とした。

splitter での power と S/N も載せている。鏡の scale が LCGT の 0.01 倍のときは shot noise は $10^{-16}\text{m}/\text{Hz}^{1/2}$ 程度と干渉計としてそれほど厳しい要求でない。むしろ防振して 10Hz 以下まで shot noise limit にすること、小さい鏡をとりあつかう方が難しいだろう。

熱雑音を無視していたのでここで考える。図 4 では鏡の大きさが LCGT の 0.01 倍のときの熱雑音が表示されている。まず鏡のほうから。LCGT では coating loss による熱雑音が dominant で 100Hz で $4 \times 10^{-21}\text{m}/\text{Hz}^{1/2}$ である。これは beam 径に反比例、周波数の平方根に反比例、温度の平方根に比例することを考えると 10Hz で $4 \times 10^{-18}\text{m}/\text{Hz}^{1/2}$ (常温) となり問題にならない。しかし bulk の thermoelastic damping は常温で $2.6 \times 10^{-16}\text{m}/\text{Hz}^{1/2}$ at 10Hz (周波数に反比例) となるので (S/N は 29 まで下がる) 鏡は冷却したほうがよい。振り子の熱雑音は Q を固定すると $\sqrt{T/M}$ (T, M は振り子の温度、鏡の質量) に比例する。 \tilde{X}_{mom} は式 (20) より鏡の scale の 2 乗、つまり M の 2/3 乗に反比例するので鏡が小さい方が振り子の熱雑音に対して有利である。 $Q = 10^8$ 、 $T = 20\text{K}$ として計算すると、LCGT の 0.01 倍の鏡では $1.9 \times 10^{-16}\text{m}/\text{Hz}^{1/2}$ at 10 Hz となる。このため 10Hz 付近では shot noise や radiation pressure noise より大きくなる。このため S/N は 320 から 105 とおよそ半桁減る¹¹。冷却し

¹¹laser power を再度調節すると S/N が向上する可能性はあるが、確認していない。確実に言えるのは 320

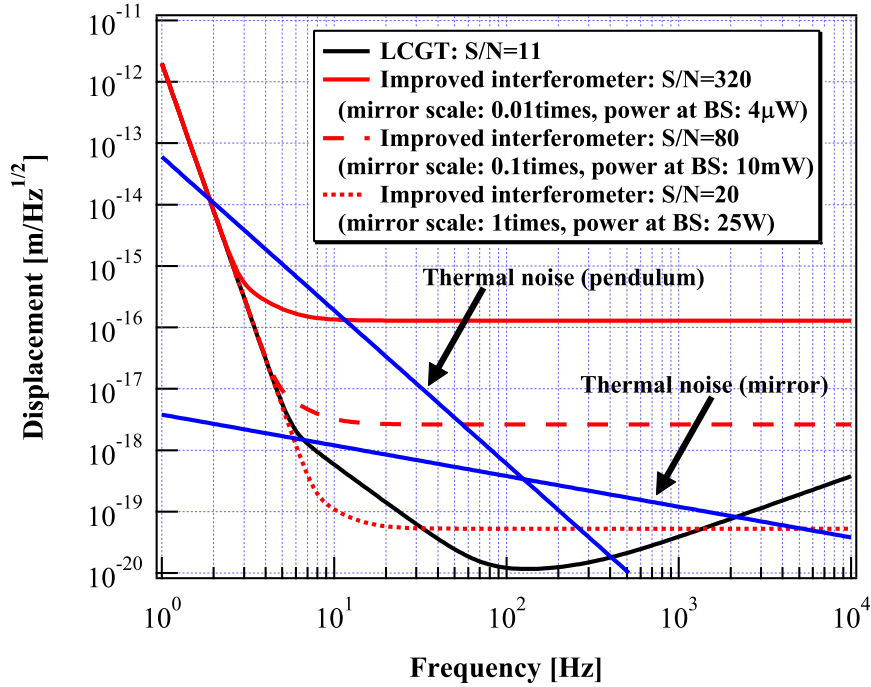


図 4: Interferometer for exotic particle search。縦軸は displacement、すなわち式 (18) の $L\sqrt{G_{\text{int}}}$ に相当することに注意。LCGT と同じ finesse(1550) の cavity を持つとする。鏡の scale が LCGT の 0.01、0.1、1 倍のときに光の power を調節して S/N を最大にした場合の sensitivity ($(1/\rho)dE/dl = 50\text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$, $v = 10\text{km/s}$ とした) を示している。Beam splitter での power と最適な S/N も載せている。鏡の大きさが LCGT の 0.01 倍のときの熱雑音も示した。温度は 20K とした。振り子の Q 値は 10^8 である。振り子の熱雑音によって S/N は 320 から 105 に低下する。

ないとさらに S/N が悪化するので振り子の熱雑音という観点からも冷却したほうがよい。

8.6 particle に課せられる条件

8.6.1 質量

ここでは particle は光よりずっと遅くかつその energy のほんの一部だけが鏡に渡されると考えているので

$$\frac{1}{2}mv^2 \gg l \left(\frac{dE}{dl} \right) \quad (21)$$

まではいかないということである。

でなければならない。 m は particle の質量。鏡の中の軌跡の長さ l を鏡の半径 R として particle の質量 m に関する条件を求めると

$$mc^2 \gg \frac{2Rc^2}{v^2} \left(\frac{dE}{dl} \right) \\ \sim 4.5 \times 10^9 \text{GeV} \left(\frac{R}{12.5 \text{cm}} \right) \left(\frac{10 \text{km/s}}{v} \right)^2 \left(\frac{\rho}{4 \text{g/cm}^3} \right) \left(\frac{1}{50 \text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})} \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dl} \right) \quad (22)$$

Proton や neutron の質量が 1GeV であることを考えるとかなり重い particle である。鏡を LCGT の 1/100 の scale にしたときでも、 $1.8 \times 10^6 \text{GeV}$ となる (但し $(1/\rho)dE/dl = 2 \text{MeV}/(\text{g cm}^{-2})$ とした)。かなり重く、物質と大きな相互作用をする particle となるが、elementary particle の集合体として nuclearite や mirror matter、単独の elementary particle としては monopole (10^{16}GeV 程度 [15]) が考えられる¹²。これらについては [2] を参照のこと。

8.6.2 flux

LCGT と同じ大きさの鏡を 4 つもつ検出器を一年間運転して少なくとも 1 つの particle を検出するには flux が

$$\frac{1}{12.5 \text{cm} \times 2 \times 15 \text{cm} \times 4 \times 2\pi \text{str} \times 1 \text{year}} = 3.4 \times 10^{-12} / \text{cm}^2 / \text{str} / \text{sec} \quad (23)$$

以上でなければならない。

宇宙の平均密度から flux に関する上限が課せられる¹³。宇宙の平均密度は臨界密度に等しく

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G} = 5 \times 10^3 \text{eV/cm}^3 \quad (24)$$

となる [15]。 G, H_0 は万有引力定数と Hubble 定数 (70km/sec/Mpc とした)。ただ現実的には上記の 3/4 は dark energy なので 1/4 をかけたものが exotic particle の上限となる。これを particle の質量で割ると数密度 N の上限が求まる。At random に運動しているとすれば flux は $Nv/(4\pi)$ となるので [15] flux の上限は以下ようになる。

$$2 \times 10^{-11} / \text{cm}^2 / \text{str} / \text{sec} \left(\frac{v}{10 \text{km/sec}} \right) \left(\frac{4.5 \times 10^9 \text{GeV}}{M} \right) \quad (25)$$

¹²monopole については flux に既に厳しい制限がかけられている [15]。他の particle も要調査。

¹³但しあくまでも宇宙全体の平均なので地球近傍でそれより大きい可能性はある。Lunar laser ranging と LEGEOS geodetic survey satellite から月 (軌道半径 384000km) と LEGEOS 人工衛星 (軌道半径 12300km、地球半径のおよそ 2 倍) の間の質量は地球質量の 4×10^{-9} 倍以下という制限がかけられている [16]。これらから計算すると上限は $5 \times 10^{10} \text{GeV/cm}^3$ となる。これは宇宙の平均密度より 16 桁大きい。これはかなり緩い制限なので他の観測の方が厳しい制限を課しそうである。

以上のことから LCGT で 1 年観測すると宇宙の平均密度より factor 厳しい制限をかけることができる。LCGT の 0.01 倍の scale の鏡で干渉計を作るときは先に見た通り $1.8 \times 10^6 \text{ GeV}$ が質量の下限なので

$$5 \times 10^{-8} / \text{cm}^2 / \text{str} / \text{sec} \left(\frac{v}{10 \text{ km} / \text{sec}} \right) \left(\frac{1.8 \times 10^6 \text{ GeV}}{M} \right) \quad (26)$$

となる。断面積が 10^{-4} 倍となっているので干渉計が 1 つでも 1 年間観測すると宇宙平均密度と同程度の制限 ($3.4 \times 10^{-8} / \text{cm}^2 / \text{str} / \text{sec}$) をかけることができる。

9 まとめ

- cosmic ray particle の momentum deposit の干渉計型重力波検出器に対する影響を調べた。
- momentum deposit による鏡の弾性振動は momentum deposit による振り子振動より小さい。そしてこの振り子振動は energy deposit による弾性振動より小さい。つまり cosmic ray に関する限り、momentum deposit は考えなくてよい。
- cosmic ray particle と異なり exotic particle は光 (c) より遅い速さ (v) である可能性がある。この場合 momentum deposit は cosmic ray particle の c/v となる。このため exotic particle search に使える可能性がある。以下では exotic particle は地球の重力 potential に捕捉されているとして $v=10 \text{ km} / \text{s}$ として考える。
 - LCGT の場合、 $(1/\rho)dE/dl = 50 \text{ MeV} / (\text{g cm}^{-2})$ で $S/N=11$ となる。これは共鳴型重力波検出器 (bar) scintillator や track-etch detector と同程度の感度を持つことを意味する。
 - LIGO や VIRGO の現在の感度では、LCGT より S/N は 1 桁半程度小さい。
 - 現在の CLIO の感度では S/N は LIGO や VIRGO と同じである。これは strain sensitivity でなく displacement sensitivity が exotic particle search の S/N を決めることと、鏡が小さいことによる。冷却すると S/N は LCGT の半分程度になる。
 - exotic particle search に特化した干渉計を考えた。LCGT の鏡の大きさを 0.01 倍 (半径 1.25mm、厚さ 1.5mm、質量 30mg) にすると (腕の長さを 30cm 程度以下にする必要あり) S/N は 100 程度になる。但し熱雑音を下げると冷却する必要があり。Cross section が小さくなったので多数作る必要がある。

- target となる exotic particle の質量はかなり重くなければならない。LCGT では $4.5 \times 10^9 \text{ GeV}$ 、exotic particle search に特化した場合は $1.8 \times 10^6 \text{ GeV}$ 以上でなければならない。
- LCGT の場合でも exotic particle search に特化した場合でも、宇宙の平均密度から課される上限より厳しい制限を 1 年間の観測で flux に課することは可能である。

参考文献

- [1] 山元 一広、宇宙線の干渉計型検出器への影響 II (宇宙線によって励起される鏡の弾性振動の評価) (2006).
<ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/yamamoto/cosmicray/cosmicray3.pdf>.
- [2] 山元 一広、宇宙線の干渉計型検出器への影響 II (干渉計への影響の具体的な評価) (2006).
<ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/yamamoto/cosmicray/cosmicray4.pdf>.
- [3] K. Yamamoto et al., Phys. Rev. D 78 (2008) 022004.
- [4] A. Giazotto, Phys. Lett. A 128 (1988) 241.
- [5] A. Marin, *Proceedings of the 2nd Gravitational Wave Data Analysis Workshop, Orsay, France, November 1997*, p 193.
- [6] R.W. Clay et al., Publ. Astron. Soc. Aust. 14 (1997) 195.
- [7] V.B. Braginsky et al., Phys. Lett. A 350 (2006) 1.
- [8] G. Liu et al., Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 271.
- [9] A. Gillespie et al., Phys.Rev.D 52 (1995) 577.
- [10] L.S. Finn et al., Phys. Rev. D 47 (1993) 2198.
- [11] 山元 一広、修士論文、東京大学 (1997).
http://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/yamamoto_m.pdf
- [12] 山元 一広、LCGT の目標感度。
- [13] T.K. Gaisser, *Cosmic Rays and Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990).

- [14] M.S. Longair, *High Energy Astrophysics Vol. I* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992).
- [15] 長島順清、高エネルギー物理学の発展（朝倉物理学大系）、朝倉書店、1999
- [16] S.L. Adler, gr-qc/0808.0899