

The parametric instability in the bKAGRA (ver. 3)

東大坪野研 柴田和憲

2012年2月8日

1 Background

bKAGRAにおける鏡 ITM, ETM の曲率半径 (Radii Of Curvatures, ROC)(g-factor) R_1, R_2 は 2011 年 1 月現在、未決定であった。ただし、g-factor の積は決まっていたので ($g_1 g_2 = 0.497$)、ROC は候補は positive g-factor のプラン ($R_1 = 14 \text{ km}, R_2 = 7.5 \text{ km}$) と negative g-factor のプラン ($R_1 = 1.68 \text{ km}, R_2 = 1.87 \text{ km}$) の二つに絞られていた。

- negative g-factor $R_1 = 1680 \text{ m}, R_2 = 1780 \text{ m}$
- positive g-factor $R_1 = 14000 \text{ m}, R_2 = 7500 \text{ m}$

角度揺れ制御 (Alignment Sencing and Controlling, ASC) の観点から negative g が支持されていたが、negative g の場合には parametric instability (PI) が起こりやすいという問題が指摘されている。そこで、positive/negative それぞれで PI について、そのセベリティを検証した。

2 Introduction: About parametric instability

Advanced LIGO や KAGRA のような重力波検出器は Fabry-Perot (FP) 干渉計で構成される。

FP 干渉計を構成する鏡 ITM, ETM はそれぞれ弾性体としての固有モードを持つ。これらは共振器の基本モード E_{00} を散乱して、opto-acoustic interaction によって E_{TEM} を励起する。そして TEM モードもまたその輻射圧によって鏡の固有モードを励起する。この feedback によって一部の弾性モードが非常に不安定となり、干渉計のロックに支障をきたしうる。

通常の干渉計では輻射圧自体が小さいので、通常の干渉計ではこの現象は問題とならない (強く励起されてしまう前に $\omega_m/2Q$ に従って減衰する) が、レーザー干渉計型の重力波望遠鏡においては、共振器内に高いパワーが蓄えられるため、レーザーのもたらす揺動力が大きくなり、PI は大きな問題となりうる。

PI の起こる条件は以下の不等式で表される [1, 2, 3] :

Power Recycling (PR) と Resonant Sideband Extraction (RSE) がいない場合

$$\mathcal{R} = \sum_{\text{optical modes}} \frac{4PQ_m Q_o}{cML\omega_m^2} \frac{1}{1 + (\Delta\omega/\delta_o)^2} \Lambda > 1 \quad (1)$$

ここで、 $\Delta\omega$ は弾性モードと光学モード (E_{00} と TEM_{mn}) の (角周波数での) 周波数差で、以下で定義さ

れる：

$$\Delta\omega = \Delta\omega_o - \omega_m \quad (2)$$

$$\Delta\omega_o = \omega_{00} - \omega_{qmn} = \frac{\pi c}{L} \left[q' - (m+n) \frac{\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right], \quad q : \text{integer} \quad (3)$$

パラメータ $P, Q_m, Q_o, M, L, \omega_E, \delta_o$ はそれぞれ、キャビティに蓄えられるパワー、弾性モードの Q 値、光学モードの Q 値、鏡の質量、キャビティの基線長、弾性モードの角周波数、光学モードの共振幅である。また、 Λ は弾性モードと光学モードの重なり積分で、

$$\Lambda = \frac{I_1}{I_2 I_3 I_4} \quad (4)$$

$$I_1 = \oint \vec{\mu} E_{00} E_{\text{TEM}} \cdot d\vec{S}, \quad (5)$$

$$I_2 = \int |\vec{\mu}|^2 dV, \quad (6)$$

$$I_3 = \oint |E_{00}|^2 dS, \quad (7)$$

$$I_4 = \oint |E_{\text{TEM}}|^2 dS \quad (8)$$

で定義される ($\vec{\mu}$ は弾性モードの変位ベクトル)。

PR と RSE がある場合

$$\mathcal{R} = \sum_{\text{optical modes}} \frac{2PQ_m}{cML\omega_m^2} \left(\frac{Q_{\text{PR}}}{1 + (\Delta\omega/\delta_{\text{PR}})^2} + \frac{Q_{\text{RSE}}}{1 + ((\Delta\omega - \Delta_{\text{RSE}})/\delta_{\text{RSE}})^2} \right) \Lambda > 1 \quad (9)$$

ここで、 $Q_{\text{PR}}, Q_{\text{RSE}}, \delta_{\text{PR}}, \delta_{\text{RSE}}$ は、それぞれ PR、RSE キャビティの光学モードの Q 値および半値幅であり、

$$Q_{\text{PR}} \simeq \frac{4}{T_{\text{PR}}} Q_o \quad (10)$$

$$Q_{\text{RSE}} \simeq \frac{1}{T_{\text{RSE}}} \left[\frac{T_{\text{RSE}}^2}{4} + 2 \cos^2 \phi \left(2 - T_{\text{RSE}} - \frac{T_{\text{RSE}}^2}{4} \right) \right] Q_o \quad (11)$$

である ($\delta_{\text{PR}}, \delta_{\text{RSE}}$ はそれぞれ共振周波数との比を取ることににより、これらから導かれる)。 $T_{\text{PR}}, T_{\text{RSE}}, \phi$ はそれぞれ PR、RSE mirror のパワーでの透過率、RSE mirror と beam splitter の間の phase shift である。 Δ_{RSE} は RSE による共振周波数のシフト

$$\Delta_{\text{RSE}} = \frac{\omega_o}{2Q_o} \frac{\sin 2\phi}{T_{\text{RSE}}^2/8 + \cos^2 \phi (2 - T_{\text{RSE}} - T_{\text{RSE}}^2/4)} \quad (12)$$

である。

3 実際どのような経路で PI は起こるか

設計値で parametric gain \mathcal{R} を計算し、PI の危険性を回避することは容易であるようにも思える。しかしながら、現実の鏡の曲率には誤差があり、曲率の実際の値は設計値から要求精度の範囲内ですべている。このとき、g-factor は微小にはあるが設計値からずれてしまうため、TEM の横モード周波数が変化する。結果として前述の条件式での $\Delta\omega$ が変化し、PI を起こしてしまうことが想定される。

また、parametric gain を計算する際に FEM 計算を用いるが、FEM の計算精度は高々 1% であるため、これに由来して parametric gain の誤差は非常に大きくなる。具体的には、Appendix C に述べるように、parametric gain のピークの位置の誤差は 2% 程度である。

そこで、 R_1, R_2 を $\pm 2\%$ 変化させながら \mathcal{R} を計算した^{*1}。設計値 $\pm 2\%$ のほとんどすべての領域で PI が起こってしまうのか否かをチェックすることによって PI のセベリティを検証する。ここで、計算の際用いられたパラメータは表 1 の通りである。

| | |
|--------------------------------------------------------|----------|
| Mirror radius r | 110 mm |
| Mirror thickness d | 150 mm |
| Mirror direction | c-axis |
| Front mirror curvature R_1 | 1680 m |
| End mirror curvature R_2 | 1780 m |
| Power in the main cavity P | 0.41 MW |
| Wavelength λ | 1064 nm |
| Main cavity length L | 3000 m |
| Signal recycling cavity length L_{SRC} | 66.591 m |
| Elastic Q-value Q_m | 10^8 |
| Finesse \mathcal{F} | 1550 |
| Power transmittance of the PR mirror T_{PR} | 0.1 |
| Power transmittance of the RSE mirror T_{RSE} | 0.37 |

表 1 計算に用いた LCGT のパラメータ

4 Result: 計算結果

結果は図の通り。対数を取って表示しているので、0 を超える領域が parametric gain $\mathcal{R} > 1$ の領域である。

中心値付近にあるピークをもたらず弾性モードの概形を描くと図のようになる。これが TEM00 モード (FSR parameter $q = 2$) で最大の parametric gain ~ 1600 をもたらず。

5 Anti-Stokes modes

実際の共振器内には $\omega_{\text{TEM}} < \omega_{00}$ であるモード (Stokes mode) だけでなく、 $\omega_{\text{TEM}} > \omega_{00}$ であるような TEM モード (anti-Stokes mode) もある。これは Stokes mode と反対に

$$\mathcal{R} = - \sum_{\text{anti-Stokes modes}} \frac{2PQ_m}{cML\omega_m^2} \left(\frac{Q_{\text{PR}}}{1 + (\Delta\omega_a/\delta_{\text{PR}})^2} + \frac{Q_{\text{RSE}}}{1 + ((\Delta\omega_a - \Delta_{\text{RSE}})/\delta_{\text{RSE}})^2} \right) \Lambda \quad (13)$$

parametric gain を抑圧する。 $\Delta\omega_a$ は $\omega_{\text{TEM}} - \omega_{00} - \omega_m$ である。

^{*1} 曲率の要求精度は $\pm 0.5\%$ であるが、Appendix C からわかるように、COMSOL によって得られるピークの位置は $\pm 2\%$ 程度ズレうる。

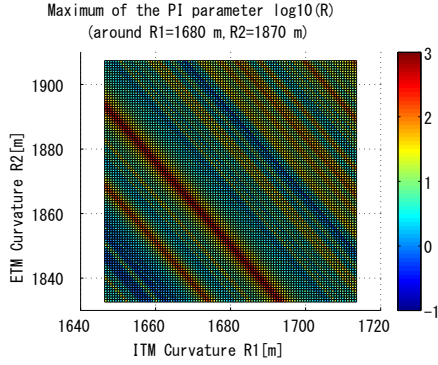


図 1 negative g-factor without PR and RSE

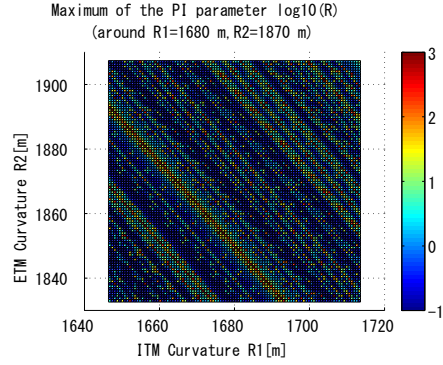


図 2 negative g-factor with PR and RSE

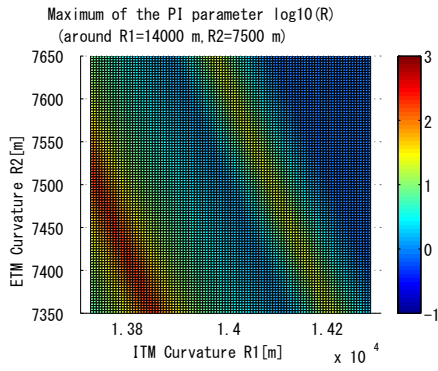


図 3 positive g-factor without PR and RSE

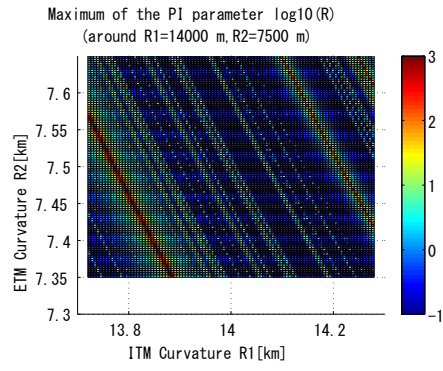


図 4 positive g-factor with PR and RSE

そのため、前節の結果は実際の parametric gain よりも over estimation していることになる。

Anti-Stokes modes の影響を加味したものが次の図の通りである。bLCGT の arm cavity は Finesse $\mathcal{F} = 1550$ と 1 より十分に大きい (cavity の共振幅が十分に小さい) ため、anti-Stokes modes による抑制は、ピークにおいては効かない。ただし、ピーク以外ではこの抑制の影響は多少見られる。

6 考察・まとめ

Positive/negative どちらにおいても PI は起こりうる ($\mathcal{R} > 1$ なる領域は存在する) ということが分かった。曲率を $\pm 2\%$ で振った時に現れるピークの数若干 positive の方が少なかった。これは、曲率を変化させたとき、 g の変分は

$$\Delta g \simeq \frac{dg}{dR} \Delta R = -\frac{L}{R} \frac{\Delta R}{R} \quad (14)$$

で表されるため、同じ割合 $\pm 2\%$ で R を変化させたときの g の変化は、曲率の小さい negative の方が大きいからである。ただし、今回 R_1, R_2 を振った領域全体で $\mathcal{R} > 1$ ということはない。

また、どちらの図においても右上の領域 (曲率がともに正で変化した場合) に parametric gain が小さいため、鏡の発注段階での要求精度を $-0\% / +1\%$ というように設定すれば回避できるかと思われたが、Appendix B にあるように、FEM 計算の精度の限界からくるピークの計算誤差が $2 \sim 3\%$ あるため、そのよ

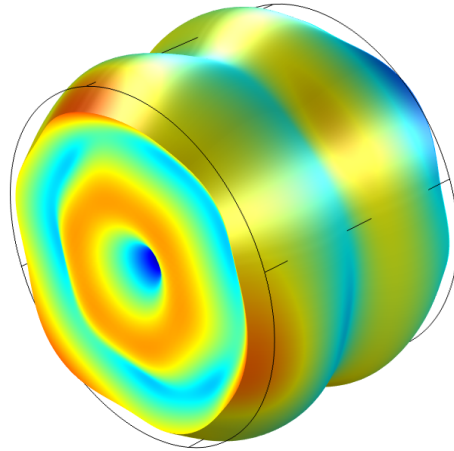


図 5 $\omega_m/2\pi = 7.4 \times 10^4$ Hz

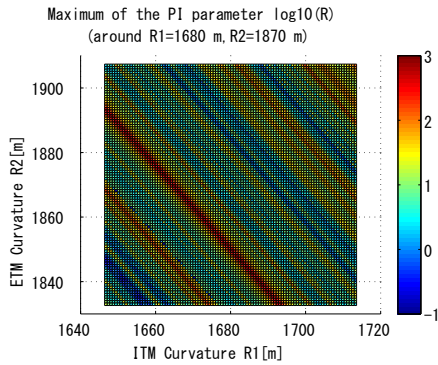


図 6 negative g-factor without PR and RSE (with anti-Stokes modes)

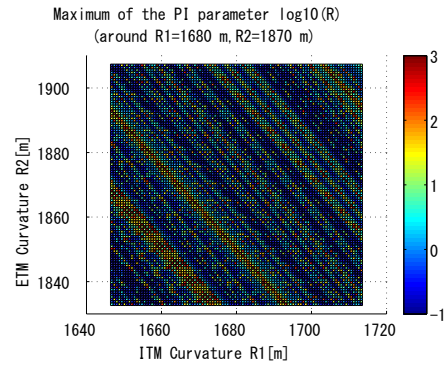


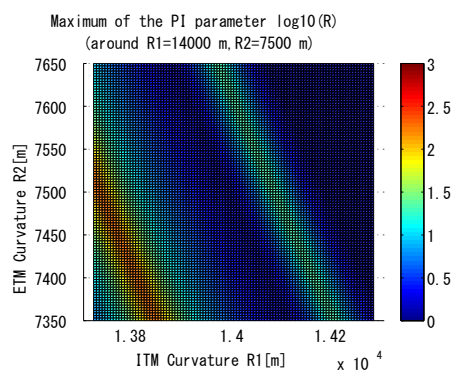
図 7 negative g-factor with PR and RSE (with anti-Stokes modes)

うな考察を得ることはできないという結論に至った。^{*2}

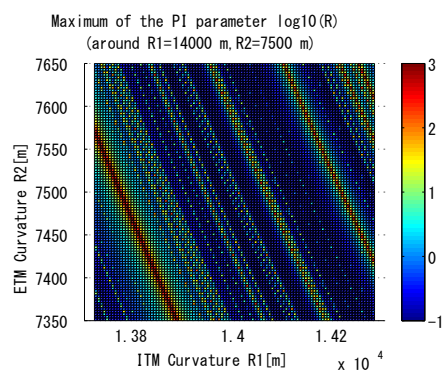
以上の点から、positive/negative のどちらにせよ PI は起こりうる、そして脚注の理由から、干渉計を実際に組んでみるまで起こるか否かは分からない。しかしどちらの場合も PI は致命的な問題ではない (干渉計を組むまでもなく必ず $R > 1$ というわけではない)。

よって、PI の観点から言うと positive/negative に差はほとんどない。実際に干渉計を動かしてみても PI がみられるような場面に直面した場合には、アクチュエータ等で減衰させてあげればよく、このような対策は PI の可能性を完全に排除できない以上、必ずしておくべきであろうという結論に至った。

^{*2} そもそも懸架系の取付部等によって実際の弾性モードの形および共振周波数は変化するため、その場になってみないとわからない、というもある。(また、Q 値も落ちると思われる)



⊗ 8 positive g-factor without PR and RSE (with anti-Stokes modes)



⊗ 9 positive g-factor with PR and RSE (with anti-Stokes modes)

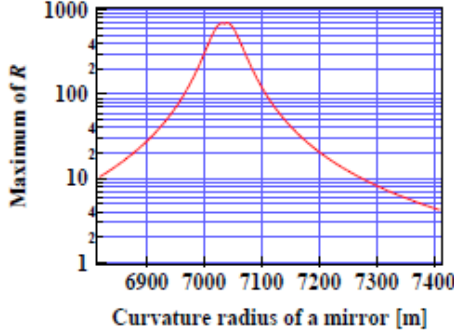


図 10 山元さんの Amaldi proceedings [3] での結果 ($Q_m = 10^6$ となっている)

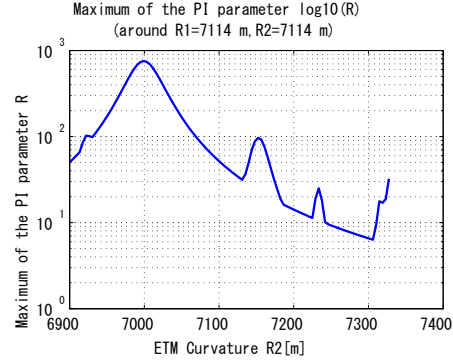


図 11 今回のプログラムで走らせた結果

について、曲率が $\pm 2\%$ の不確かさをもつとして、parametric gain \mathcal{R} を計算した

Appendix C. 計算誤差について

数値計算において、計算に用いられる値は $\epsilon = 10^{-16}$ 程度の相対誤差をもつので、さほど大きなズレは生じないが、FEM のような莫大な計算回数を要するものになると、それが積もり積もって大きな誤差を生じる(積もり誤差)。

実際、各計算プロセスでの誤差は ϵ 程度と非常に小さいが、COMSOL での計算結果では周波数にして 1% 程度と大きなズレになっている。これは FEM の計算ではよくあることである。

そこで、 ω_m に 1% 、 Λ に 2% の誤差があるとき、最終的な計算結果 parametric gain \mathcal{R} のピークでの値およびピークをもたらす曲率 R の誤差を見積もると、

$$\frac{\Delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}} \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Lambda} \Delta \Lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega_m} \Delta \omega_m\right)^2} \quad (15)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta \Lambda}{\Lambda}\right)^2 + \left[\frac{2(1 + \Delta \omega_o / \delta_o^2) \omega_m - 6 \Delta \omega_o / \delta_o^2 \omega_m^2 + 4 \omega_m^3 / \delta_o^2}{\omega_m^2 (1 + (\Delta \omega / \delta_o)^2)} \Delta \omega_m\right]^2} \quad (16)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta \Lambda}{\Lambda}\right)^2 + \left[2 \frac{1 + \Delta \omega (\Delta \omega_o - 2 \omega_m) / \delta_o^2}{1 + (\Delta \omega / \delta_o)^2} \frac{\Delta \omega_m}{\omega_m}\right]^2} \quad (17)$$

ピークにおいては $\Delta \omega = 0$ であるから、

$$\frac{\Delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \Lambda}{\Lambda}\right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta \omega_m}{\omega_m}\right)^2} = 2\sqrt{2} \% \simeq 3 \% \quad (18)$$

となる。 \mathcal{R} のピークの値が 700 のとき、 21 程度の誤差はあることになる。

次に、もっとも問題となるピークの位置についてであるが、 $\Delta \omega = 0$ より、

$$\exists q, \exists m, \exists n, \quad \text{s.t.} \quad \frac{c}{2L} \left[q + (m+n) \frac{\arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right] - \omega_m = 0 \quad (19)$$

これを解くことを考える。

$$\arccos(\pm\sqrt{g_1g_2}) = \frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \quad (20)$$

$$\sqrt{g_1g_2} = \pm \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \quad (21)$$

$$1 - \frac{L}{R_1} = \frac{\pm 1}{g_2} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \quad (22)$$

$$\frac{L}{R_1} = 1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \quad (23)$$

$$R_1 = L \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \right)^{-1} \quad (24)$$

この式から、ピークの位置の計算誤差を考えると、

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{L}{R_1} \frac{\partial}{\partial \omega_m} \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \right)^{-1} \Delta \omega_m \quad (25)$$

$$= \frac{L}{R_1} \frac{\pi}{m+n} \frac{2L}{|g_2|c} \sin \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \right)^{-2} \Delta \omega_m \quad (26)$$

$$= \frac{\pi}{m+n} \frac{2L}{|g_2|c} \sin \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c}\omega_m - q \right) \right] \right)^{-1} \Delta \omega_m \quad (27)$$

たとえば、検算用に考えた ($R_1, R_2 = 7114$ m) ケースにおいて、overlap factor が大きい TEM₁₁ モード ($q = 1$) と $\omega_m \simeq 1.6 \times 10^4$ Hz について計算すると

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} \simeq 2 \% \quad (28)$$

となる。これは曲率にして ± 140 m 程度である。

Appendix D. 高次モードにおける loss の効果

高次モード TEM_{mn} のビーム径は TEM₀₀ と比べて大きくなる。現在の鏡の半径の設定値は 11 cm であり、TEM₀₀ の半径は ITM 上で 3.5 cm である。そのため、TEM₀₀ について鏡の Finesse は $\mathcal{F} = 1550$ であるが、高次モードについては鏡からはみ出てロスが大きくなる。この効果のために高次モードでは実効的に Finesse が下がると見なせる (つまり、このレポートの計算はある種 over estimation していたことになる)。それを考慮に入れて計算を行うことを考える。

その手法として、今回は LIGO の山本さんが作成した SIS を用いて TEM_{mn} ($m, n < 8$) について、キャビティの基線長を変化させたときに蓄えられるパワーを計算し、その共振幅から実効的な Finesse および Q 値を算出するという方法が考えられる。

しかしながら、今回大きなピークをもたらした光学モードは TEM₀₂ および TEM₂₀ であり、この損失はパワーにして 6ppm 程度であるから、このモードの損失による parametric gain の抑制は期待されない。

Appendix E. Beam miss-centering

ビーム中心が鏡の中心から ± 1 cm だけずれた場合について、parametric gain \mathcal{R} がどれだけ変化するかを計算しようと思う。変数が ($R_1, R_2, x_1, y_1, x_2, y_2$) と 6 つあるので、今回は R_1, R_2, x_1, y_1 を固定し、 x_2, y_2 を

$\|(x_2, y_2)\| < 1 \text{ cm}$ で振った時にどのように $\max(\mathcal{R})$ が変化するかを計算する。

これについては、計算した結果は図 12 のとおりである。時間の都合上サンプリング点が少ないが、細か

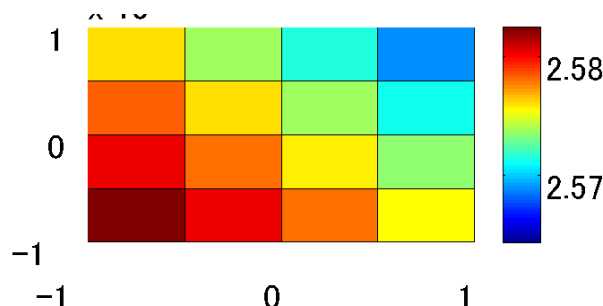


図 12 Beam miss-centering(1 mm) の場合の parametric gain \mathcal{R} の変化

く (x_1, y_1) を振ったものについては現在計算中である (式 (8) を for 文で回すため、非常に計算時間が長くなる)。グラフで対数表示していることを考慮すると、parametric gain のこの範囲での最大値と最小値の差は $\sim 10^{2.585} - 10^{2.565} = 17$ と、元の 1 割も変化していない。とりあえず現在のところ、miss-centering 1 mm 程度で parametric gain はほとんど変化しないであろうということが言える。

References

- [1] V.B. Braginsky, S.E. Strigin, S.P. Vyatchanin, Phys. Lett. A 287 (2001) 331?338
- [2] S.E. Strigin, S.P. Vyatchanin, Phys. Lett. A 365 (2007) 10?16
- [3] K Yamamoto, et. al, Journal of Physics: Conference Series 122 (2008) 012015
- [4] S Gras, C Zhao, D G Blair and L Ju, Class. Quantum Grav. 27 (2010) 205019
- [5] S. Gras, D. G. Blair, and L. Ju, Phys. Rev. D 81, 042001 (2010)
- [6] D. Heinert, S.E. Strigin, Phys. Lett. A 375 (2011) 3804-3810
- [7] 沼田健司「鏡材料の機械損失に関する研究」(東大坪野研修士論文, 1999)