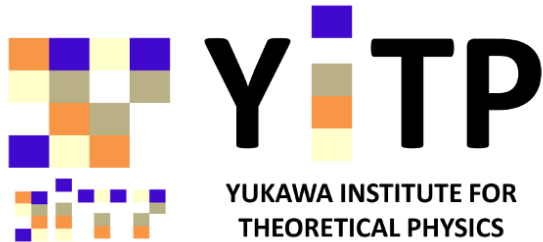


# ブラックホール 中性子星連星 からの重力波



京都大学基礎物理学研究所

D2 久徳浩太郎

Kyutoku, Shibata, Taniguchi Phys. Rev. D 82 (2010) 044049

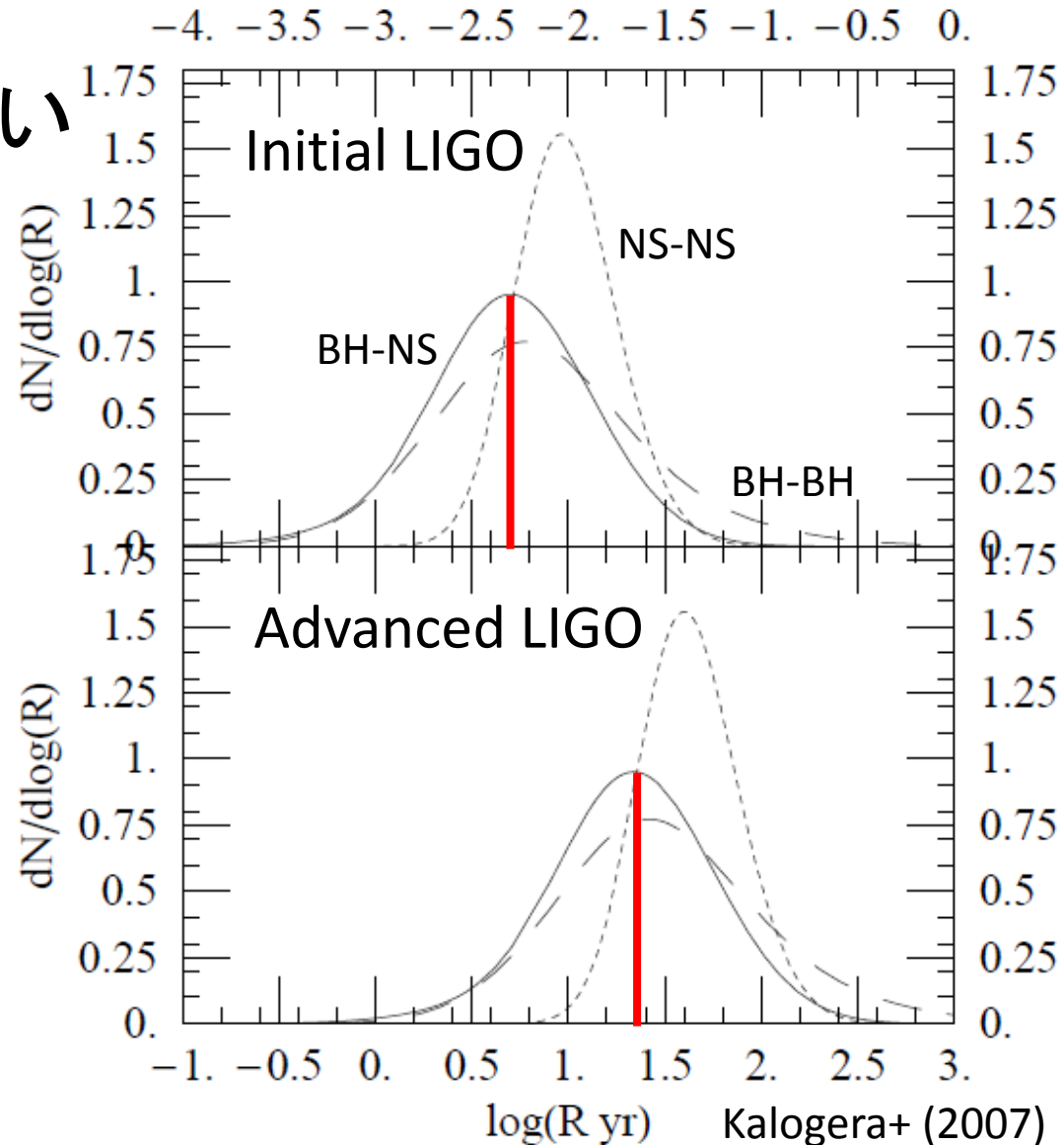
# 研究の 動機

# ブラックホール・中性子星連星

- 言わずもがな極めて有望な重力波源
  - (質量によるが)合体時で1kHz前後なのでその直前(inspiral)から地上観測に期待大
  - 一般相対論の検証/中性子星の情報
- ショートガンマ線バーストの候補天体
  - ニュートリノ/電磁波でmulti-messenger観測
  - 今日は特に触れない

# 合体頻度の見積もり

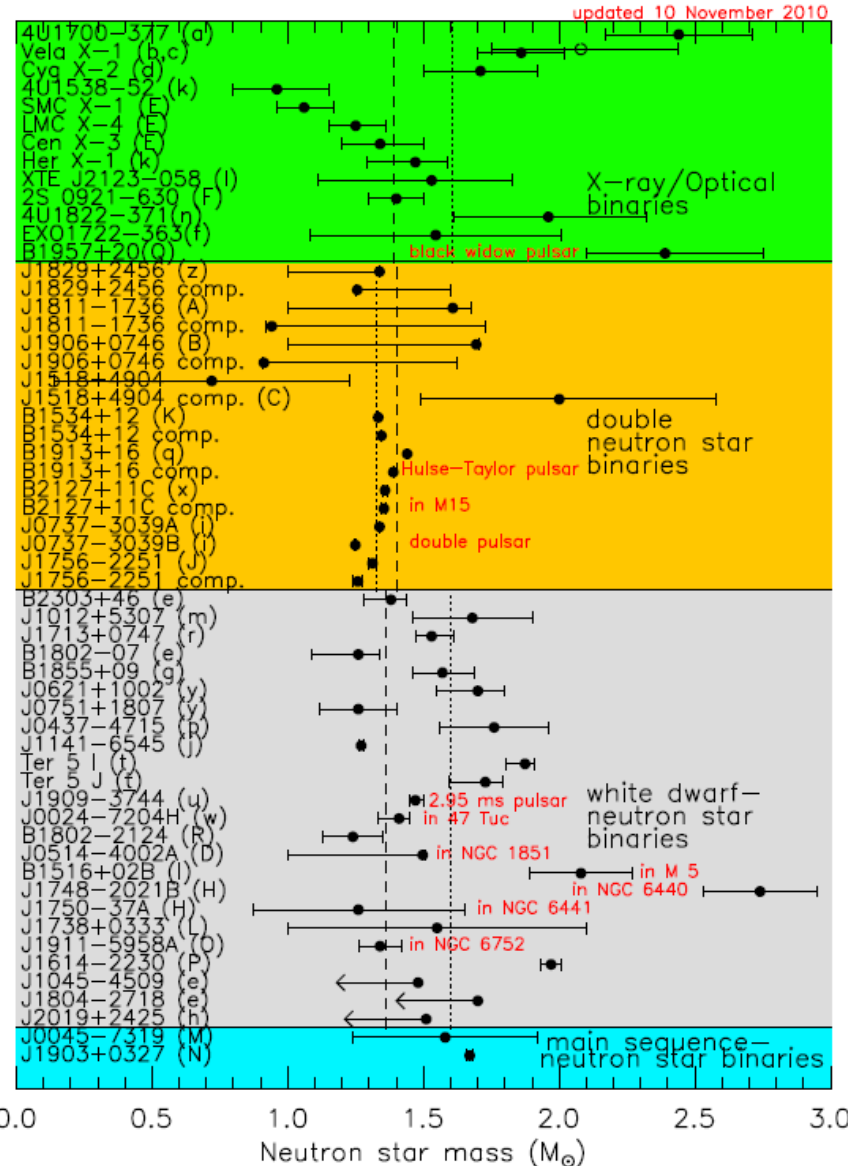
- 連星中性子星と違い  
観測例はない
- 星の進化計算から  
見積もられている  
(不定性は大きい)
- Adv. LIGOで年に  
10イベント程度?





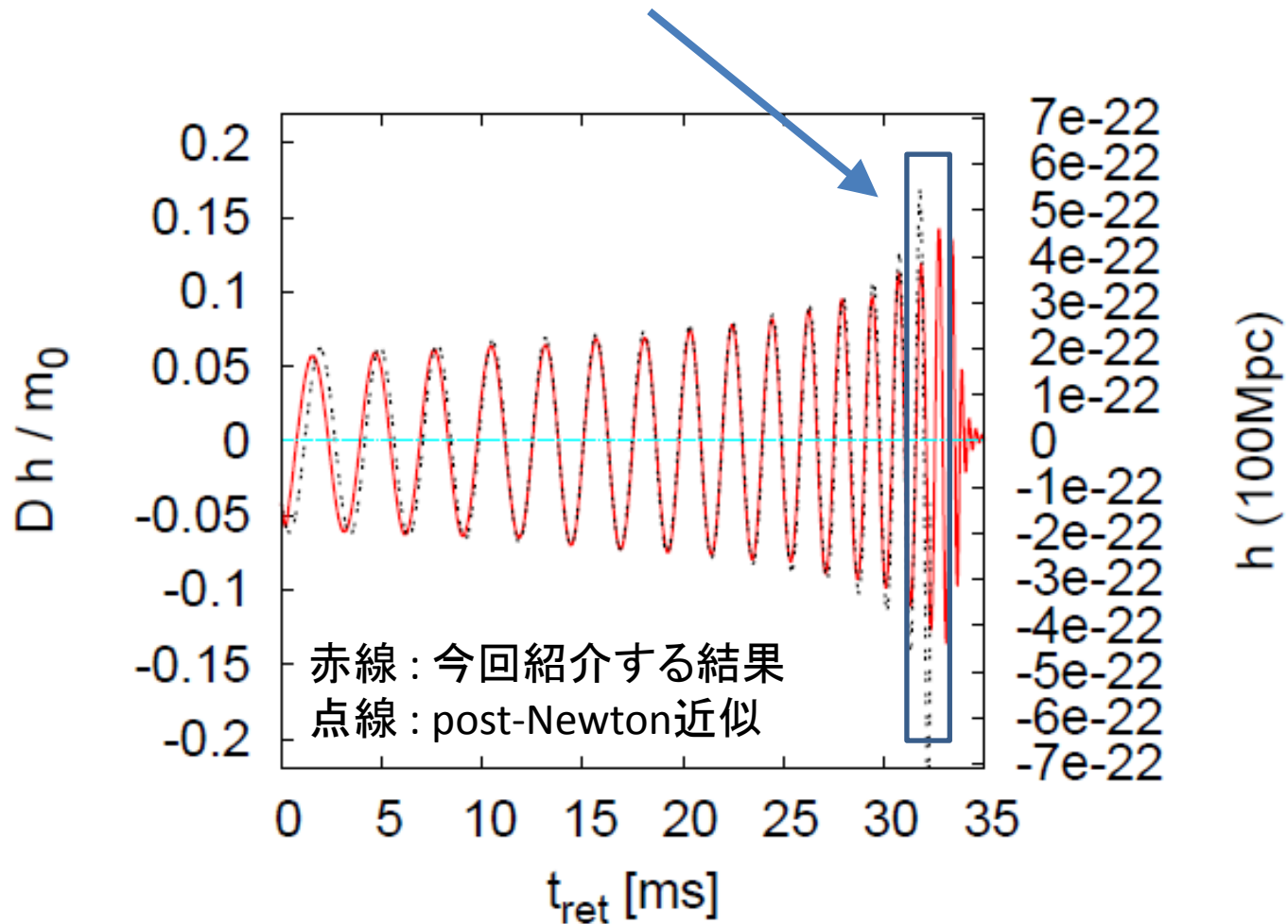
# 中性子星の質量

- 最大質量からの制限はされており、特に最近では1.97 $M_{\odot}$ という観測あり
- 半径の測定は難しい
  - 距離との縮退
  - 放射/大気モデル



# 連星合体からの重力波

- 簡単にはinspiral-**merger**-ringdownと分類



# 数値相対論

- Inspiralは点粒子近似/断熱近似が成り立って post-Newton近似で計算できる
- Ringdownはブラックホール摂動がうまくいく (NS+NS→hypermassive NSの場合を除く)
- Merger phaseでは非線形重力が重要になり、さらに中性子星を点粒子と扱えなくなるので **Einstein方程式+流体の式**を計算機上で解く  
→ 数値相対論 developed by Nakamura, Shibata...



# 解きたい問題

- ブラックホール・中性子星連星の合体過程は?
  - **中性子星が潮汐破壊されて降着円盤形成?**
  - 連星ブラックホールとほぼ変わらない?
- 合体過程を決めているパラメータは?
  - BH質量, BHスピン, NS質量, NS半径=EOS
- 重力波からは何がわかる?
  - 合体時の潮汐破壊の有無
  - NS半径及びさらなる状態方程式の情報

# 潮汐破壊(mass shedding)の条件

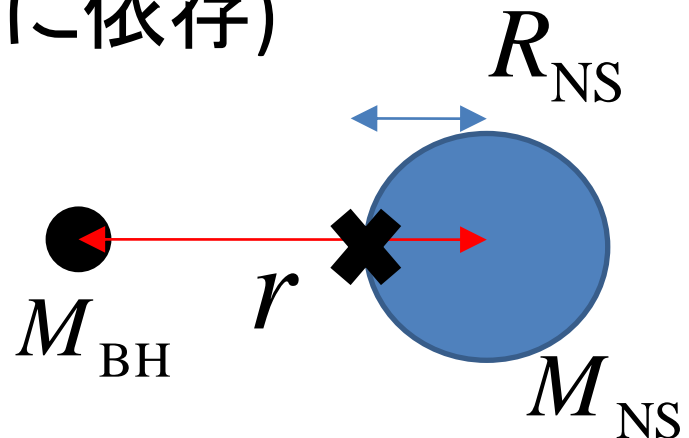
- NS表面でのBHの潮汐力 vs. NSの自己重力  
(NSの変形は簡単のために無視する)

$$\frac{2M_{\text{BH}}R_{\text{NS}}}{r^3} = \frac{M_{\text{NS}}}{R_{\text{NS}}^2} \Rightarrow r \sim M_{\text{BH}} \left( \frac{M_{\text{NS}}}{M_{\text{BH}}} \right)^{2/3} \left( \frac{R_{\text{NS}}}{M_{\text{NS}}} \right)$$

- BHの最内接安定軌道(ISCO)の半径はBH質量に比例する(係数はBHスピンの依存)

$$\frac{r}{r_{\text{ISCO}}} \sim \frac{1}{\zeta} \left( \frac{M_{\text{NS}}}{M_{\text{BH}}} \right)^{2/3} \left( \frac{R_{\text{NS}}}{M_{\text{NS}}} \right)$$

$$(r_{\text{ISCO}} = \zeta M_{\text{BH}})$$



# 重要なパラメータ

- 2つの無次元パラメータが物理的に重要

- BH / NSの質量比

$$Q = M_{\text{BH}} / M_{\text{NS}} \geq 1$$

- NSのコンパクトネス

$$C = M_{\text{NS}} / R_{\text{NS}} \sim 0.15 - 0.2$$

質量比  $Q$  とコンパクトネス  $c$  との一方/両方が小さい時にISCOの外で潮汐破壊が起こる

潮汐現象は中性子星の大きさの効果だから

- **BHのスピ**ン  $a \equiv S_{\text{BH}} / M_{\text{BH}}^2$  **も重要**

スピ

ンが大きいほどISCOの半径が小さくなり、潮汐破壊がISCOの外で起こりやすくなる

計算

手法

# 数値相対論の現状

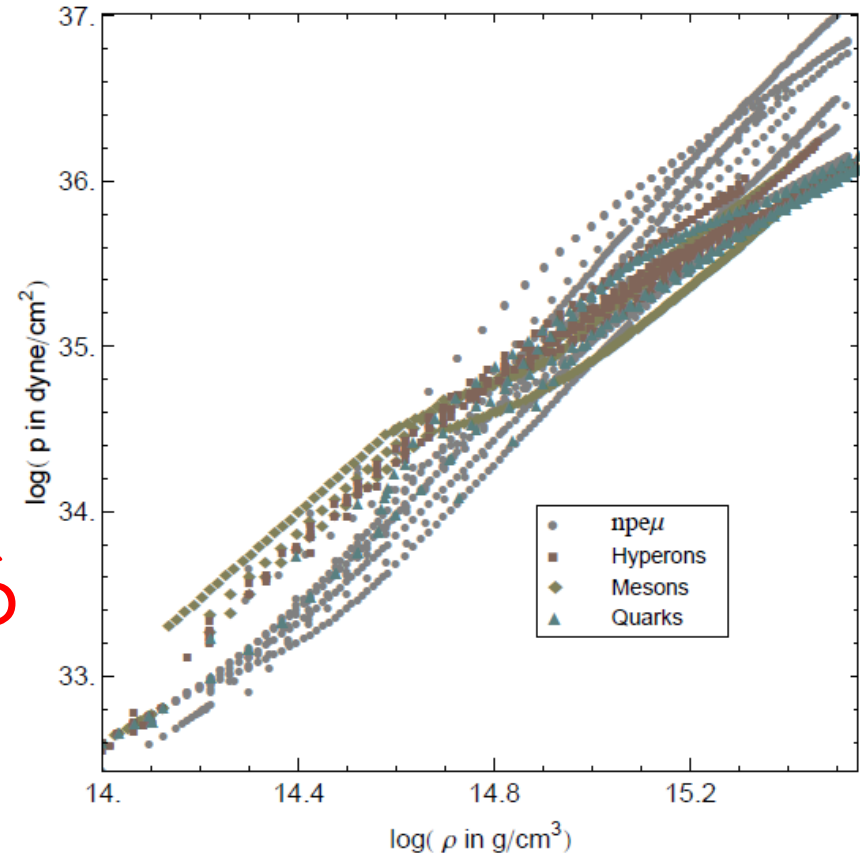
- 今ではブラックホールを含むような時空でも長時間安定に計算をすることができる
- Adaptive mesh refinementにより、PC程度でも波動帯まで計算して重力波を見ることが可能
- 電磁場やニュートリノなどは今後の課題
- [http://bridge.kek.jp/workshop/lecture\\_shibat\\_a\\_100609.pdf](http://bridge.kek.jp/workshop/lecture_shibat_a_100609.pdf) に詳しい解説

# 計算の手順

- **基本は**  $G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \nabla_b T^b_a = 0, \nabla_a(\rho u^a) = 0$
- 初期条件を用意する
  - 電磁気学での  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e$  のような拘束条件を満たす連星の解を計算する
  - 流体なので静水圧平衡も解いて求める
- 時間発展のシミュレーションを行う
  - Einstein方程式を時間発展の式として解く
  - 一般相対論的流体の発展方程式も解く
- **状態方程式を与えると式が閉じる**

# 核理論による状態方程式の候補

- 特にゼロ温度は状態方程式候補が多すぎる
- 数値テーブルのものは補完が必要になるので実用的によろしくない
- (観測的にも)  
少数パラメータで書ける  
解析的なものが有用

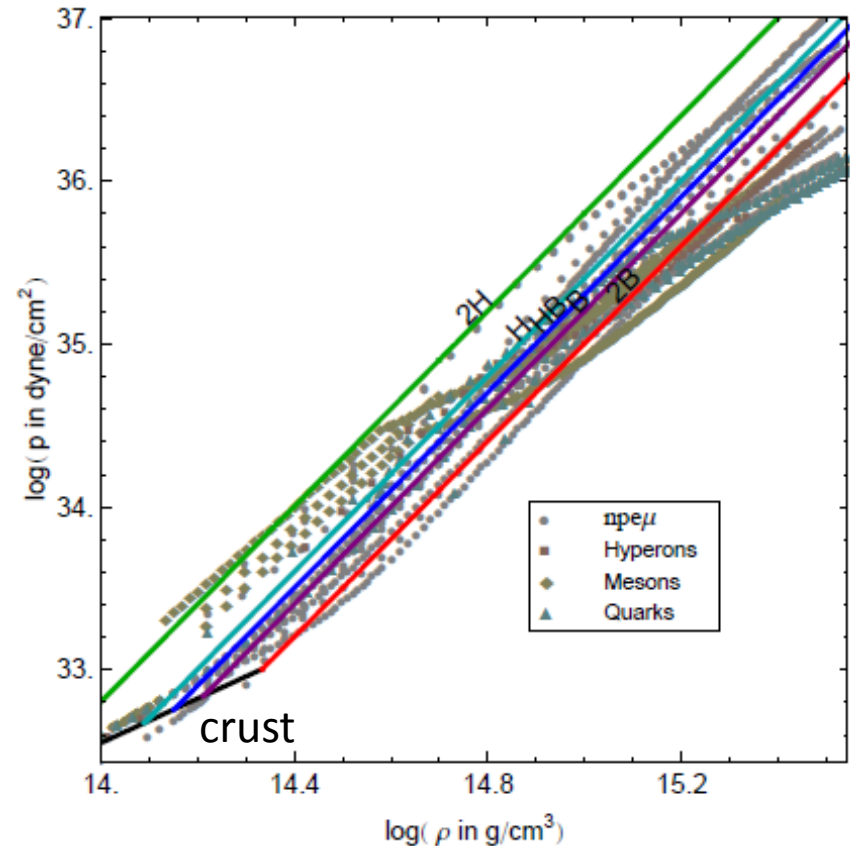


# Piecewise polytrope (PWP)

- 複数のpolytropeにより核理論状態方程式を再現することができる

$$P = \begin{cases} \kappa_1 \rho^{\Gamma_1} & (\rho < \rho_1) \sim \text{crust} \\ \kappa_2 \rho^{\Gamma_2} & (\rho > \rho_1) \sim \text{core} \end{cases}$$

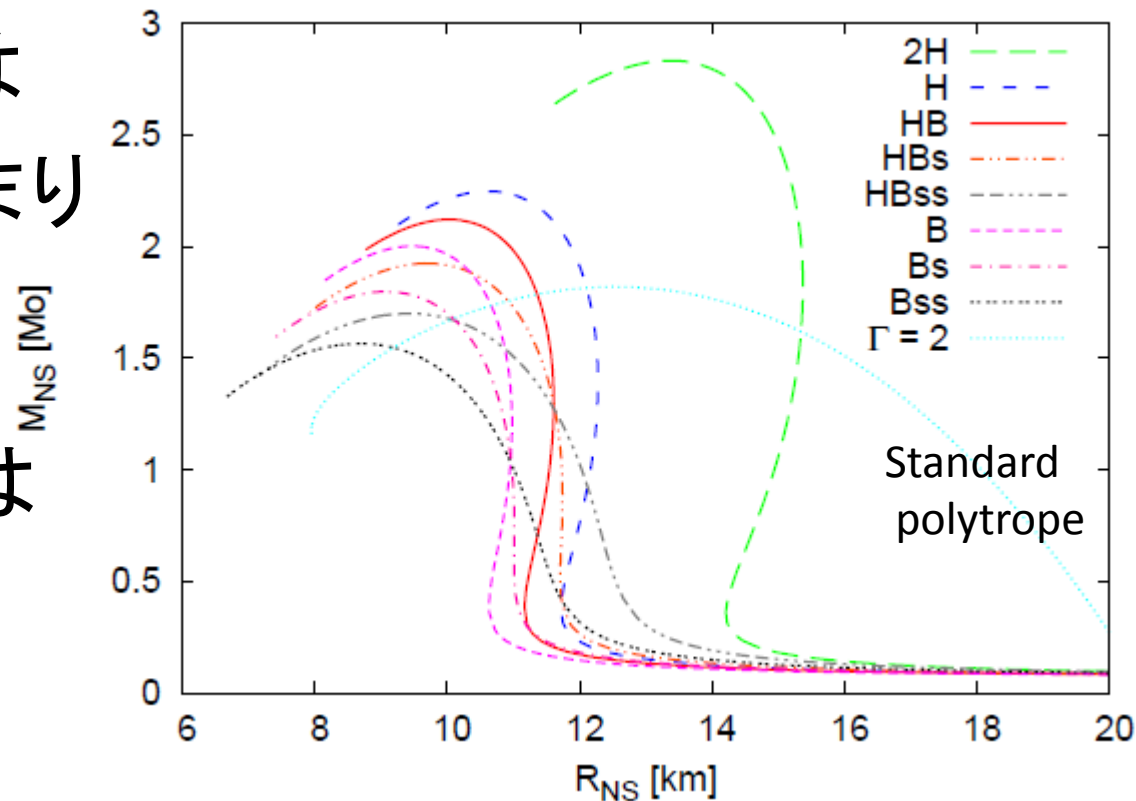
- ほぼ全てのEOSが  
“4piece”で再現できるが  
今回はこのモデルで  
何がわかるかを見る





# 質量-半径関係

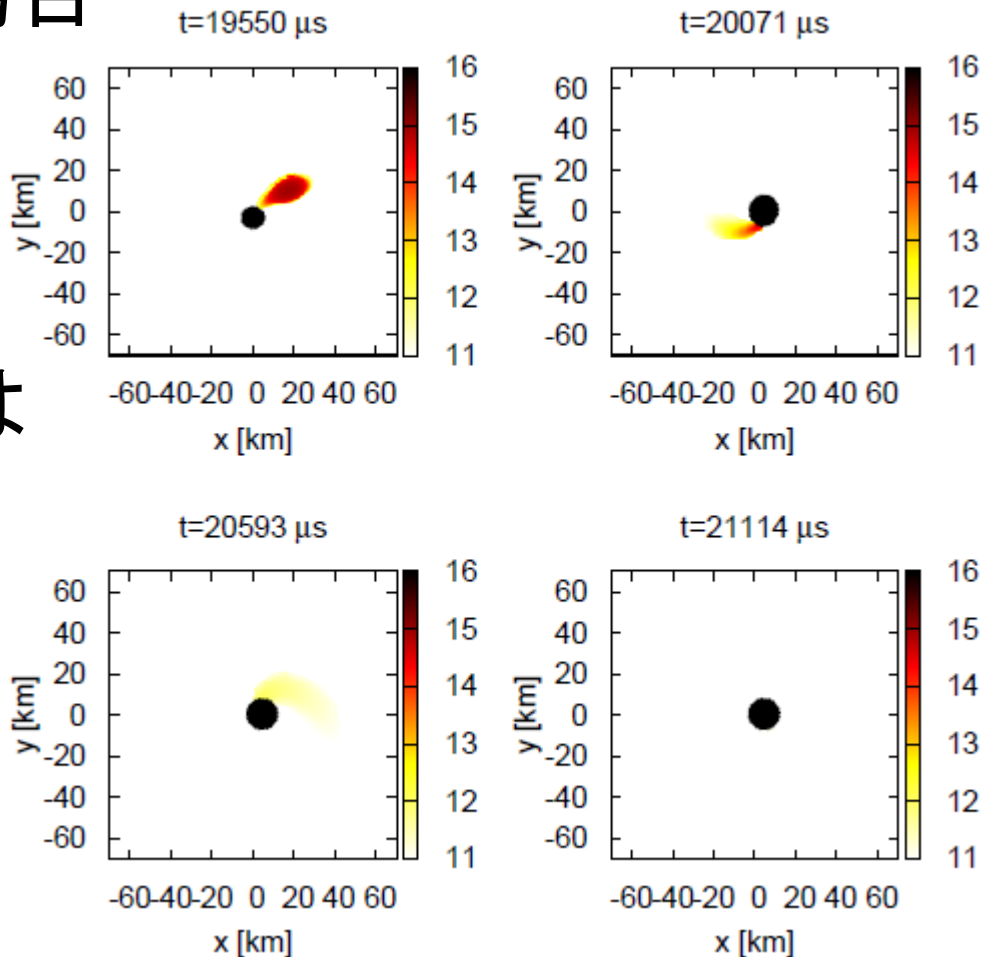
- Piecewise polytropeで(2pieceでも)核理論からの状態方程式の質量-半径関係を再現できる
- 現実的な範囲では半径が質量にあまり依存しない
- 通常のpolytropeは全くそうならない



結果

# 潮汐破壊しない場合

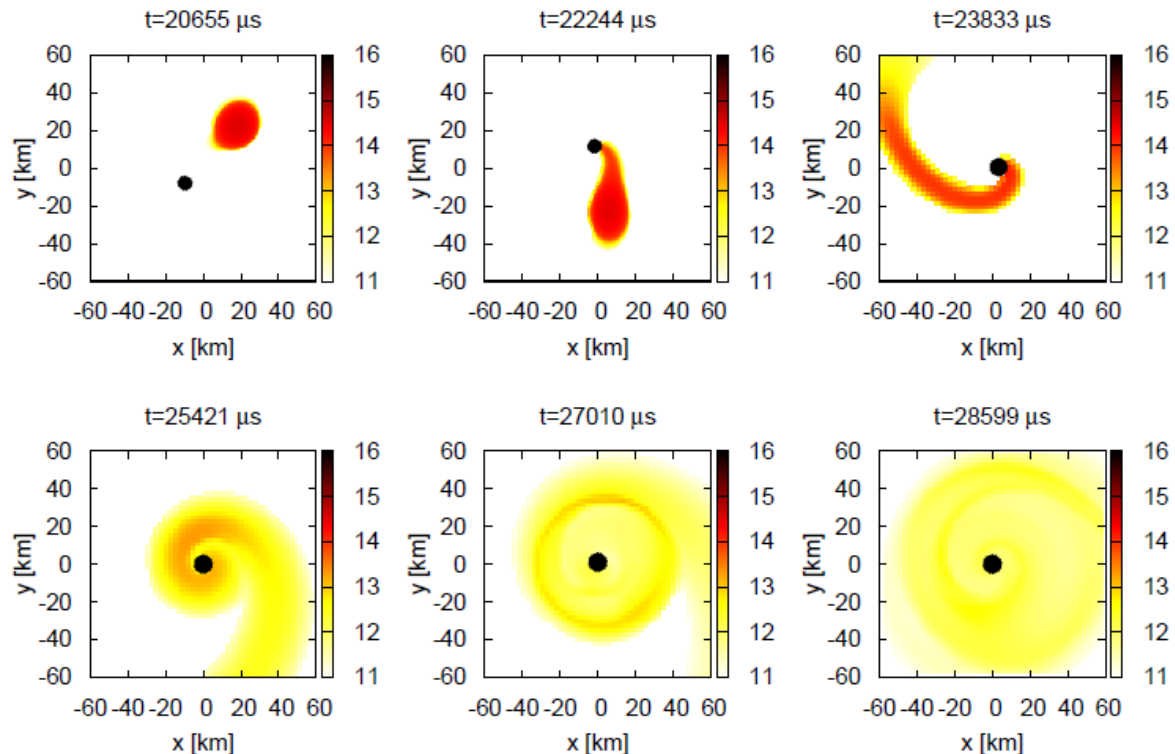
- BHのスピンのない場合  
質量比  $Q \geq 3$  では  
ほぼ潮汐破壊なし
- この場合の重力波は  
BH-BHの連星と  
ほとんど変わらない  
(後で)



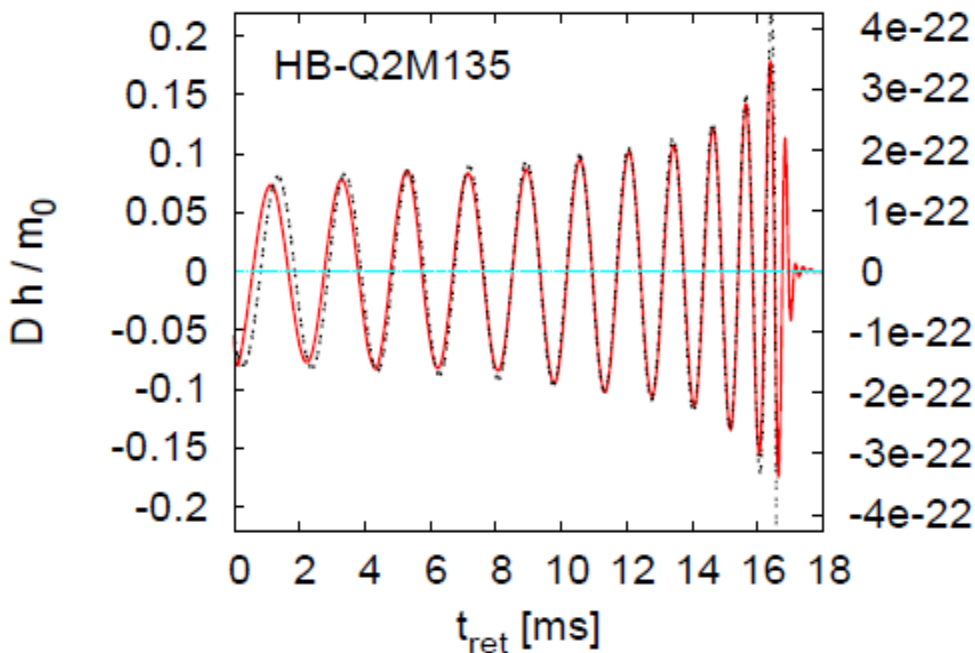
# 潮汐破壊する場合

- BHスピンがなくても $Q = 2$ では潮汐破壊
- 重力波はそれを反映した波形を示す(後で)
- BHの質量が $3M_{\odot}$ 以下というのは非現実的?

- 円盤の質量など  
潮汐破壊の  
「強さ」はEOSで  
決まる



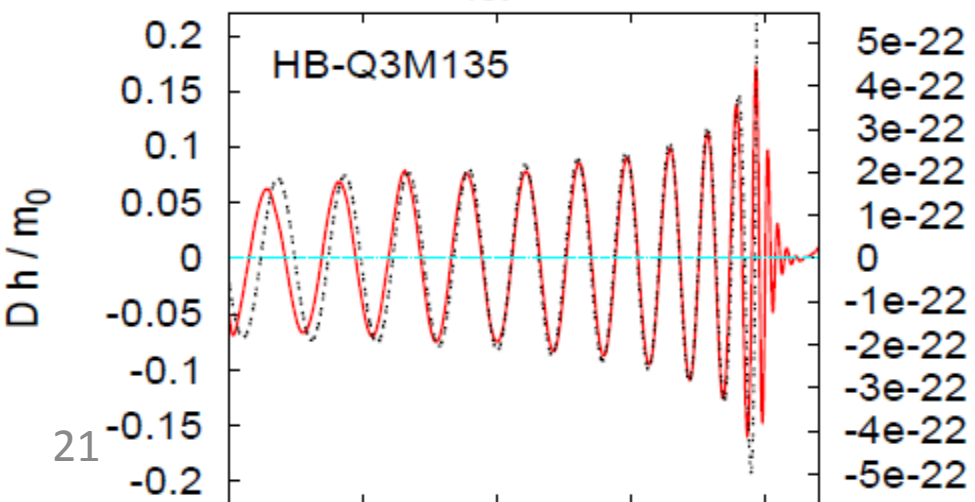
# 重力波形:質量比による違い



NS質量、EOSは同じ

上:  $M_{\text{BH}} = 4.05 M_{\text{sol}}$

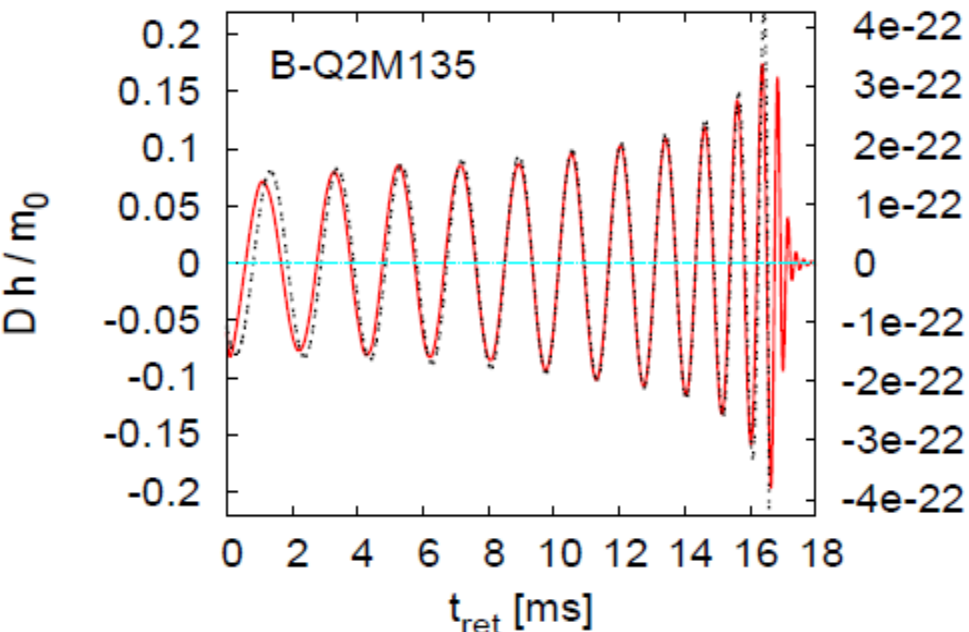
潮汐破壊している



下:  $M_{\text{BH}} = 2.7 M_{\text{sol}}$

ringdownが見える

# 重力波形:状態方程式による違い



$h$  (100Mpc)

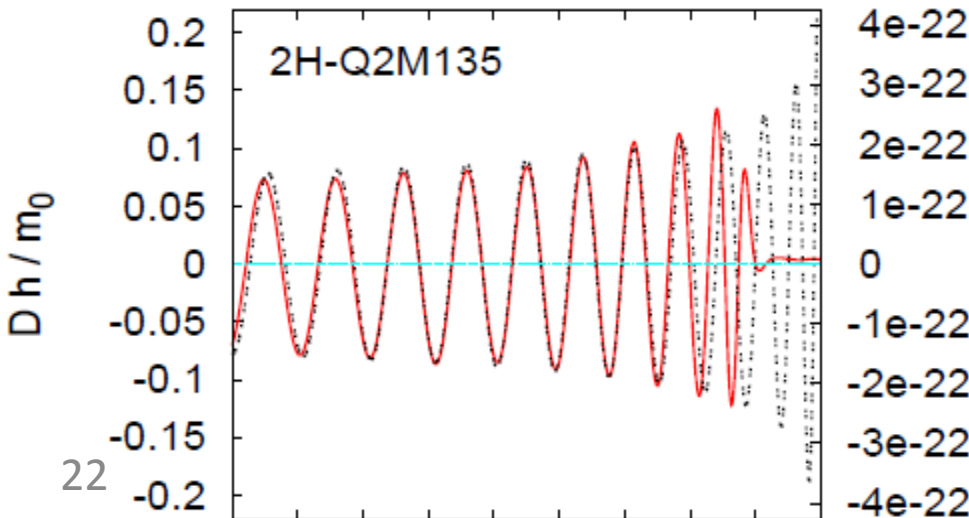
$$M_{\text{BH}} = 2.7 M_{\text{sol}}$$

$$M_{\text{NS}} = 1.35 M_{\text{sol}}$$

上:柔らかなEOS

NS半径が小さい

潮汐破壊は弱い



$h$  (100Mpc)

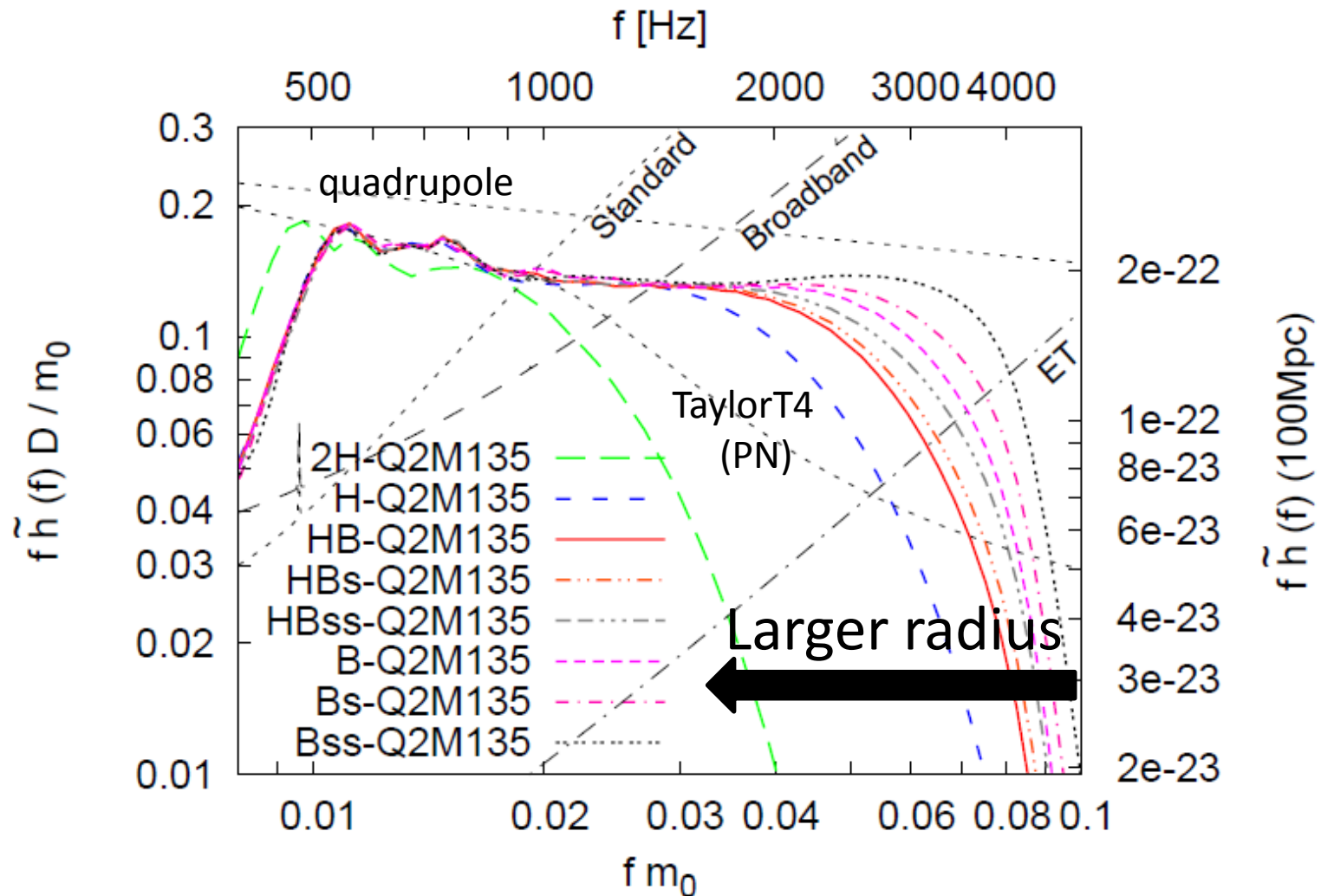
下:硬いEOS

NS半径が大きい

潮汐破壊は強い

# 重力波スペクトル

- $M_{\text{NS}} = 1.35M_{\text{sol}}, M_{\text{BH}} = 2.7M_{\text{sol}} (Q = 2)$



# カットオフ振動数

- スペクトルの定性的な性質は共通
  - 低振動数側ではpost-Newtonに一致
  - 高振動数で急激なカットオフを示す
- 7パラメータで波形をフィットしてみる

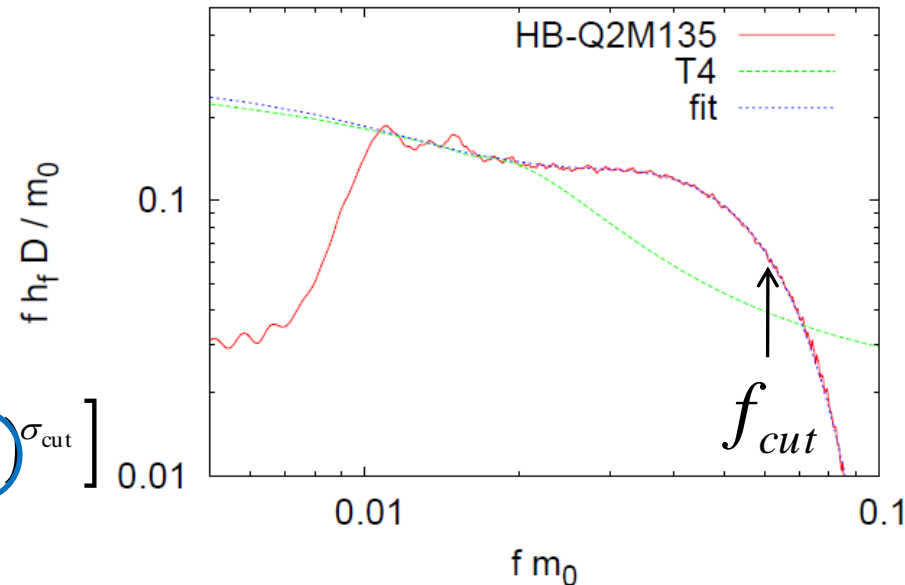
$$\tilde{h}_{\text{fit}}(f) = \tilde{h}_{\text{PN}}(f) \exp\left[-(f / f_{\text{PN}})^{\sigma_{\text{PN}}}\right]$$

減衰post-Newton

+

高振動数側の山

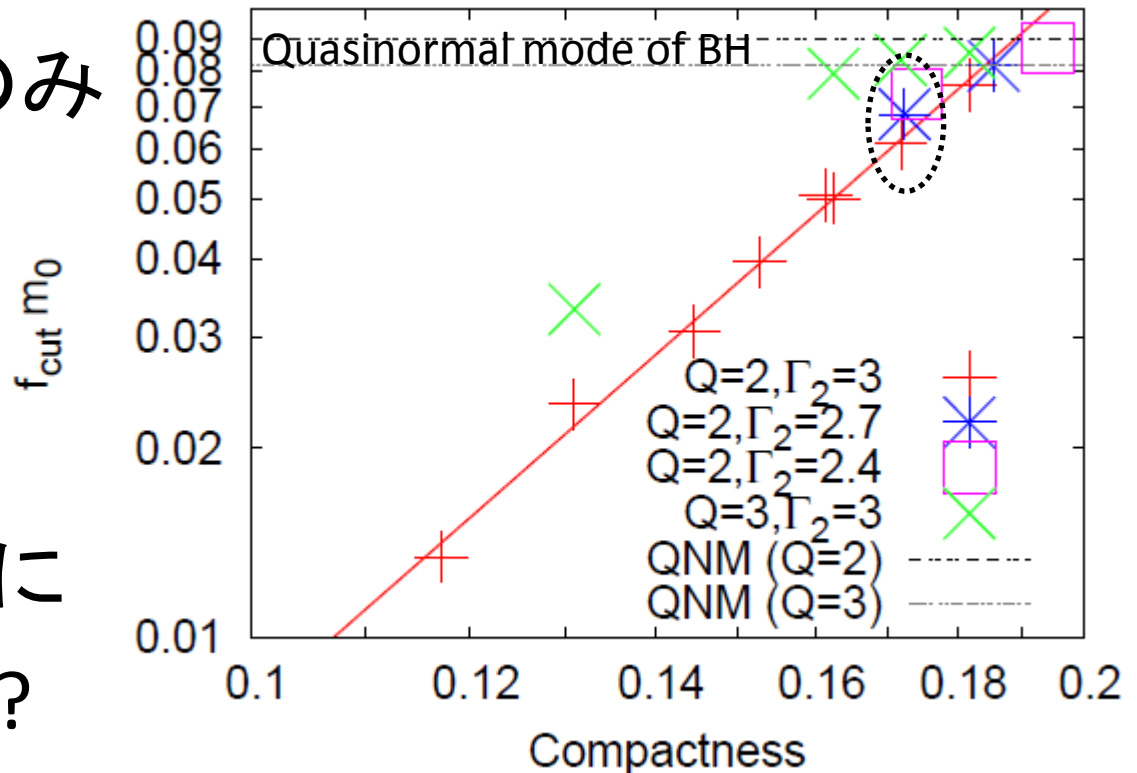
$$+ \frac{Am_0}{fD} \left(1 - \exp\left[-(f / f_{\text{ins}})^{\sigma_{\text{ins}}}\right]\right) \exp\left[-(f / f_{\text{cut}})^{\sigma_{\text{cut}}}\right]$$





# コンパクトネス vs カットオフ振動数

- 潮汐破壊するときは  $f_{cut} m_0 \propto C^4$  くらいになる
- Q=3は無理そう  
リングダウンのみ
- コアの硬さで  
有意な違い
- うまくやれば  
NS半径と同時に  
コアの情報も?

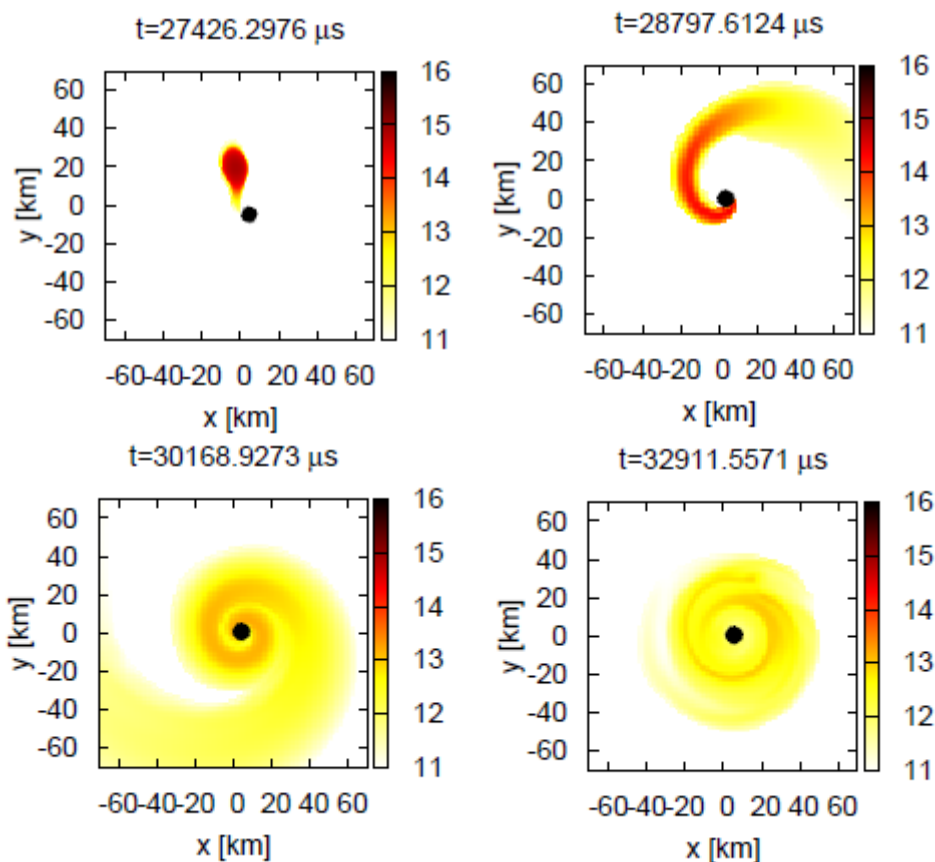


# 観測的には?

- コンパクトネス  $C = M_{\text{NS}} / R_{\text{NS}}$  だけではダメで、質量比を決めることも含め inspiral の情報から中性子星の質量を決める必要がある
- $C - fm_0$  の関係が「コアの硬さ」のような EOS の情報も持っている場合、1 イベントの重力波を観測してもどの関係が成り立つかわからず、複数のイベントを観測し質量-半径関係との整合性を見ることが必要になるだろう
- そもそも振動数がかなり高いところにある...

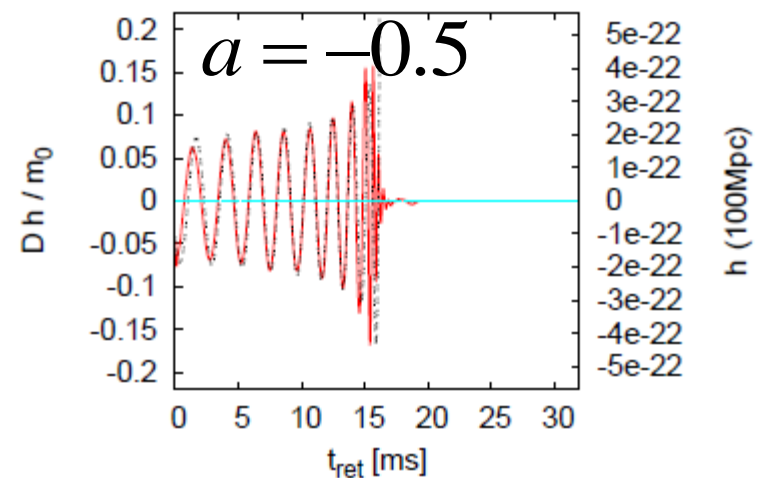
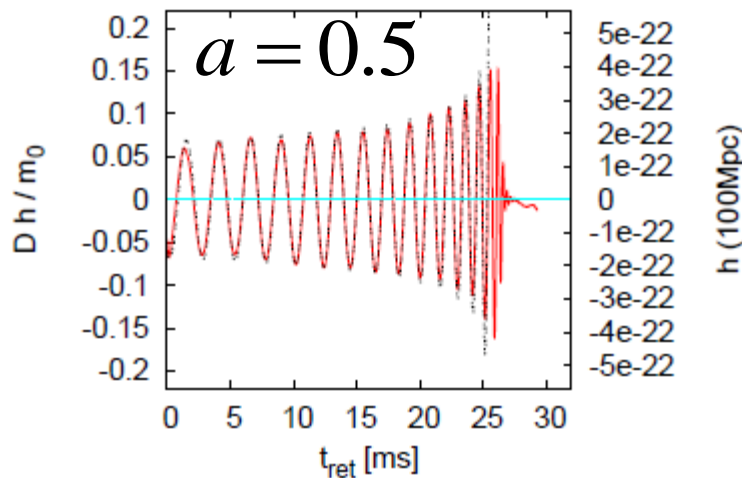
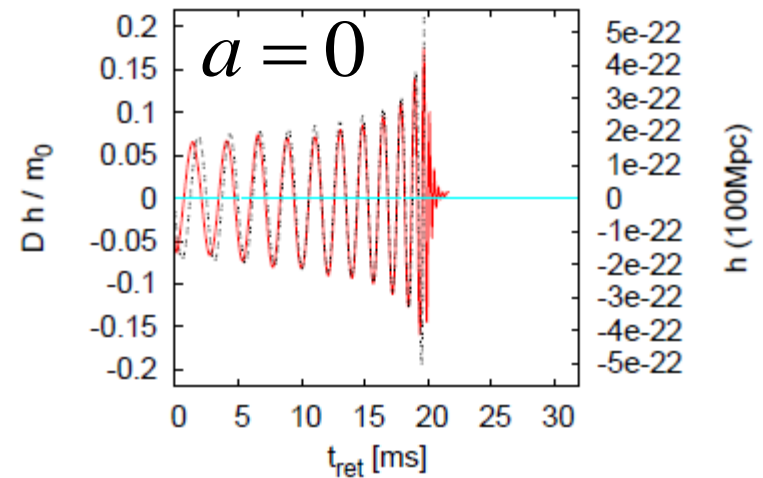
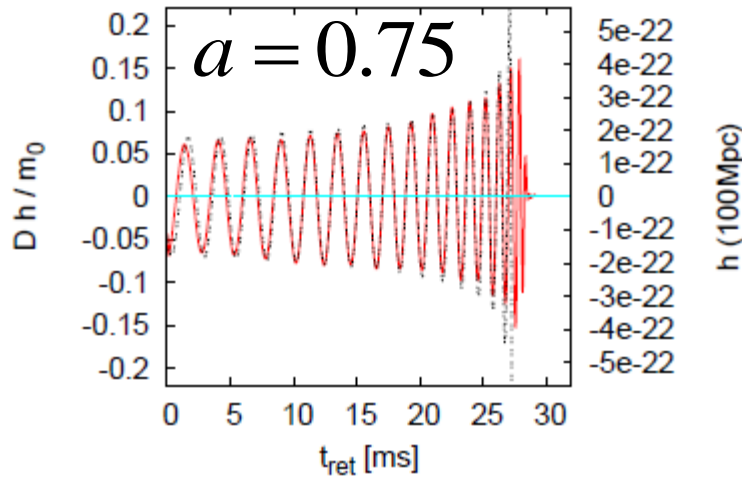
# ブラックホールスピンがある場合

- 質量比が大きくても支障なく潮汐破壊する
- この絵は  $Q = 3$  だが、  
 $a = 0.75$  もあれば  
もっと質量比が  
大きくても潮汐破壊



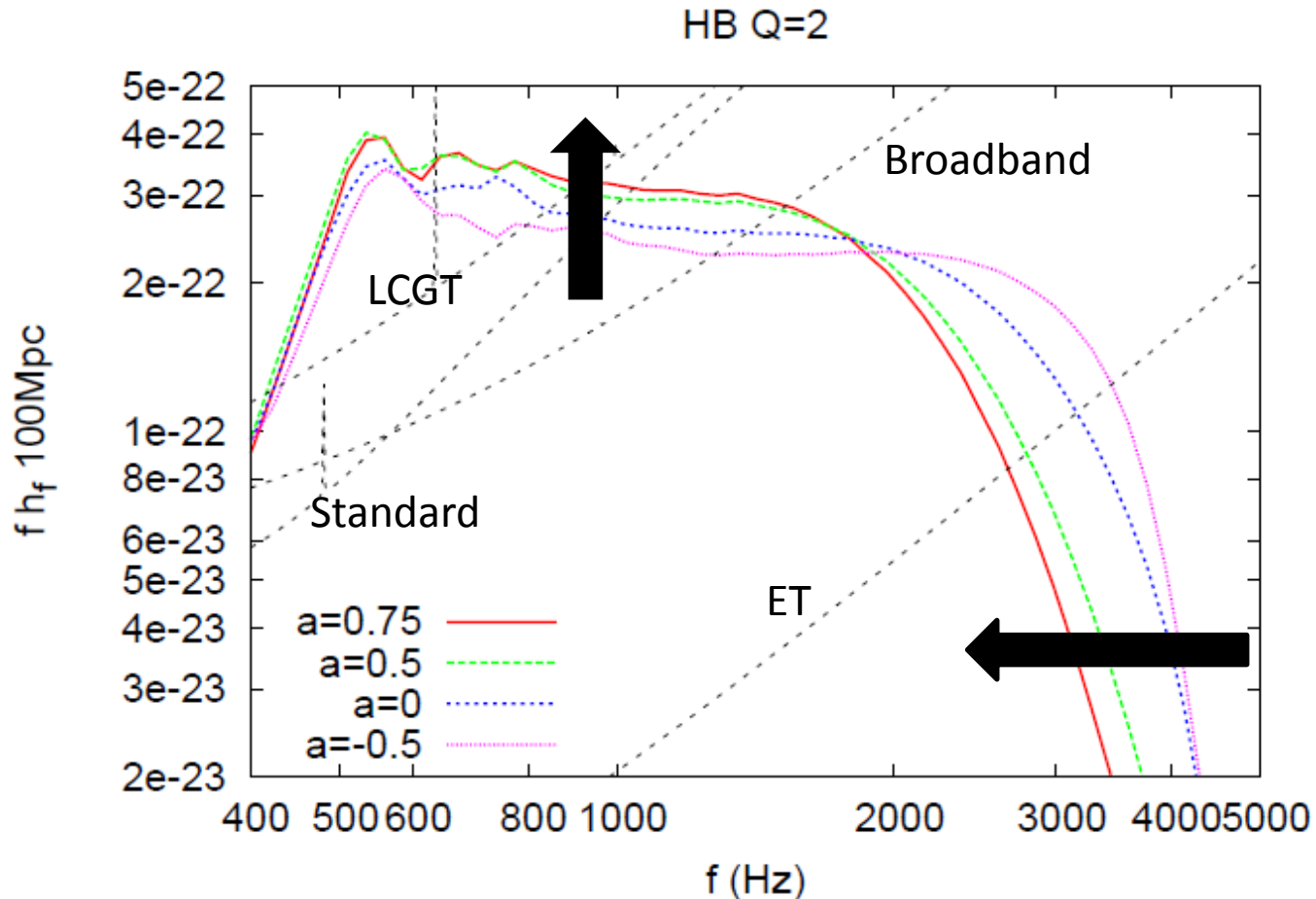
# スピンによる重力波の違い

- スピンが軌道角運動量と平行だと強い重力波



# BHスピンによるスペクトルの変化

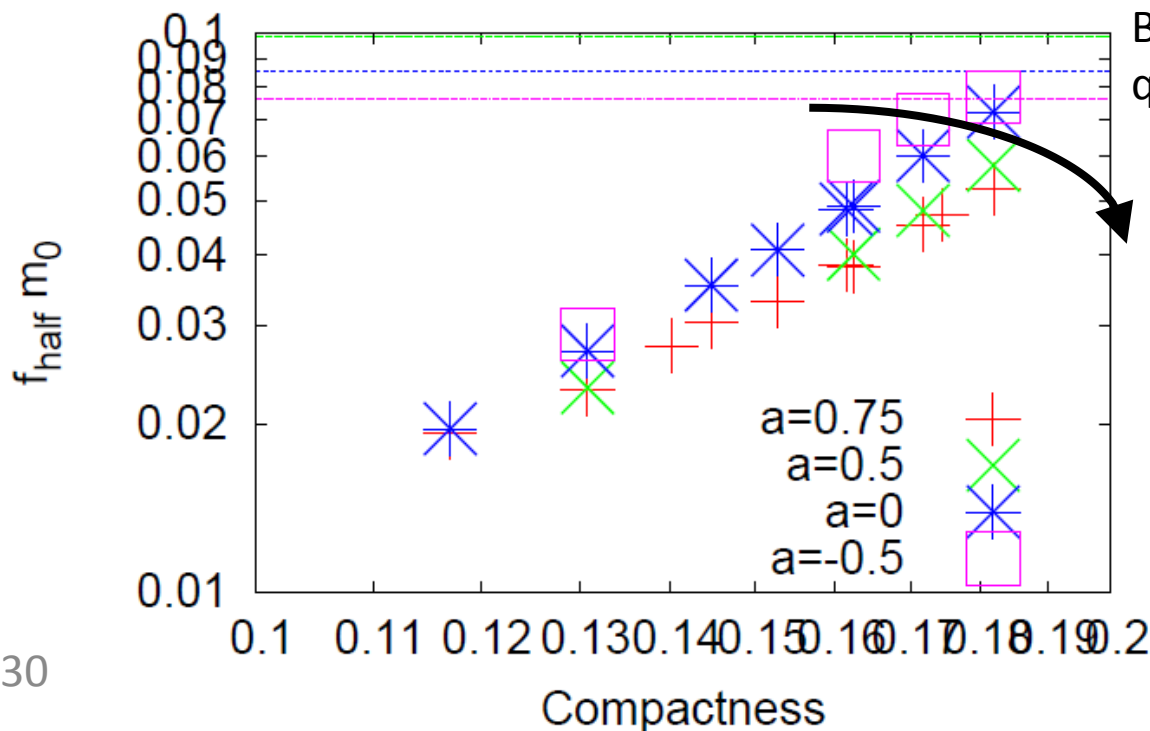
- 低振動数側で出てくる重力波が増え、振幅大
- カットオフが起こる振動数は低くなる



# カットオフ振動数-コンパクトネス

- (少し定義を変えている)
- **BHスピンのあるとカットオフ振動数は下がる**
- 観測的には低振動数の方が有利だろう

Q=2

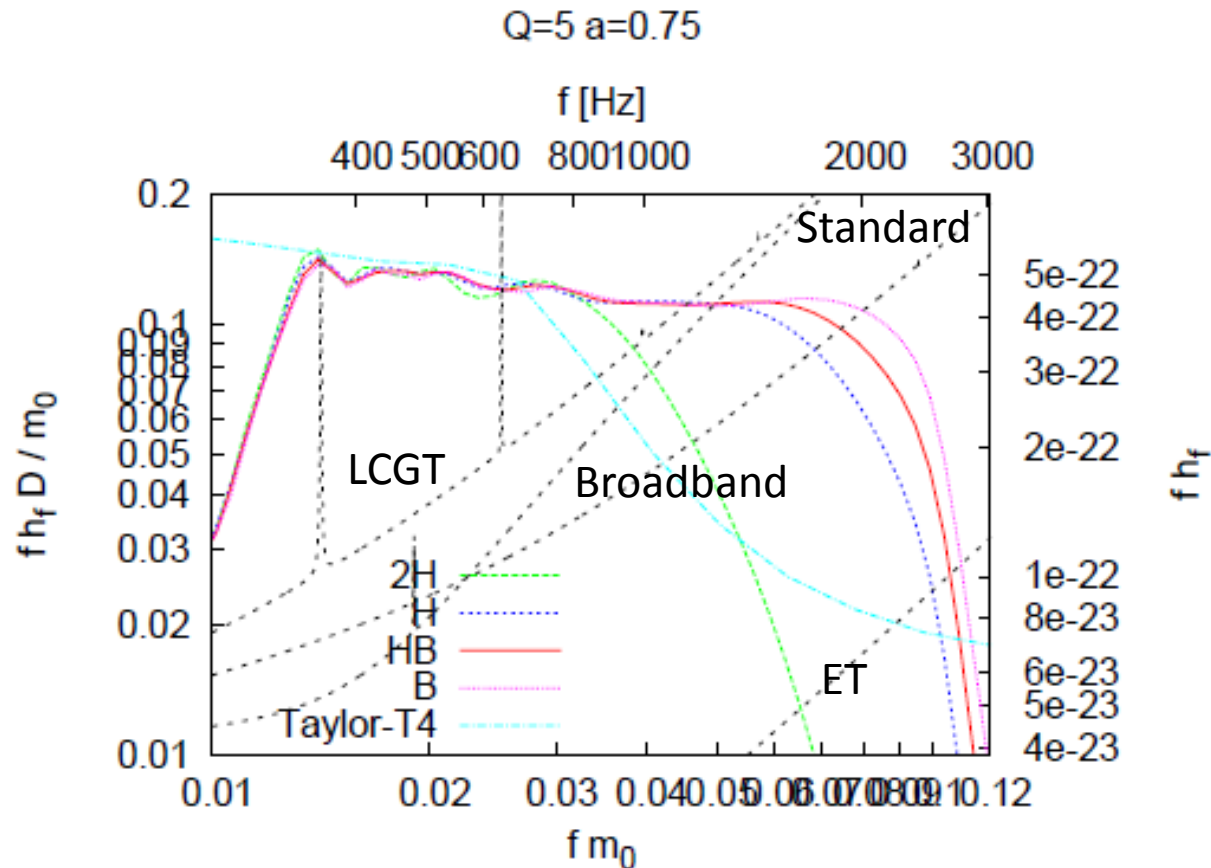


BHスピンごとの  
quasinormal mode

ただしinspiralで  
スピンを求める  
必要がある...

# 重いBHによる潮汐破壊

- このときは  $M_{\text{BH}} = 6.75 M_{\text{sol}} \rightarrow$  現実的だろう
- Adv. LIGOあたりでも見えそうな気がしてくる



まとめと

今後の

展望



# まとめ

- 数値相対論を用いてブラックホール・中性子星連星の合体からの重力波を計算した
- 中性子星の状態方程式は、特に潮汐破壊するときに重力波スペクトルのカットオフ振動数から読み取ることができる
- 潮汐破壊はブラックホールのスピンを考慮すると現実的な場合でも十分起こるだろう
- カットオフ振動数の観測と同時にinspiral重力波でのパラメータ決定(質量、スピン)も重要

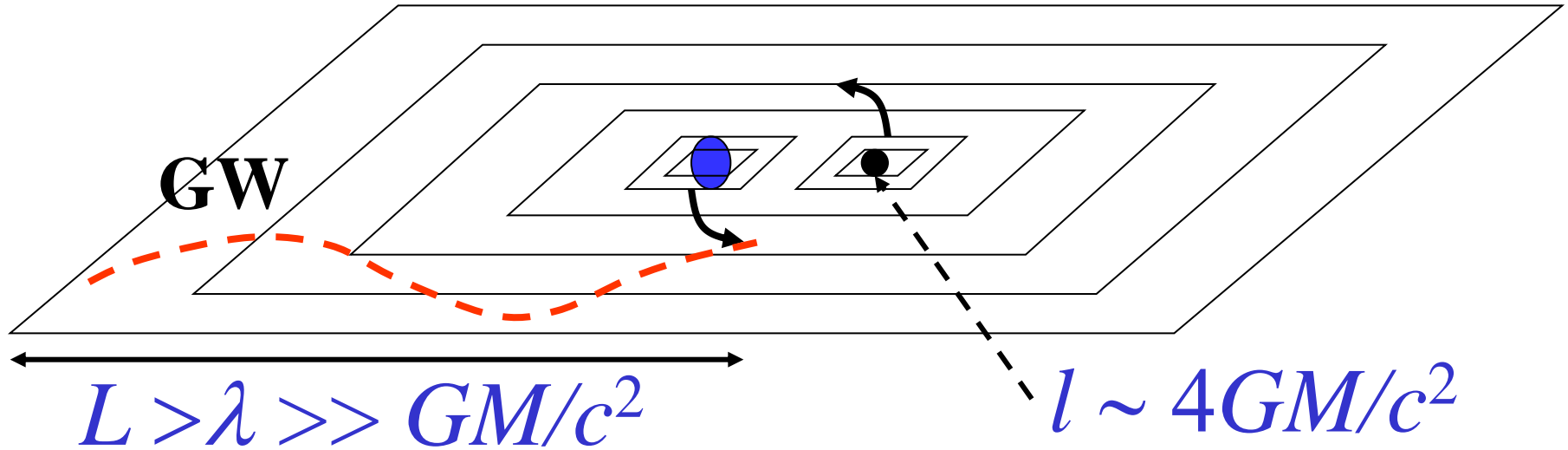
# 今後の展望

- 高密度で相転移を示すEOSで何か見えるか?
  - 原子核物理的に興味を持たれるところ
- 磁場/ニュートリノなどの物理を取り入れる
  - 宇宙物理学としては重要、multi-messenger
  - 重力波自体はほぼ変わらないと考えられる
- 状態方程式の決定精度を定量的に詰める
  - 数値相対論の結果をFisher解析する

予備

# Adaptive mesh refinement

- 絵は柴田さんによる



- 典型的に $113(x) * 113(y) * 57(z) * 11$ (ドメイン)
- SACRAコードの変数は150程度
- メモリは~10GBくらい必要になる
- ~20万円くらいの計算機で実行可能

# Binary simulation @ home (office)



- **Core i7x, 3.33 GHz, 4 cores, 12 or 24 GB memory**  
← May be better than supercomp. 10 yrs ago
- $111 * 111 * 56 * 7$  AMR levels → **10 GB memory**
- **About 50 days for 7 orbits by SACRA code**
- Parameter parallel by ~ 30 machines now

# 用意したモデル

- $\Gamma_2$  : コアの硬さ (クラストの硬さは変えない)
- $p$  : (大体) 大きいほど低密度からコアになる

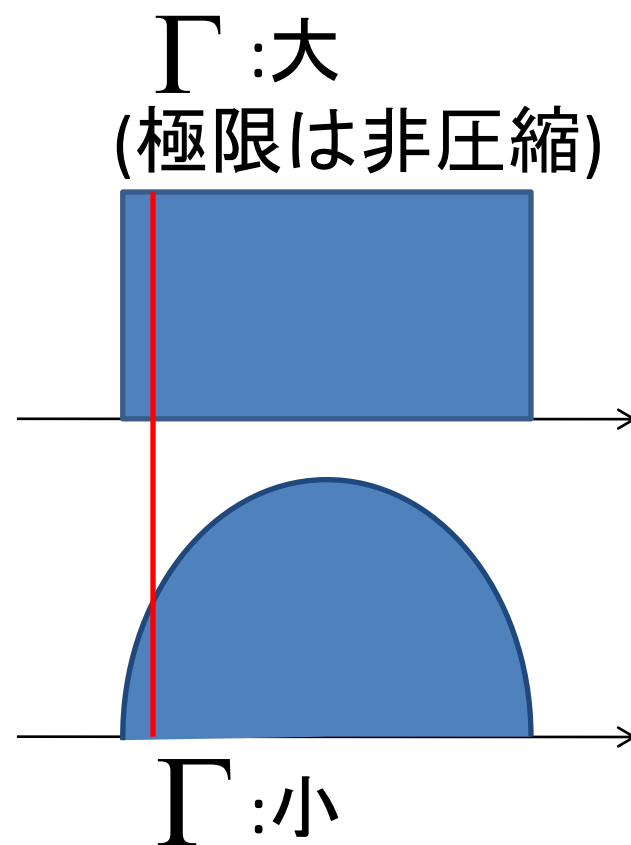
Model	$\Gamma_2$	$\log_{10} p$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\rho_1$ [10 <sup>14</sup> g/cm <sup>3</sup> ]	$M_{\max}$ [ $M_{\odot}$ ]	$R_{135}$ [km]	$C_{135}$	$R_{12}$ [km]	$C_{12}$
2H	3.0	13.95	0.7033	2.835	15.23	0.1309	15.12	0.1172
H	3.0	13.55	1.232	2.249	12.27	0.1624	12.25	0.1447
HB	3.0	13.45	1.417	2.122	11.61	0.1718	11.60	0.1527
HBs	2.7	13.45	1.069	1.926	11.57	0.1723	11.67	0.1519
HBss	2.4	13.45	0.6854	1.701	11.45	0.1741	11.74	0.1509
B	3.0	13.35	1.630	2.003	10.96	0.1819	10.98	0.1614
Bs	2.7	13.35	1.269	1.799	10.74	0.1856	10.88	0.1629
Bss	2.4	13.35	0.8547	1.566	10.27	0.1940	10.66	0.1663

- 質量が同じでも半径が大いに異なる

# なぜコアの硬さが反映される?

- $\Gamma_2$  の小さい柔らかいEOSでは、密度が中心集中して質量流出が始まってもすぐには壊れない
- 「硬いものは壊れやすい」

	$\Gamma_2$	$M_{\text{NS}} = 1.35M_{\odot}$ $\rho_{\text{max}} [\text{g/cm}^3]$
HB	3.0	$8.262 \times 10^{14}$
HBs	2.7	$9.154 \times 10^{14}$
HBss	2.4	$1.082 \times 10^{15}$



# Post-Newtonian Taylor-T4 formula

- ODEなのですぐ解ける (導出はできないが)

$$\frac{dX}{dt} = \frac{64\nu X^5}{5m_0} \left[ 1 - \frac{743 + 924\nu}{336} X + 4\pi X^{3/2} + \left( \frac{34103}{18144} + \frac{13661}{2016}\nu + \frac{59}{18}\nu^2 \right) X^2 \right. \\ \left. - \left( \frac{4159}{672} + \frac{15876}{672}\nu \right) \pi X^{5/2} + \left\{ \frac{16447322263}{139708800} - \frac{1712}{105}\gamma_E + \frac{16}{3}\pi^2 - \left( \frac{56198689}{217728} - \frac{451}{48}\pi^2 \right) \nu \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{541}{896}\nu^2 - \frac{5605}{2592}\nu^3 - \frac{856}{105} \ln(16X) \right\} X^3 - \left( \frac{4415}{4032} - \frac{358675}{6048}\nu - \frac{91495}{1512}\nu^2 \right) \pi X^{7/2} \right] \\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{X^{3/2}}{m_0}$$

$$h^{22} = -8\sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\nu m_0}{D} e^{-2i\Theta} X \left[ 1 - \left( \frac{107}{42} - \frac{55}{42}\nu \right) X + 2\pi X^{3/2} - \left( \frac{2173}{1512} + \frac{1069}{216}\nu - \frac{2047}{1512}\nu^2 \right) X^2 \right. \\ \left. - \left\{ \left( \frac{107}{21} - \frac{34}{21}\nu \right) \pi + 24i\nu \right\} X^{5/2} + \left\{ \frac{27027409}{646800} - \frac{856}{105}\gamma_E + \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{1712}{105} \ln 2 - \frac{428}{105} \ln X \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{278185}{33264} - \frac{41}{96}\pi^2 \right) \nu - \frac{20261}{2772}\nu^2 + \frac{114635}{99792}\nu^3 + \frac{428}{105}i\pi \right\} X^3 \right]$$



# カットオフ振動数についてコメント

- 質量を変えても  $C - fm_0$  の組み合わせはOK  
半径と振動数、などの組み合わせはダメ
- QNMの振動数はほぼEOSによらない  
(= 合体後のBHスピンは質量比で決まる)  
 $a \approx 0.66$  for  $Q = 2$ 、  $a \approx 0.54$  for  $Q = 3$
- べきは  $f_{cut} m_0 \propto C^4$  くらいになっている