

Parametric Instability in LCGT (ver. 2.3)

東大坪野研 柴田和憲

2012年1月11日

1 Introduction

Fabry-Perot 干渉計でレーザーを発振させるとき、干渉計を構成する鏡 (ITM、ETM) の反射面上の点 \mathbf{x} はレーザーの周波数に従ってその輻射圧で押される。その大きさは、鏡面上での電場 $E_{00}(\mathbf{x})$, $E_{\text{TEM}}(\mathbf{x})$ で決まっている。また、鏡は弾性体としての固有モードを持つ。よって、鏡の押される力と弾性モードの周期および分布が一致したときには、その弾性モードが強く励起される。

通常の干渉計では輻射圧自体が小さいので、通常の干渉計ではこの現象は問題とならない (強く励起されてしまう前に $\omega_m/2Q$ に従って減衰する) が、レーザー干渉計型の重力波望遠鏡においては、共振器内に高いパワーが蓄えられるため、レーザーのもたらす揺動力が大きくなり、干渉計のロックに異常をきたし、大きな問題となってくる。

このレポートでは、表 1 にあるパラメータでの bLCGT の parametric gain \mathcal{R} を計算し、今ある g-factor の候補

- negative g-factor $R_1 = 1680$ m, $R_2 = 1780$ m
- positive g-factor $R_1 = 14000$ m, $R_2 = 7500$ m

で、実際に $\mathcal{R} > 1$ となる、干渉計のロックにとって危険な領域にこれらのパラメータがないか、また、鏡の発注段階で精度を $+1\%$, -0% といったように指定することでそういった危険な領域を回避できないかを検証した。

2 計算式 etc...

Power recycling (PR) と resonant sideband extraction (RSE) があるので、それらの効果を含めて計算した。式については参考文献 [1] ~ [3] を参考にした。

PR と RSE がない場合

$$\mathcal{R} = \sum_{\text{optical modes}} \frac{4PQ_m Q_o}{cML\omega_m^2} \frac{1}{1 + (\Delta\omega/\delta_o)^2} \Lambda \quad (1)$$

ここで、 $\Delta\omega$ は弾性モードと光学モード (E00 と TEM_{mn}) の (角周波数での) 周波数差で、以下で定義される：

$$\Delta\omega = \Delta\omega_o - \omega_m \quad (2)$$

$$\Delta\omega_o = \omega_{00} - \omega_{qmn} = \frac{\pi c}{L} \left[q' - (m+n) \frac{\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right], \quad q : \text{integer} \quad (3)$$

パラメータ $P, Q_m, Q_o, M, L, \omega_E, \delta_o$ はそれぞれ、キャビティに蓄えられるパワー、弾性モードの Q 値、光学モードの Q 値、鏡の質量、キャビティの基線長、弾性モードの角周波数、光学モードの共振幅である。また、 Λ は弾性モードと光学モードの重なり積分で、

$$\Lambda = \frac{I_1}{I_2 I_3 I_4} \quad (4)$$

$$I_1 = \oint \vec{\mu} E_{00} E_{\text{TEM}} \cdot d\vec{S}, \quad (5)$$

$$I_2 = \int |\vec{\mu}|^2 dV, \quad (6)$$

$$I_3 = \oint |E_{00}|^2 dS, \quad (7)$$

$$I_4 = \oint |E_{\text{TEM}}|^2 dS \quad (8)$$

で定義される ($\vec{\mu}$ は弾性モードの変位ベクトル)。

PR と RSE がある場合

$$\mathcal{R} = \sum_{\text{optical modes}} \frac{2PQ_m}{cML\omega_m^2} \left(\frac{Q_{n\text{PR}}}{1 + (\Delta\omega/\delta_{\text{PR}})^2} + \frac{Q_{\text{RSE}}}{1 + ((\Delta\omega - \Delta_{\text{RSE}})/\delta_{\text{RSE}})^2} \right) \Lambda \quad (9)$$

ここで、 $Q_{\text{PR}}, Q_{\text{RSE}}, \delta_{\text{PR}}, \delta_{\text{RSE}}$ は、それぞれ PR、RSE キャビティの光学モードの Q 値および半値幅であり、

$$Q_{\text{PR}} \simeq \frac{4}{T_{\text{PR}}} Q_o \quad (10)$$

$$Q_{\text{RSE}} \simeq \frac{1}{T_{\text{RSE}}} \left[\frac{T_{\text{RSE}}^2}{4} + 2 \cos^2 \phi \left(2 - T_{\text{RSE}} - \frac{T_{\text{RSE}}^2}{4} \right) \right] Q_o \quad (11)$$

である ($\delta_{\text{PR}}, \delta_{\text{RSE}}$ はそれぞれ共振周波数との比を取ることににより、これらから導かれる)。 $T_{\text{PR}}, T_{\text{RSE}}, \phi$ はそれぞれ PR、RSE mirror のパワーでの透過率、RSE mirror と beam splitter の間の phase shift である。

Δ_{RSE} は RSE による共振周波数のシフト

$$\Delta_{\text{RSE}} = \frac{\omega_o}{2Q_o} \frac{\sin 2\phi}{T_{\text{RSE}}^2/8 + \cos^2 \phi (2 - T_{\text{RSE}} - T_{\text{RSE}}^2/4)} \quad (12)$$

である。

3 計算結果の妥当性

COMSOL の計算の正当性を保証するために、

1. TAMA の鏡について COMSOL で計算させて、沼田さんの坪野研修士論文 [7] の計算結果および実験結果と突き合わせる。

Mirror radius r	110 mm
Mirror thickness d	150 mm
Mirror direction	c-axis
Front mirror curvature R_1	1680 m
End mirror curvature R_2	1780 m
Power in the main cavity P	0.41 MW
Wavelength λ	1064 nm
Main cavity length L	3000 m
Signal recycling cavity length L_{SRC}	66.591 m
Elastic Q-value Q_m	10^8
Finesse \mathcal{F}	1550
Power transmittance of the PR mirror T_{PR}	0.1
Power transmittance of the RSE mirror T_{RSE}	0.37

表1 計算に用いた LCGT のパラメータ

2. LCGT のパラメータ (山元さんの論文の時点での)^{*1}について計算させて、結果を山元さんの Amaldi proceedings [3] と突き合わせる。

ということを行った。結果として、鏡の共振周波数および parametric gain のピークの値はともに 1% 程度の誤差で一致していることが分かったので、この計算手法で致命的な間違いはないと思われる。

ただし、ピークの位置に 1% 程度のズレが見られた (これは曲率にして 100 m 程度)。しかしそもそも、FEM の計算誤差が 1% 程度であるため、最終的な計算結果の精度はこれにリミットされていると思われる。^{*2}

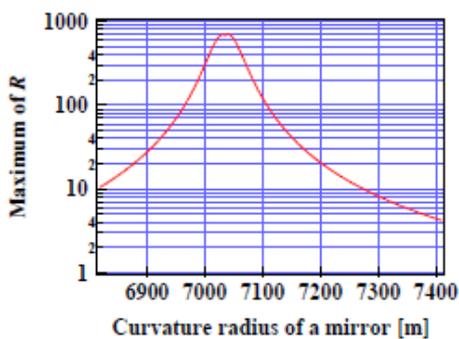


図1 山元さんの Amaldi proceedings [3] での結果 ($Q_m = 10^6$ となっている)

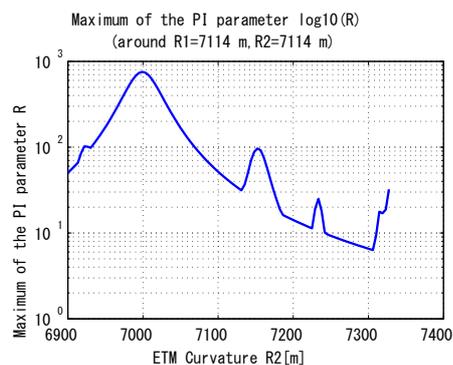


図2 今回のプログラムで走らせた結果

以上から、このプログラムで間違いのないであろうと思い、最新の LCGT のパラメータを参照し、今ある候補

- negative g-factor $R_1 = 1680$ m, $R_2 = 1780$ m
- positive g-factor $R_1 = 14000$ m, $R_2 = 7500$ m

^{*1} 鏡の質量 $M = 30$ kg、 $R_1 = R_2 = 7114$ m、光軸は a 軸

^{*2} 誤差の見積もりについては補遺 A を参照。

について、曲率が $\pm 2\%$ の不確かさをもつとして、parametric gain \mathcal{R} を計算した*3。結果は図の通り。対数を取って表示しているため、0 を超える領域が parametric gain $\mathcal{R} > 1$ の領域である。

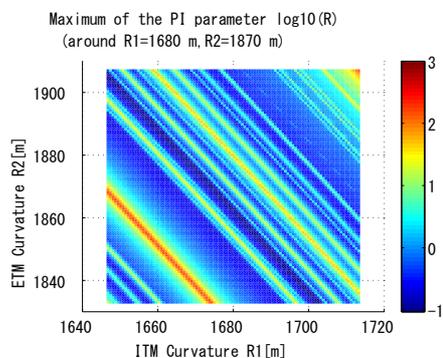


図 3 negative g-factor without PR and RSE

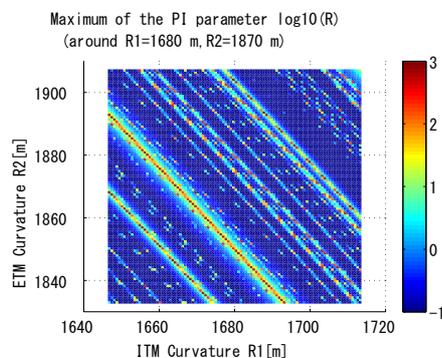


図 4 negative g-factor with PR and RSE

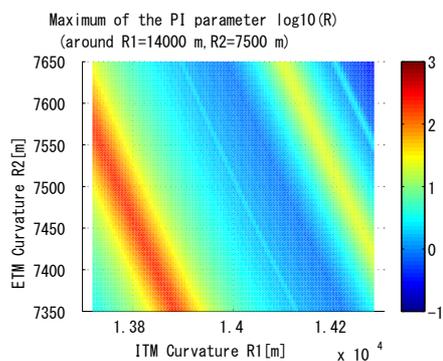


図 5 positive g-factor without PR and RSE

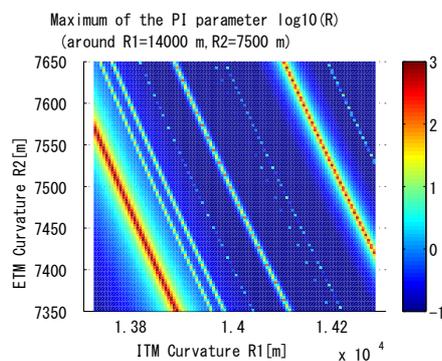


図 6 positive g-factor with PR and RSE

ところで、TEM モードは高次になればなるほど loss が大きくなり、蓄えられるパワーが小さくなる。この効果を入れた計算についても現在実行中である。

negative g において、ピークで主なもの (parametric gain $\mathcal{R} > 100$) は 2 個ある。それぞれをもたらす弾性モードを描くと図のようになる。また、positive g では、不安定なモードは 1 つであった。図の 3 つの弾性モー

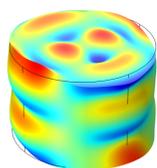


図 7 $\omega_m/2\pi = 7.49 \times 10^4$ Hz

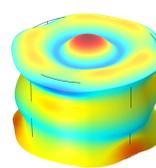


図 8 $\omega_m/2\pi = 7.54 \times 10^4$ Hz

ドが TEM02 モードで最大の parametric gain (positive で $\sim 6 \times 10^3$ 、negative で $\sim 1 \times 10^4$) をもたらす。

*3 曲率の要求精度は $\pm 0.5\%$ であるが、補遺 A からわかるように、COMSOL によって得られるピークの位置は $\pm 2\%$ 程度ズレうる。

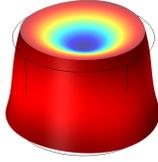


図9 $\omega_m/2\pi = 2.39 \times 10^4$ Hz

ピーク的位置は、negative g では $R_1 = 1673$ m, $R_2 = 1859$ m、positive g では $R_1 = 1650$ m, $R_2 = 1877$ m である。

4 Anti-Stokes modes

実際の共振器内には $\omega_{\text{TEM}} < \omega_{00}$ であるモード (Stokes mode) だけではなく、 $\omega_{\text{TEM}} > \omega_{00}$ であるような TEM モード (anti-Stokes mode) もある。これは Stokes mode と反対に

$$\mathcal{R} = - \sum_{\text{anti-Stokes modes}} \frac{2PQ_m}{cML\omega_m^2} \left(\frac{Q_{\text{PR}}}{1 + (\Delta\omega_a/\delta_{\text{PR}})^2} + \frac{Q_{\text{RSE}}}{1 + ((\Delta\omega_a - \Delta_{\text{RSE}})/\delta_{\text{RSE}})^2} \right) \Lambda \quad (13)$$

parametric gain を抑圧する。 $\Delta\omega_a$ は $\omega_{\text{TEM}} - \omega_{00} - \omega_m$ である。

そのため、前節の結果は実際の parametric gain よりも over estimation していることになる。

Anti-Stokes modes の影響を加味したものが次の図の通りである。bLCGT の arm cavity は Finesse $\mathcal{F} = 1550$ と 1 より十分に大きい (cavity の共振幅が十分に小さい) ため、anti-Stokes modes による抑制は、ピークにおいては効かない。ただし、ピーク以外ではこの抑制の影響は多少見られる。

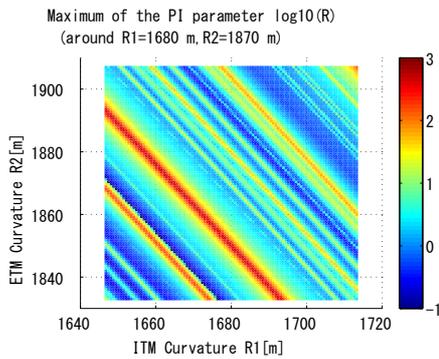


図10 negative g -factor without PR and RSE (with anti-Stokes modes)

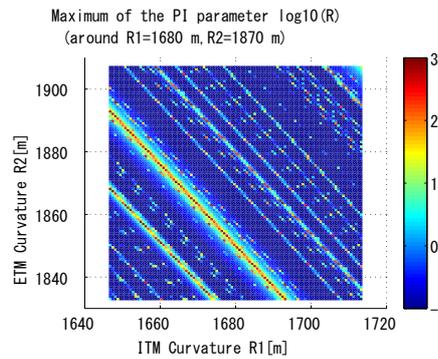


図11 negative g -factor with PR and RSE (with anti-Stokes modes)

PR/RSE ありのときの図を簡略化して、 $\mathcal{R} > 1$ となる領域だけを塗りつぶした図が図14、15である。

5 高次モードにおける loss の効果 (予定)

高次モード TEM_{mn} のビーム径は TEM_{00} と比べて大きくなる。現在の鏡の半径の設定値は 11 cm であり、 TEM_{00} の半径は ITM 上で 3.5 cm である。そのため、 TEM_{00} について鏡の Finesse は $\mathcal{F} = 1550$ であるが、

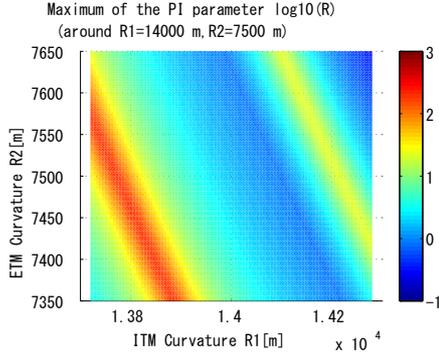


図 12 positive g-factor without PR and RSE (with anti-Stokes modes)

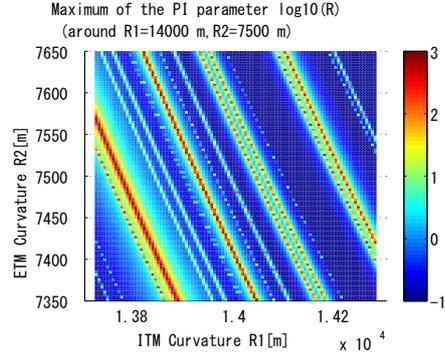


図 13 positive g-factor with PR and RSE (with anti-Stokes modes)

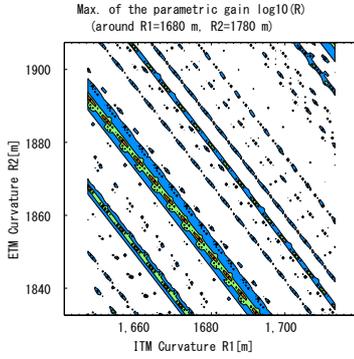


図 14 negative g-factor with PR and RSE (with anti-Stokes modes)

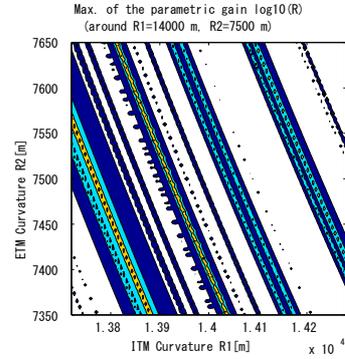


図 15 positive g-factor with PR and RSE (with anti-Stokes modes)

高次モードについては鏡からはみ出てロスが大きくなる。この効果のために高次モードでは実効的に Finesse が下がると見させる (つまり、前節までの計算はある種 over estimation していたことになる)。それを考慮に入れて計算を行うことを考える。

その手法として、今回は LIGO の山本さんが作成した SIS を用いて TEM_{mn} ($m, n < 8$) について、キャビティの基線長を変化させたときに蓄えられるパワーを計算し、その共振幅から実効的な Finesse および Q 値を算出して計算し直すことを考えている。

TEM_{02} がもたらす最も大きなピークについては TEM_{02} のロスがさほど大きくないため、変化がないと思われるが、その他の細かいピークについては小さくなる可能性がある。

6 Beam miss-centering

ビーム中心が鏡の中心から ± 1 cm だけずれた場合について、parametric gain \mathcal{R} がどれだけ変化するかを計算しようと思う。変数が $(R_1, R_2, x_1, y_1, x_2, y_2)$ と 6 つあるので、今回は R_1, R_2, x_1, y_1 を固定し、 x_1, y_1 を $\|(x_2, y_2)\| < 1$ cm で振った時にどのように $\max(\mathcal{R})$ が変化するかを計算する。

これについては、計算した結果は図 16 のとおりである。グラフで対数表示していることを考慮すると、parametric gain のこの範囲での最大値と最小値の差は $\sim 10^{2.585} - 10^{2.565} = 17$ と、元の 1 割も変化していない。とりあえず現在のところ、miss-centering 1 mm 程度で parametric gain はほとんど変化しないである

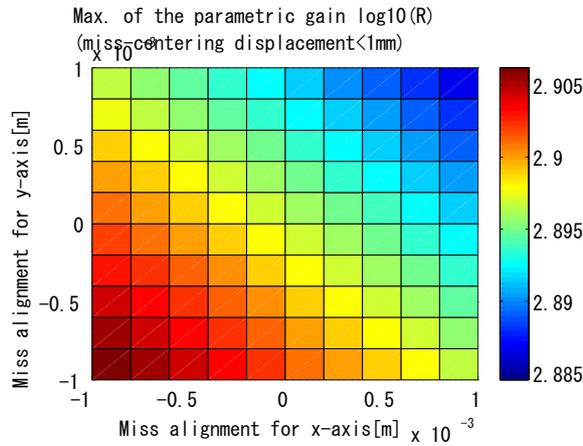


図 16 Beam miss-centering(1 mm) の場合の parametric gain \mathcal{R} の変化

うということが言える。

7 考察

現在ある negative/positive それぞれの g-factor について parametric gain \mathcal{R} を計算した。

その結果、どちらのパラメータにしても付近にあるピークの値には変化がなかった (これは、両者の g-factor が絶対値は等しいことから自明である)。ただし、曲率を $\pm 2\%$ で振った時に現れるピークの数が若干 positive の方が少なかった。これは、曲率を変化させたとき、 g の変分は

$$\Delta g \simeq \frac{dg}{dR} \Delta R = -\frac{L}{R} \frac{\Delta R}{R} \quad (14)$$

で表されるため、同じ割合 $\pm 2\%$ で R を変化させたときの g の変化は、曲率の小さい negative の方が大きいからである。

また、どちらの図においても右上の領域 (曲率がともに正で変化した場合) に parametric gain が小さいため、鏡の発注段階での要求精度を $-0\%/+1\%$ というように設定すれば回避できるかと思われたが、補遺 B. にあるように、FEM 計算の精度の限界からくるピークの計算誤差が $2\sim 3\%$ あるため、そのような考察を得ることはできないという結論に至った。^{*4}

^{*4} そもそも懸架系の取付部等によって実際の弾性モードの形および共振周波数は変化するため、その場になってみないとわからない、というもある。(また、 Q 値も落ちると思われる)

ピークにおいては $\Delta\omega = 0$ であるから、

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta\omega_m}{\omega_m}\right)^2} = 2\sqrt{2} \% \simeq 3 \% \quad (18)$$

となる。 R のピークの値が 700 のとき、21 程度の誤差はあることになる。

次に、もっとも問題となるピークの位置についてであるが、 $\Delta\omega = 0$ より、

$$\exists q, \exists m, \exists n, \quad \text{s.t.} \quad \frac{c}{2L} \left[q + (m+n) \frac{\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right] - \omega_m = 0 \quad (19)$$

これを解くことを考える。

$$\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2}) = \frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \quad (20)$$

$$\sqrt{g_1 g_2} = \pm \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \quad (21)$$

$$1 - \frac{L}{R_1} = \frac{\pm 1}{g_2} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \quad (22)$$

$$\frac{L}{R_1} = 1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \quad (23)$$

$$R_1 = L \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \right)^{-1} \quad (24)$$

この式から、ピークの位置の計算誤差を考えると、

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{L}{R_1} \frac{\partial}{\partial \omega_m} \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \right)^{-1} \Delta \omega_m \quad (25)$$

$$= \frac{L}{R_1} \frac{\pi}{m+n} \frac{2L}{|g_2|c} \sin \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \right)^{-2} \Delta \omega_m \quad (26)$$

$$= \frac{\pi}{m+n} \frac{2L}{|g_2|c} \sin \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \left(1 - \frac{1}{|g_2|} \cos \left[\frac{\pi}{m+n} \left(\frac{2L}{c} \omega_m - q \right) \right] \right)^{-1} \Delta \omega_m \quad (27)$$

たとえば、検算用に考えた ($R_1 R_2 = 7114$ m) ケースにおいて、overlap factor が大きい TEM02 モード ($q = 1$) と $\omega_m \simeq 1.8 \times 10^4$ Hz について計算すると

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} \simeq 2 \% \quad (28)$$

となる。これは曲率にして ± 140 m 程度である。

参考文献

- [1] V.B. Braginsky, S.E. Strigin, S.P. Vyatchanin, Phys. Lett. A 287 (2001) 331?338
- [2] S.E. Strigin, S.P. Vyatchanin, Phys. Lett. A 365 (2007) 10?16
- [3] K Yamamoto, et. al, Journal of Physics: Conference Series 122 (2008) 012015
- [4] S Gras, C Zhao, D G Blair and L Ju, Class. Quantum Grav. 27 (2010) 205019
- [5] S. Gras, D. G. Blair, and L. Ju, Phys. Rev. D 81, 042001 (2010)
- [6] D. Heinert, S.E. Strigin, Phys. Lett. A 375 (2011) 3804-3810
- [7] 沼田健司「鏡材料の機械損失に関する研究」(東大坪野研修士論文, 1999)