

Recycling cavity 用鏡の仕様の決定方法に関するメモ

廣瀬 榮一（東京大学宇宙線研究所）

山本 博章（カリフォルニア工科大学 LIGO ラボ）

2012/2/23

概要

リサイクリングミラー (PRM, PR2, PR3, SRM, SR2, SR3) の表面形状の仕様について説明する。

1. SIS

鏡表面で生じる損失のうち、表面形状がうねっていることやマイクロラフネス（空間波長 1 mm 以下）の存在によりビームが鏡の外に逃げてしまうことにより生じる損失は、LIGO の SIS という FFT 計算ツールを用いて計算することができる。いま、下図のように X-arm と coupled した PRC と SRC を考える。PRC では、図中左の青い波で示したような正弦波を球面に上乘せしたときに、BS 直後でキャリアの TEM00 モードのパワーがどれだけ落ちるかを計算する。正弦波の周波数を変えながら、PRM、PR2、PR3 の表面を変化させたとき、それぞれの鏡の表面形状がどれだけ損失に効いてくるかを計算する。一方、SRC に関しては、キャリアの TEM00 ではなく、図中右のように ETMX を揺らしたときに生じるサイドバンドの TEM00 モードのパワーが、SRM、SR2、SR3 の表面形状変化に対してどれだけ低下するかを計算する。計算結果を図 2 に示す。

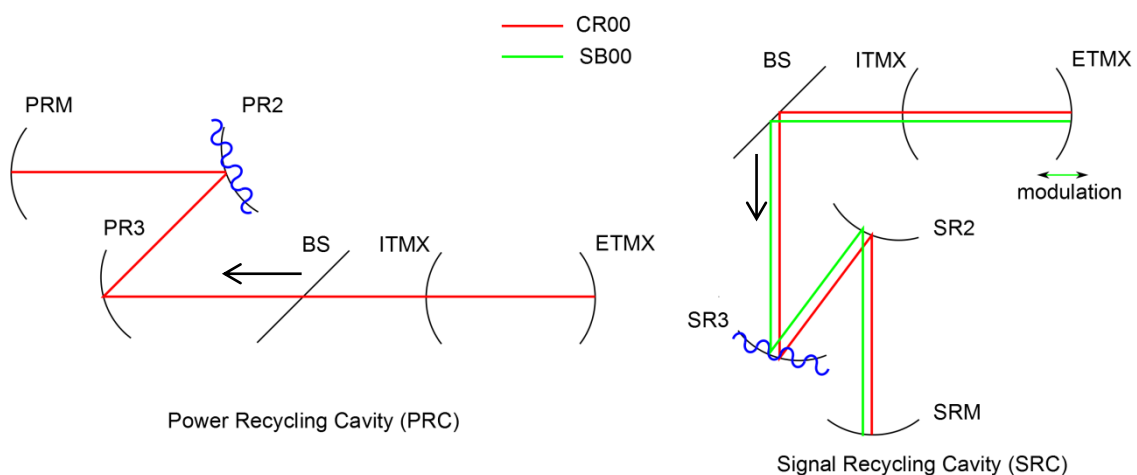


図 1 SIS 計算で用いた coupled cavity の概念図。左が PRC、右が SRC 計算時の Configuration。曲率半径や鏡間の距離などは現時点での ICD の値を使用した。

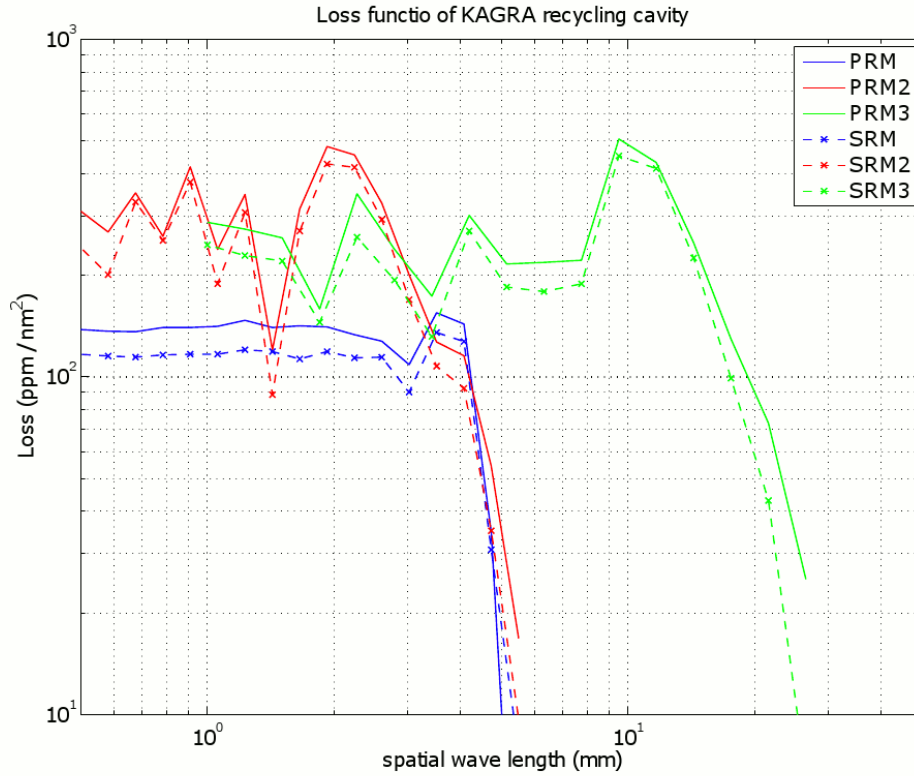


図2 KAGRA リサイクリング鏡の Loss functions (山本)

この計算結果で最も重要なポイントは、各鏡とも、ある一定の空間波長を超えると損失が急激に低下するという点である。「つくり」の観点からすると、この波長以上、つまりある一定以上のうねり成分に対する精度は要求しなくてもいいことになり、研磨屋の負担を小さくすることができる。

2. 表面形状の損失に対する影響

原理的には、研磨後の表面形状の実測 2 次元マップをもとに SIS を走らせれば、正確に損失を見積もることができるはずだが、通常は 1 次元の PSD(Power Spectral Density)で代表することが多く (対称性を仮定する)、それを利用する方法で仕様を指定するのが望ましい。それから、SIS での計算メッシュの最小サイズ Δ は ~ 0.1 mm なので $\sim 1/4\Delta$ 以下では SIS の結果は使用しない。SIS の最小空間波長相当の周波数を $f_{max} = 1/4\Delta$ と定義すると、表面形状による損失 $L_{surface}$ は次式で計算することができる。

$$L_{surface} = \int_{f_0}^{f_{max}} df \cdot PSD(f) \cdot L(f) + \left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \sigma_{rms}^2 |_{f > f_{max}} \quad (1)$$

ここで、 f_0 は前述の損失が急激に低下する周波数、 $\text{PSD}(f)$ は研磨後の実測 1 次元 PSD、 $L(f)$ は Loss function、 σ_{rms} は研磨後の実測 RMS 値である。 同様な仕様の研磨データがあれば、ある程度の予想はつくと考えられるが、 $\text{PSD}(f)$ は研磨後の実測値なので、前もって知ることはいない。 そこで、研磨を依頼する企業に $\text{PSD}(f)$ の実測値をつかって式 (1) を計算してもらい、損失がある一定以下になるように研磨を仕上げてもらう。 (もちろん、テスト研磨などを行い $\text{PSD}(f)$ を予想する時間的経済財的余裕があるときは、こちらで表面 RMS 値まで指定することも可能) 企業に依頼する際に簡便性を考え、図 2 の計算結果を使うのではなく、図 3 に示すような安全側にふるようなステップ関数を用いることにする。

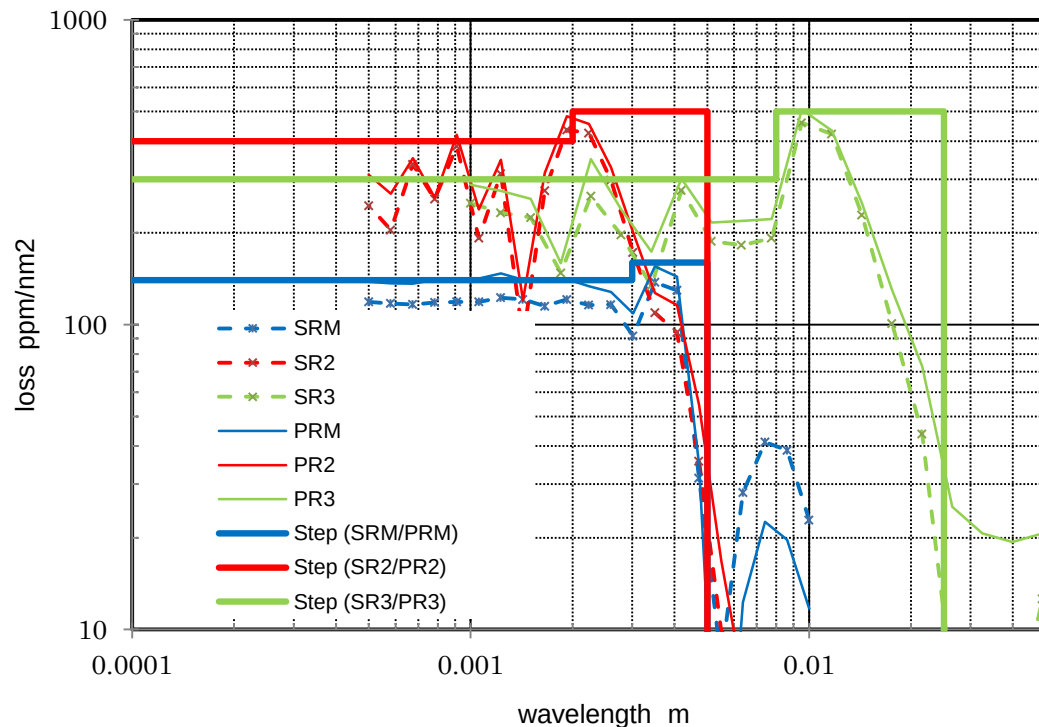


図 3 ステップ関数化した Loss functions

図 3 のステップ関数を具体的に表現すると、

① PRM と SRM

140ppm/nm^2 for $\lambda < 3\text{mm}$ ($f > 1/3\text{ mm}^{-1}$)

160ppm/nm^2 for $3\text{mm} < \lambda < 5\text{mm}$ ($1/5\text{ mm}^{-1} < f < 1/3\text{ mm}^{-1}$)

0ppm/nm^2 for $5\text{mm} < \lambda$ ($f < 1/5\text{ mm}^{-1}$)

② PR2 と SR2

400ppm/nm² for $\lambda < 2\text{mm}$

500ppm/nm² for $2\text{mm} < \lambda < 5\text{mm}$

0ppm/nm² for $5\text{mm} < \lambda$

③ PR3 と SR3

300ppm/nm² for $\lambda < 8\text{mm}$

500ppm/nm² for $8\text{mm} < \lambda < 25\text{mm}$

0ppm/nm² for $25\text{mm} < \lambda$

となる。

計算例

PSD が与えられた時、PRM（または SRM）の損失を式（1）で評価してみる。いま、図 4 のような PSD が与えられたと仮定する（aLIGO の腕用鏡よりだいたい 50 倍くらい悪い）

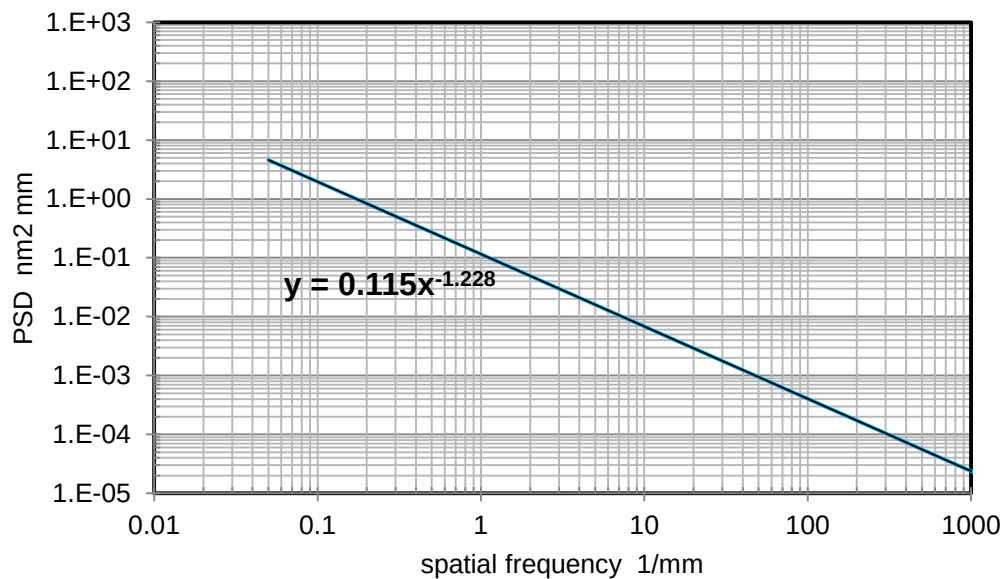


図 4 適当に仮定した PSD

f_0 は 0.2mm^{-1} 、 f_{max} は 2.5mm^{-1} であることと、図 3 のステップ関数を見ながら、

$$L_{surface} = \int_{0.2}^{0.33} df + \int_{0.33}^{2.5} df + \left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^2 \sigma_{rms}^2 |_{f>2.5}$$

となる。空間周波数 0.2mm^{-1} 未満はステップ関数でゼロであることを利用している。第一項と第二項はすぐに計算できて、

$$160\text{ppm}\left\{\frac{0.115}{-0.228}\times[0.33^{-0.228}-0.2^{-0.228}]\right\}+140\text{ppm}\left\{\frac{0.115}{-0.228}\times[2.5^{-0.228}-0.33^{-0.228}]\right\}$$

$$=46.2\text{ppm}$$

となる。したがって、例えば表面形状からくる損失の budget が 79ppm だとすると、第三項は 32.8ppm 以下である必要がある。これよりただちに以下のようになる。

$$\sigma_{rms} < 0.48nm: f > 2.5mm^{-1}$$

3. Loss budget

干渉計グループから現在要求されているリサイクリング鏡の損失は以下のとおりである。

PRM	PR2	PR3	SRM	SR2	SR3
100ppm	100ppm	100ppm	100ppm	100ppm	100ppm

表 1 各鏡での許容損失

また、ICD で想定している鏡の損失の内訳は以下のようなものである。

Cause of loss	Fraction of loss [ppm]
1) diffraction	0
2) defects (scratch, sleek, point defect)	1
3) point scattering	10
4) absorption	10
5) roughness loss due to high spatial frequency (HSF)	Discussed in this document
6) figure loss due to low spatial frequency (LSF)	Discussed in this document

表 2 Loss budget

ただし、diffraction はビーム系が鏡の大きさに比べて小さく（一番厳しい SR3,PR3 でもビーム半径 $w=36.5\text{mm}$ に対して、直径 $2a=220\text{mm}$ ($\sim 6w$) での power transmission が $1-e^{-2(3w)^2/w^2}=1-1.5\times 10^{-8}$)、ここでは無視する。またスクラッチやスリークにより生じる損失は次式で与えられる。

$$\frac{32\pi}{w_0^2\lambda^2}Sh^2$$

ここで、 S はスクラッチやスリークの合計面積、 w_0 はビームスポット半径、 λ はビーム波長、 h はキズの深さである（ここでは 20nm を用いる）。例えば、PRM で S を $\sim 4 \times 10^4 \mu\text{m}^2$ にするとだいたい損失は 1ppm になるが、この面積は aLIGO でのテストマスでの実績から十分可能と判断する。

各鏡の損失の合計を L_{total} 、上記の内訳をそれぞれ $L_1 \sim L_6$ とすると

$$L_{total} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6$$

という関係がある。干渉計から要求されている損失の合計が表 1 で与えられている（今の場合 100ppm ）ので、これより表面形状により生じる損失の許容値が決定する。すなわち、

$$L_5 + L_6 \leq L_{total} - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$$

したがって、

$$L_5 + L_6 \leq 79\text{ppm}$$

が鏡の表面形状に対して要求される損失になる。

参考文献

- 1) SIS (Stationary Interferometer Simulation) manual, Hiroaki Yamamoto, LIGO-T070039v7
- 2) Effect of small size anomalies in a FP cavity, Hiro Yamamoto, LIGO-T1000154-v5
- 3) Optics, Cavity and Loss: What we learned in aLIGO, Hiro Yamamoto, JGW-G1100517
- 4) Personal communication between Hiroaki Yamamoto and Eiichi Hirose
- 5) ICD, <https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/svn/LCGT/trunk/ICD/icd.pdf>