
地上レーザー干渉計ネットワークによる 連星合体重力波のパラメータ決定精度

大豊ゆかり, ○田越秀行
(大阪大学)

目的

地上レーザー干渉計の有力なターゲット・・・コンパクト連星合体

コンパクト連星合体のインスパイラル波形を、レーザー干渉計ネットワークにより検出する際の、パラメータ決定精度を調べる.

波形は、ポストニュートニアン波形のRestricted wave formと、Full wave formの両方を用いて、結果を比較する.

レーザー干渉計は第2世代(Advanced LIGO(aLIGO) - Advanced VIRGO - LCGT)と第3世代(Einstein Telescope (ET) 相当)を想定する.

地上の3、4台の検出器を用いるので、方向が決まる.

コンパクト連星合体波形

2.5PN Full Wave Form formula (FWF) for plus and cross modes

$$h_{+, \times} = \frac{2GM\eta x}{c^2 r} \left\{ H_{+, \times}^{(0)} + x^{1/2} H_{+, \times}^{(1/2)} + x H_{+, \times}^{(1)} + x^{3/2} H_{+, \times}^{(3/2)} + x^2 H_{+, \times}^{(2)} + x^{5/2} H_{+, \times}^{(5/2)} \right\}$$

$$x = \left(\frac{GM\Omega}{c^3} \right)^{2/3}, \Omega = \frac{2\pi}{P_{\text{orbit}}} \quad M = m_1 + m_2, \eta = m_1 m_2 / M^2, r = \text{distance to source}$$

$$H_a^{(n/2)} = \sum_{k=1}^7 \left\{ c_{a,k}^{(n/2)} \cos(k\Psi(t)) + s_{a,k}^{(n/2)} \sin(k\Psi(t)) \right\}$$

$\Psi(t)$: Orbital phase formula (3.5PN)

レーザー干渉計が受ける波形

$$h(t) \quad \left(= \frac{\Delta L}{L} \right) = F_+ h_+ + F_\times h_\times = \sum_{a=+, \times} F_a h_a(t)$$

F_+, F_\times : detector's response function
by Dhurandhar, Tinto ('88)

$$= \frac{2GM\eta x}{c^2 r} \sum_{a=+, \times} \sum_{n=0}^5 F_a H_a^{(n/2)} x^{n/2}$$

$$= \frac{2GM\eta x}{c^2 r} \sum_{a=+, \times} \sum_{n=0}^5 \sum_{k=1}^7 x^{n/2} \left[F_a c_{a,k}^{(n/2)} \cos(k\Psi(t)) + F_a s_{a,k}^{(n/2)} \sin(k\Psi(t)) \right]$$

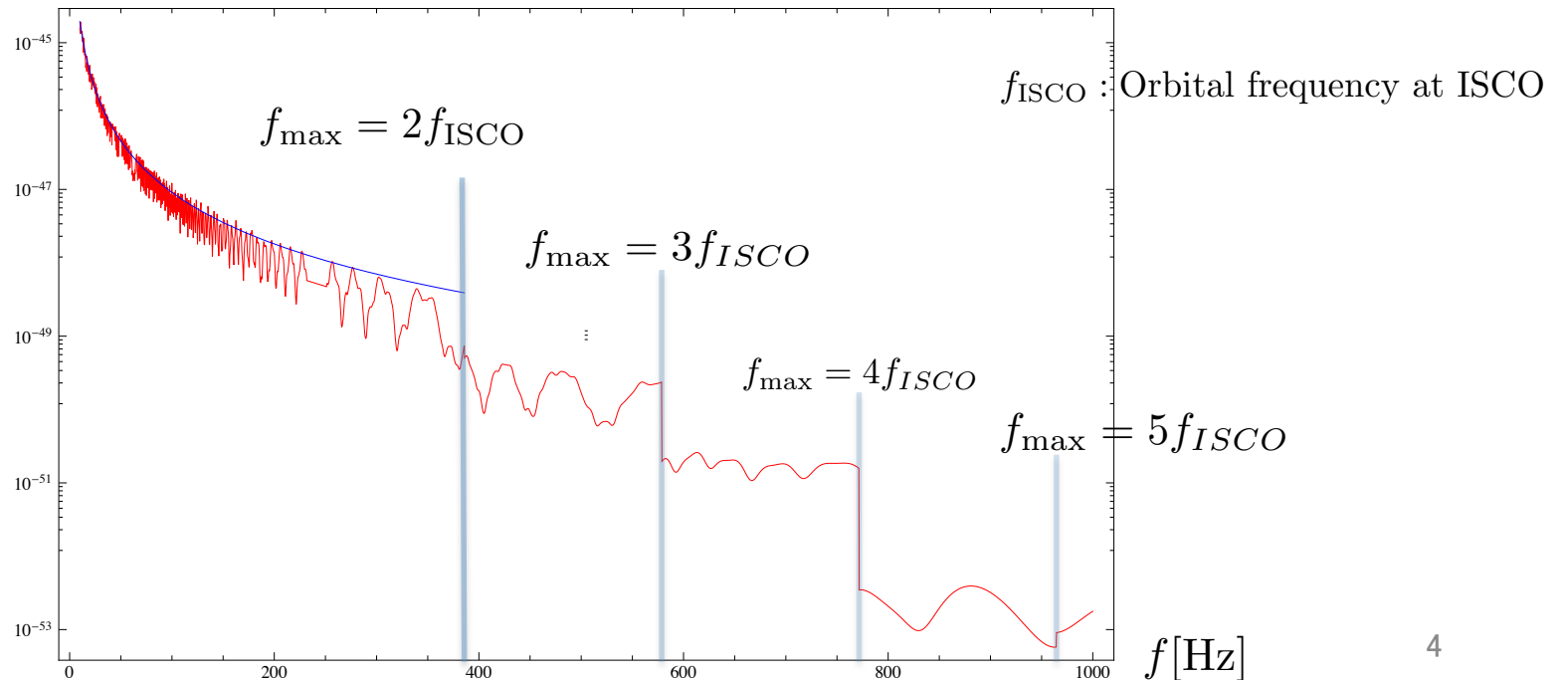
FWFとRWF

$$h(t) = \frac{2GM\eta x}{c^2 r} \sum_{a=+, \times} \sum_{n=0}^5 \sum_{k=1}^7 x^{n/2} \left[F_a C_{a,k}^{(n/2)} \cos(k\Psi(t)) + F_a S_{a,k}^{(n/2)} \sin(k\Psi(t)) \right]$$

FWF(Full Wave Form) 既知のすべてのモードを含む ($n=0..5, k=1..7$)

一方、通常使われる波形はRWF(Restricted Wave Form) と呼ばれ、 $n=0, k=2$ のモードのみを含み、また、フーリエ変換の際に生じる振幅の補正項を無視する。

$$|\tilde{h}(f)|^2$$



過去の仕事

FWFを用いた研究

Sintes and Vecchio ('00,'00) initial LIGO, LISA
Hellings and Moore ('02,'03) LISA
van den Broeck, Sengupta ('07,'07) FWF, aLIGO, EGO
Trias and Sintes ('07) LISA
Arun et al. ('07,'07) LISA

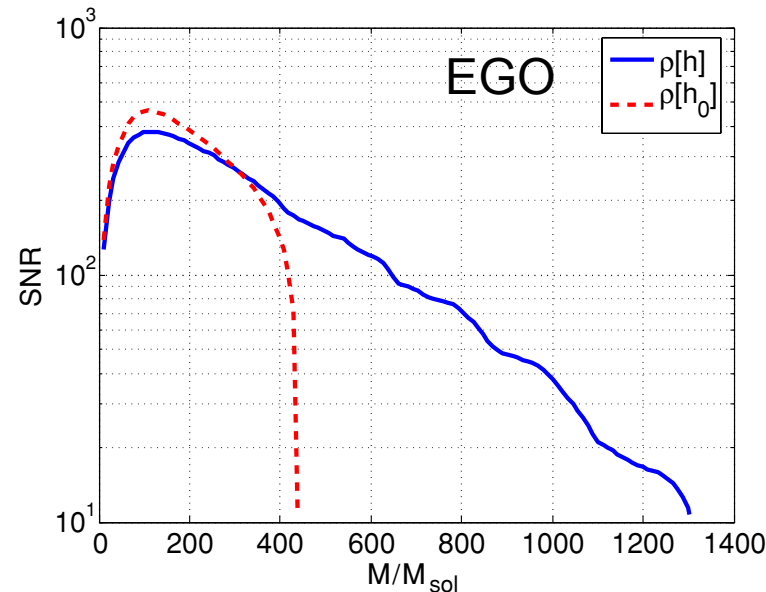
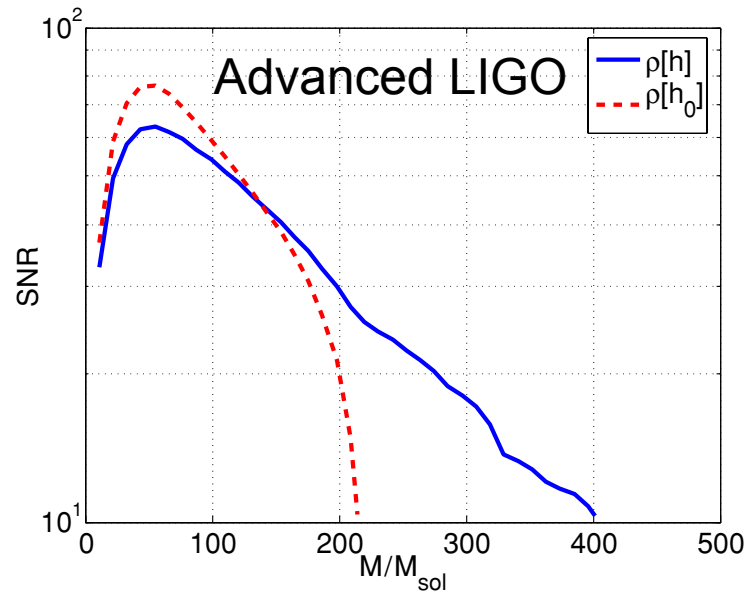
地上干渉計ネットワーク(複数台)でのパラメータ決定精度

Jaranowski, Krolak et al. ('94,'96) RWF, Fisher行列
Pai,Dhurandhar,Bose('01) RWF, Fisher行列(1例)
Röver, Meyer, Christensen ('07) FWF, MCMCシミュレーション

FWFとRWF, Mass reach

S/Nが変わる

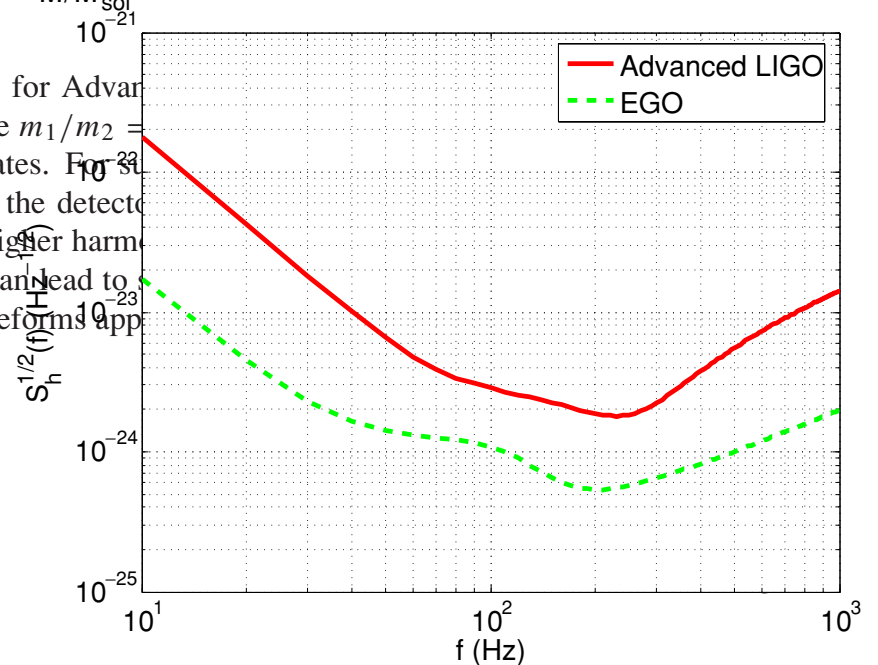
Van Den Broeck and Sengupta ('07)



$m_1+m_2=10:1$

Figure 2. Plots of $\rho[h]$ and $\rho[h_0]$ as functions of total mass for Advanced LIGO (left) and EGO (right). Distance is fixed at 100 Mpc, and we assume $m_1/m_2 = 10:1$ (see table 1). At low masses one has $2f_{\text{LSO}} \gg f_s$ and $\rho[h_0]$ dominates. For $2f_{\text{LSO}} \leq f_s$, so that the dominant harmonic no longer enters the detector bandwidth, the SNR for the restricted waveform vanishes. For such masses, higher harmonics in the amplitude-corrected waveform will continue to enter the bandwidth and can lead to a higher SNR. As a result, at the given distance the use of amplitude-corrected waveforms appears to increase the mass reach of Advanced LIGO and triples that of EGO.

$$\rho = 4 \int_0^\infty \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_h(f)} df$$



パラメータ推定誤差

Maximum likelihood 法による重力波信号検出を想定する。(ネットワーク解析)
それによるパラメータ推定誤差をフィッシャー行列により評価する.
複数の検出器のときは、検出器間のノイズに相関がなければ、
検出器ネットワークのFisher行列は、各検出器のFisher行列の和になる.

$$\Gamma_{ij} = \sum_{I=1}^N \Gamma_{ij}^{(I)} \quad \Gamma_{ij}^{(I)} = 2 \int_0^\infty \frac{\partial_i \tilde{h}^I(f) \partial_j \tilde{h}^{I*}(f)}{S_h(f)} df$$

誤差 $\delta\mu^i = \hat{\mu}^i - \mu_{\text{true}}^i$ の分布

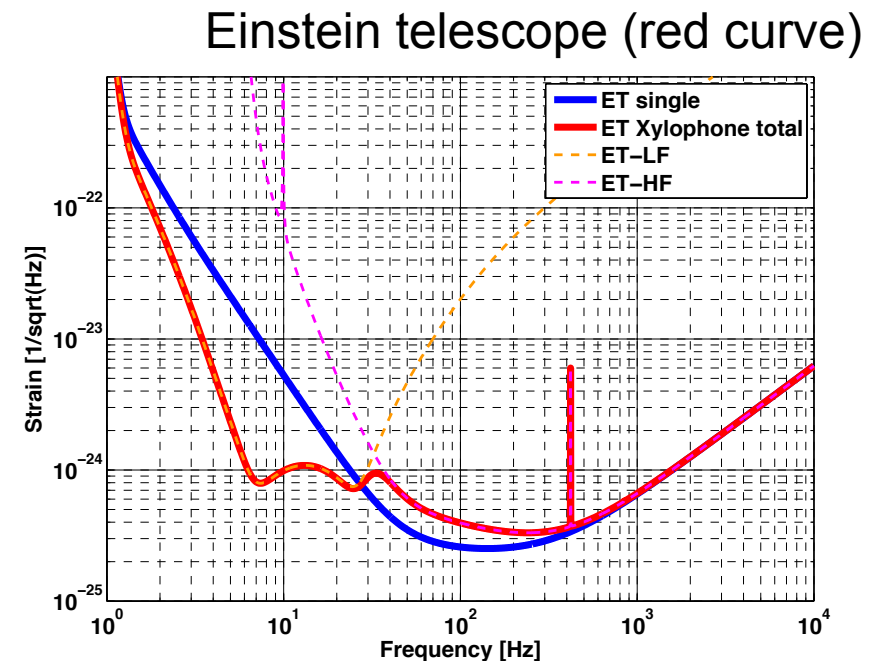
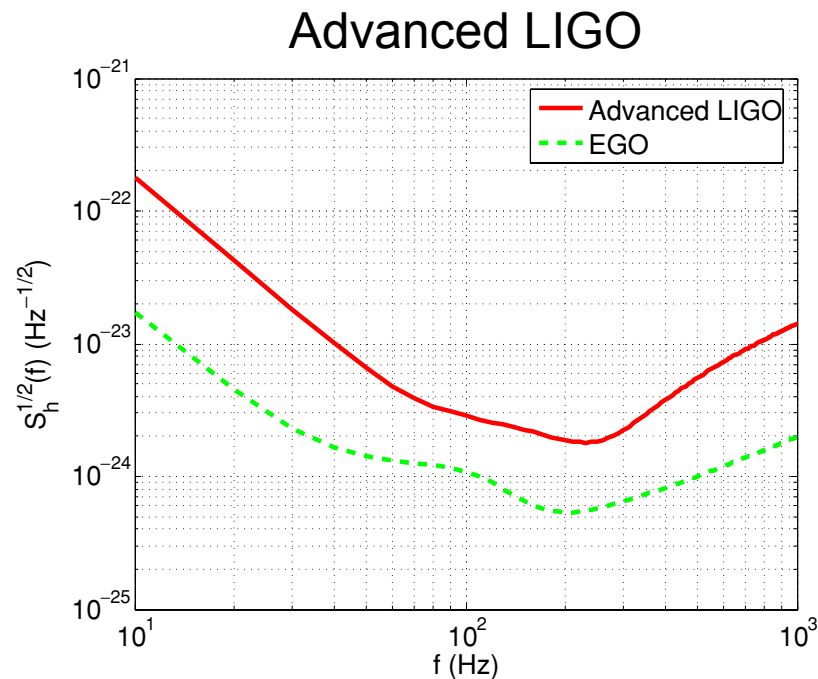
$$p(\delta\mu^i) = N e^{-\frac{1}{2} \Gamma_{ij} \delta\mu^i \delta\mu^j}$$

Detectors

Detector location : current LIGO, VIRGO and planned LCGT site

	Detector	latitude(λ)	longitude(ℓ)	x-arm(ζ)	y-arm
LIGO-Hanford	H1,H2	46.45°N	-119.41°E	36.8°	126.8°
LIGO-Livingstone	L1	30.56°N	-90.77°E	108.0°	198.0°
VIRGO	V1	43.63°N	10.5°E	71.5°	341.5°
LCGT	K1	137.18°N	36.25°E	295.0°	25.0°

Noise power spectrum ··· assume all detectors have the same spectrum



計算

重力波を記述するパラメータ

$$(\ln(r), \ln(M_c), \delta \text{ or } \ln(\eta), t_c f_0, \phi_c, \underbrace{\theta_s, \phi_s}_{\text{方向}}, \psi, \epsilon)$$

$$M_c = M\eta^{3/5}, \quad \delta = (m_1 - m_2)/M$$

偏極角

方向

Inclination angle

取り入れる効果

- 検出器が違う方向を向く(地球の曲率) (Dhurandhar, Tinto ('88), Pai, Dhurandar, Bose('01))
- 検出器間での重力波の到達時刻の違い
- 地球回転

質量パラメータ

(1.4, 1.4)Msolar, (10, 1.4)Msolar, (10, 10)Msolar (aLIGO, ET)

(100, 10)Msolar – (800, 10)Msolar (ETのみ)

Parameter estimation errors (1)

Advanced LIGO noise spectrum

$(1.4, 1.4)M_{\text{solar}}$

Signal to noise ratio at each detector

	LIGO-L1	LIGO-H1	VIRGO-V1	LCGT-K1
RWF	6.6	8.3	6.4	8.1
FWF	6.4	8.0	6.2	7.9

$$\theta_s = \frac{\pi}{9}, \varphi_s = \frac{8}{9}\pi, \psi = \frac{\pi}{4}, \varepsilon = \frac{\pi}{3}$$

$$(m_1, m_2) = (1.4, 1.4)M_{\text{solar}}$$

$$r = 200 \text{ Mpc}$$

Parameter estimation errors

		ln(r)	ln(Mc)	delta	tc[msec]	theta [min]	phi[deg]	Omega [sr]	minor axis [min]	Major axis [min]
FWF	LHVK	0.49	3.7×10^{-5}	0.34	0.17	35	80	4.9×10^{-4}	23	160
	LVK	0.50	4.4×10^{-5}	0.41	0.20	36	100	6.4×10^{-4}	24	200

		ln(r)	ln(Mc)	ln(eta)	tc[msec]	theta [min]	phi[deg]	Omega [sr]	minor axis [min]	Major axis [min]
RWF	LHVK	0.46	9.0×10^{-5}	8.9×10^{-3}	0.35	33	75	4.3×10^{-4}	22	150
	LVK	0.48	1.1×10^{-4}	1.1×10^{-2}	0.42	33	94	5.6×10^{-4}	22	188

Parameter estimation errors (3)

Signal to noise ratio at each detector

ET-C noise spectrum

FWF	LIGO-L1	LIGO-H1	VIRGO-V1	LCGT-K1
(1.4,1.4)	100	126	93	123
(10,1.4)	208	260	199	256
(10,10)	497	622	478	611

RWF	LIGO-L1	LIGO-H1	VIRGO-V1	LCGT-K1
(1.4,1.4)	101	128	94	124
(10,1.4)	215	270	206	264
(10,10)	522	652	502	641

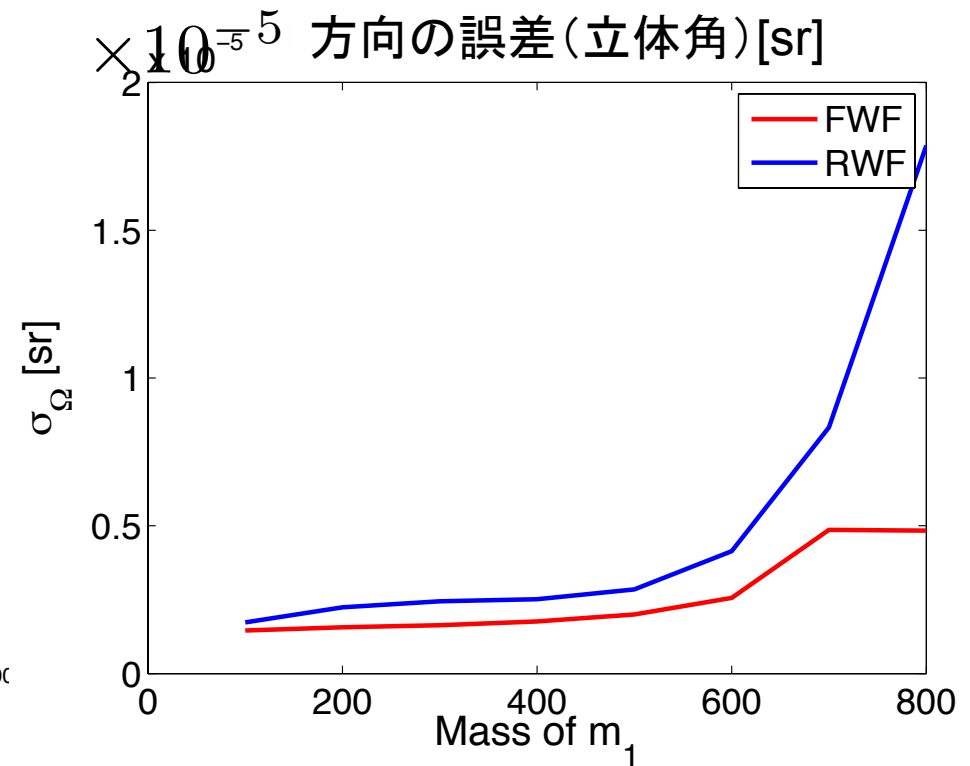
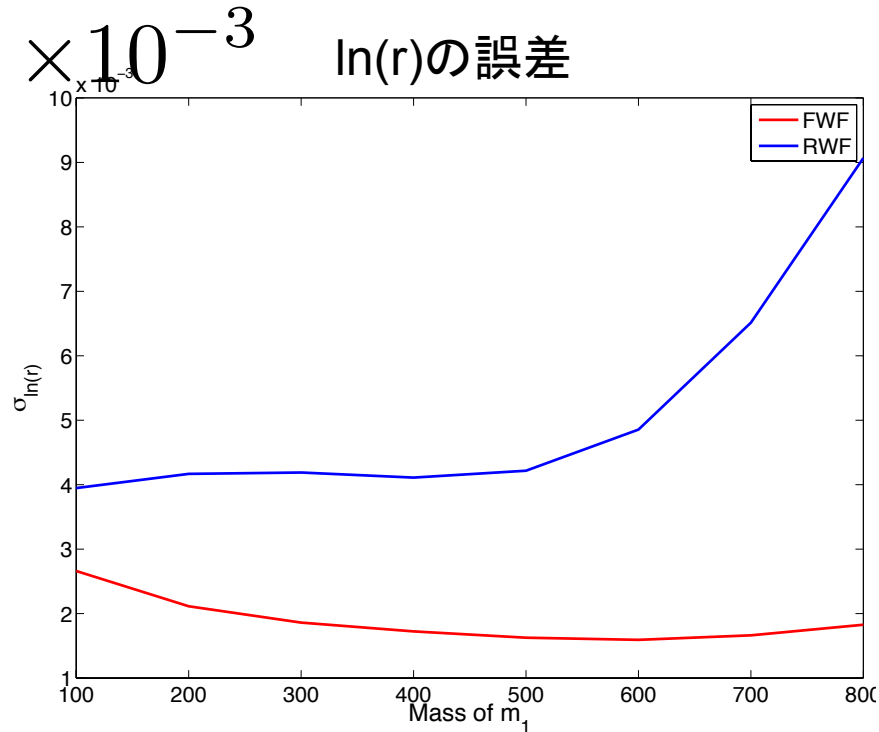
Parameter estimation errors (4 detectors)

FWF	$\ln(r)$	$\ln(Mc)$	delta	tc[msec]	theta [min]	phi[min]	Omega [sr]	minor axis [min]	Major axis [min]
(1.4,1.4)	0.022	8.1×10^{-8}	0.036	0.011	3.1	7.9	4.3×10^{-6}	2.1	16
(10,1.4)	0.011	2.6×10^{-7}	1.6×10^{-5}	0.015	2.3	5.6	2.3×10^{-6}	1.5	11
(10,10)	0.0053	4.2×10^{-7}	0.0041	0.0054	1.4	3.2	8.4×10^{-7}	0.96	6.6
RWF									
(1.4,1.4)	0.021	1.2×10^{-7}	1.0×10^{-4}	0.014	2.8	7.1	3.5×10^{-6}	1.9	14
(10,1.4)	0.012	2.8×10^{-7}	5.3×10^{-5}	0.012	1.9	4.7	1.7×10^{-6}	1.3	9.5
(10,10)	0.0049	9.0×10^{-7}	6.5×10^{-5}	0.0082	1.1	2.6	5.3×10^{-7}	0.76	5.2

Parameter estimation error (5)

$(100M_{\odot} \times j, 10M_{\odot})$

ET-C noise spectrum



まとめ

- FWFの効果は10Msolar以下の連星では, aLIGO, ET両方で小さい.
- ETの場合, 100Msolar以上では, 距離と方向の誤差は, FWFを使うことで小さくなる. 特に距離の誤差は半分以下になる.
- ETの場合, 距離の誤差は10Msolar以下では数%程度, 100Msolar以上では0.2%程度.
- 方向の誤差は10Msolar以下で1-2分 x 5-10分角.
- 一方, aLIGOでは, 方向の誤差は 10^{-4} steradian 程度で, これは 1° 程度. また, 距離の誤差は数10%.
- 以上の結果は方向などによって多少変わる. 今後より多くの方向パラメータの組を調べて以上の結果を確認する.



Summary

- The effect of the FWF is small in the case of mass less than 10Msolar both in Advanced LIGO and Einstein Telescope.

- In the case of ET, at higher mass (more than 100Msolar, 10Msoar), the parameter estimation error of distance and direction are improved by using FWF.

The error of distance becomes 1/2 compared to the RWF case.

- In the case of ET, distance is determined with a few % accuracy for mass less than 10Msolar, and around 0.2 % for mass larger than 100-800Msolar+10Msolar.

- On the other hand, in the case of Advanced LIGO, the error of direction is determined only 10^{-4} steradian which is around 1° .

Distance is determined with error of several 10 %.

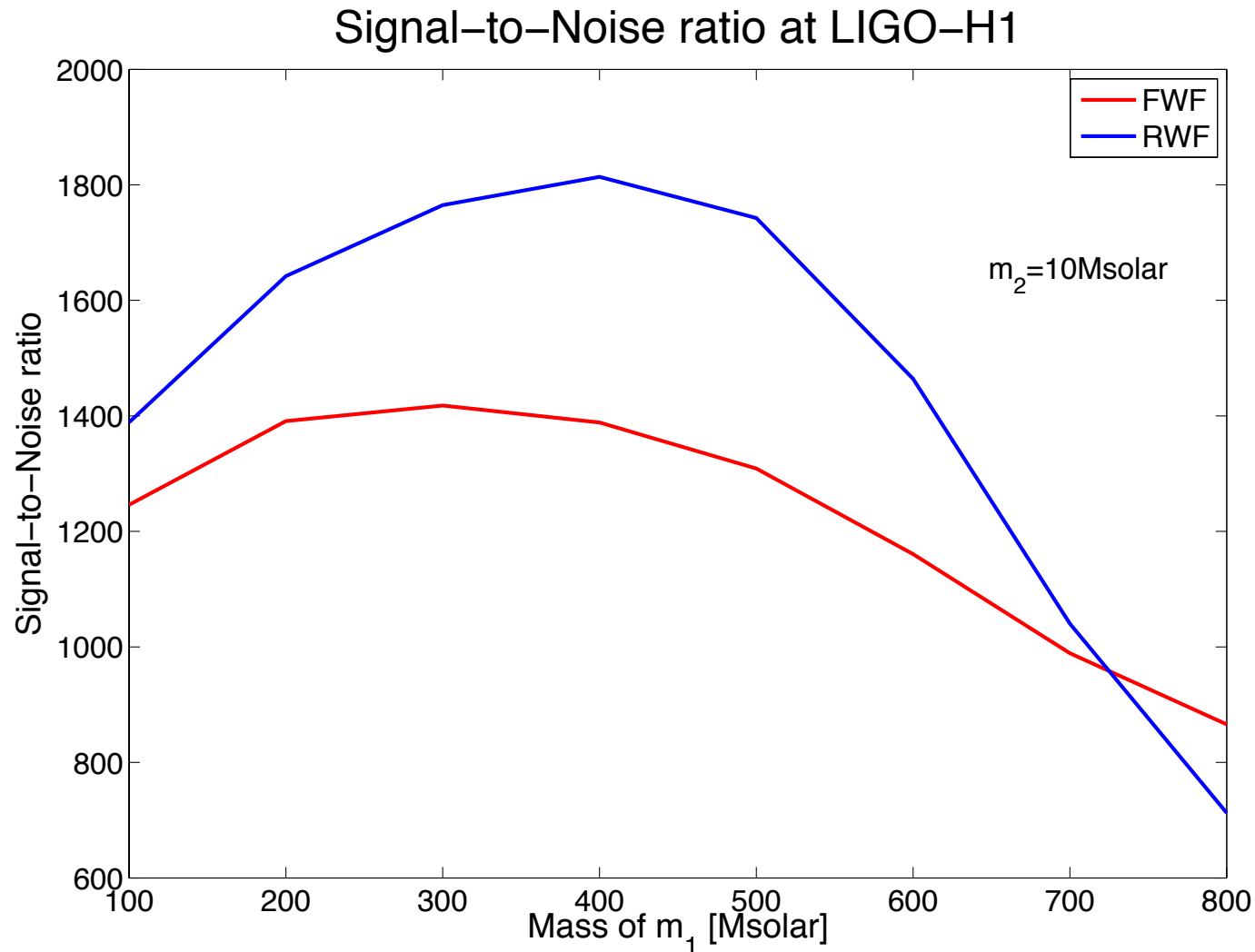
(But the these value of errors depend on $(\theta, \phi, \psi, \epsilon)$)

- Larger parameter space of $(\theta, \phi, \psi, \epsilon)$ should be investigated in order to confirm these results.

Parameter estimation error

$(100M_{\odot} \times j, 10M_{\odot})$

ET-C noise spectrum

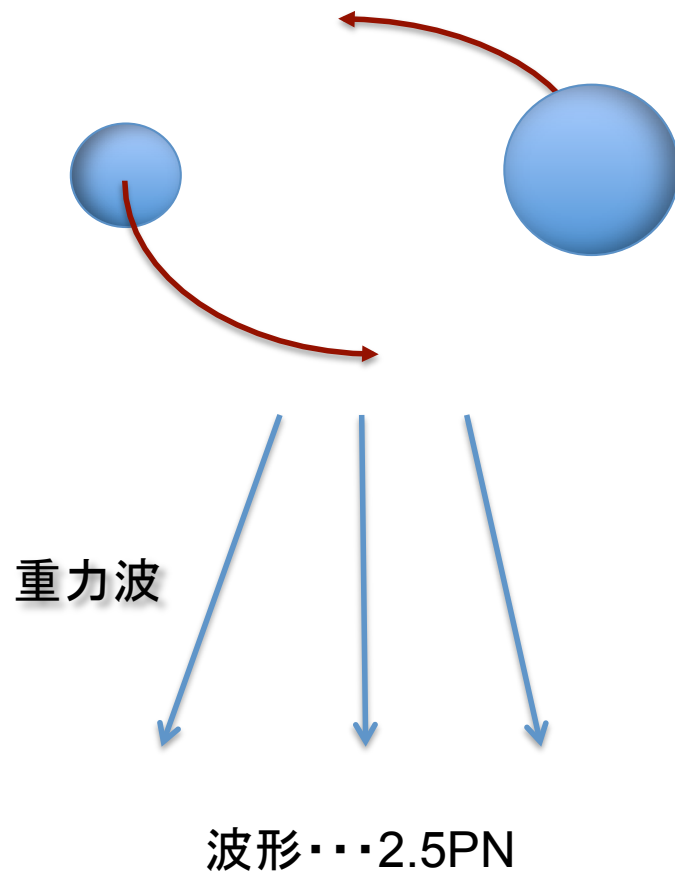


コンパクト連星合体波形

Inspiral phaseでの重力波波形 (ポストニュートニアン(PN)近似波形)

$$1\text{PN} \dots \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

運動方程式: 3.5PN



エネルギー放出率 $\frac{dE}{dt} \dots 3.5\text{PN}$

↓
軌道半径変化率...3.5PN

↓
軌道運動の位相の式...3.5PN
(重力波の位相の式)

コンパクト連星合体

中性子星連星リスト

PSR name	P_s (ms)	P_b (hr)	e	τ_{life} (Gyr)
B1913+16 ^a	59.03	7.75	0.617	0.37
B1534+12 ^a	37.90	10.10	0.274	2.93
J0737-3039A ^a	22.70	2.45	0.088	0.23
J1756-2251 ^a	28.46	7.67	0.181	2.03
J1906+0746 ^b	144.14	3.98	0.085	0.082
J2127+11C ^{bcd}	32.76	8.047	0.681	0.32

表 1.2: 10^{10} 年以内に合体する連星中性子星. P_s :パルス周期, P_b :公転周期, e :離心率, τ_{life} :寿命, $\tau_{\text{life}} = \tau_{\text{sd}} + \tau_{\text{mrg}}$, τ_{sd} : spin down age, τ_{mrg} :重力波放出による合体までの時間. J1906+0746 は伴星が WD である可能性もある. J2127+11C は球状星団 M15 にあるもの. それ以外は銀河円盤内にあるもの. 引用文献, ^aO'Shaughnessy et al.(2008)[3], ^bKim et al.(2006)[4], ^cThe ATNF Pulsar Catalogue[5]. ^dPhinney(1991).[6]

データ解析の基礎(4)

- ノイズがガウスノイズの時

$$x(t) = \begin{cases} n(t) \\ n(t) + s(t; \mu) \end{cases} \quad ; s(t; \mu) : \text{signal}, \mu : \text{parameter}$$

Likelihood ratio

$$\Lambda = \frac{P(x | s(\mu))}{P(x | 0)}$$

$P(x | s(\mu))$: s が存在するとき, x を観測する確率

$P(x | 0)$: s が存在しないとき, x を観測する確率

$n(t) = x(t) - s(t; \mu)$ より $P(x | s) = P(x - s | 0)$ と書ける

よって, $P(x | 0)$ を求めればよい.

ノイズ $n(t)$: 平均値=0のガウス過程とする

データ解析の基礎(5)

多変量ガウス分布より,

$$P(x|0) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(x,x)\right]}{[(2\pi)^N \det\|C_{n,ij}\|]}$$

$$(g,h) \equiv 2 \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{g}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(|f|)}$$

$C_n(\tau)$: correlation function

$$C_{n,ij} = C_n[(i-j)\Delta t]$$

従って

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{P(x|s(\mu))}{P(x|0)} = \frac{P(x-s(\mu)|0)}{P(x|0)} \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\langle x-s(\mu), x-s(\mu) \rangle\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}\langle x, x \rangle\right]} = \exp\left[\langle x, s(\mu) \rangle - \frac{1}{2}\langle s(\mu), s(\mu) \rangle\right] \end{aligned}$$

データ解析の基礎(7)

Maximum likelihood estimation

$\Lambda(x, \mu)$ の最大値を与える $\mu = \hat{\mu}$ を, μ の推定値とする.

Λ の指数部分(対数尤度比)

$$L = \ln \Lambda(x, \mu) = (x, s(\mu)) - \frac{1}{2} (s(\mu), s(\mu))$$

$$0 = \left. \frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu^i} \right|_{\mu = \hat{\mu}} = (x, s_i(\hat{\mu})) - (s(\hat{\mu}), s_i(\hat{\mu})) = (x - s(\hat{\mu}), s_i(\hat{\mu}))$$

$$\left(s_i(\mu) = \frac{\partial s(\mu)}{\partial \mu^i} \right)$$

$x(t) = n(t) + s(\tilde{\mu})$ とする. $\tilde{\mu}$ は真の値

信号 s は強く, L は $\tilde{\mu}$ に強いピークを持つと仮定する.

$\delta \mu^i = \hat{\mu}^i - \tilde{\mu}^i$ とおき, $\delta \mu^i$ の1次まで評価.

データ解析の基礎(8)

前ページからの続き

$$\delta\mu^j \Gamma_{ij}(\tilde{\mu}) = (n, s_i(\tilde{\mu})) \quad \Gamma_{ij}(\tilde{\mu}) = (s_i(\tilde{\mu}), s_j(\tilde{\mu})) \quad \text{:Fisher行列}$$

$$\delta\mu^i = (n, s_j(\tilde{\mu})) (\Gamma^{-1})^{ij} \equiv (n, s^i(\tilde{\mu}))$$

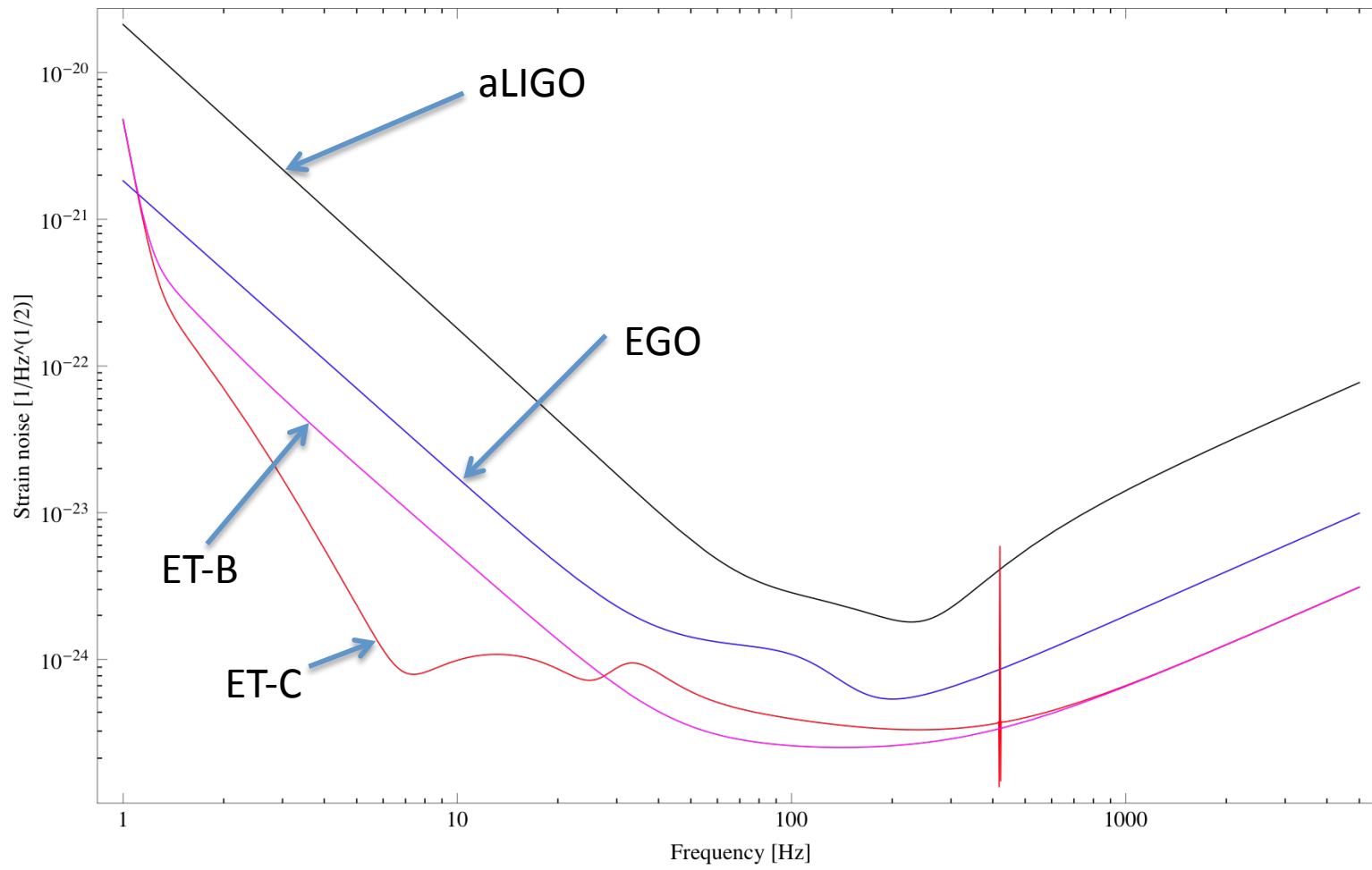
$(n, s^i(\tilde{\mu}))$ はガウス変数

$$\text{平均} \quad \overline{(n, s^i(\tilde{\mu}))} = 0$$

$$\text{共分散行列} \quad \overline{(n, s^i(\tilde{\mu})) (n, s^j(\tilde{\mu}))} = (s^i(\tilde{\mu}), s^j(\tilde{\mu})) = (\Gamma^{-1})^{ij}$$

従って $\delta\mu^i$ も同じく平均0, 共分散 $(\Gamma^{-1})^{ij}$ のガウス分布に従う

$$p(\delta\mu^i) = N e^{-\frac{1}{2} \Gamma_{ij} \delta\mu^i \delta\mu^j}$$



Parameter estimation errors (2)

Advanced LIGO noise spectrum

$(10,1.4)M_{\text{solar}}$

Signal to noise ratio at each detector

	LIGO-L1	LIGO-H1	VIRGO-V1	LCGT-K1
RWF	13.9	17.4	13.4	17.1
FWF	13.0	16.3	12.6	16.0

$$\theta_s = \frac{\pi}{9}, \varphi_s = \frac{8}{9}\pi, \psi = \frac{\pi}{4}, \varepsilon = \frac{\pi}{3}$$

$$(m_1, m_2) = (10, 1.4)M_{\text{solar}}$$

$$r = 200 \text{ Mpc}$$

Parameter estimation errors

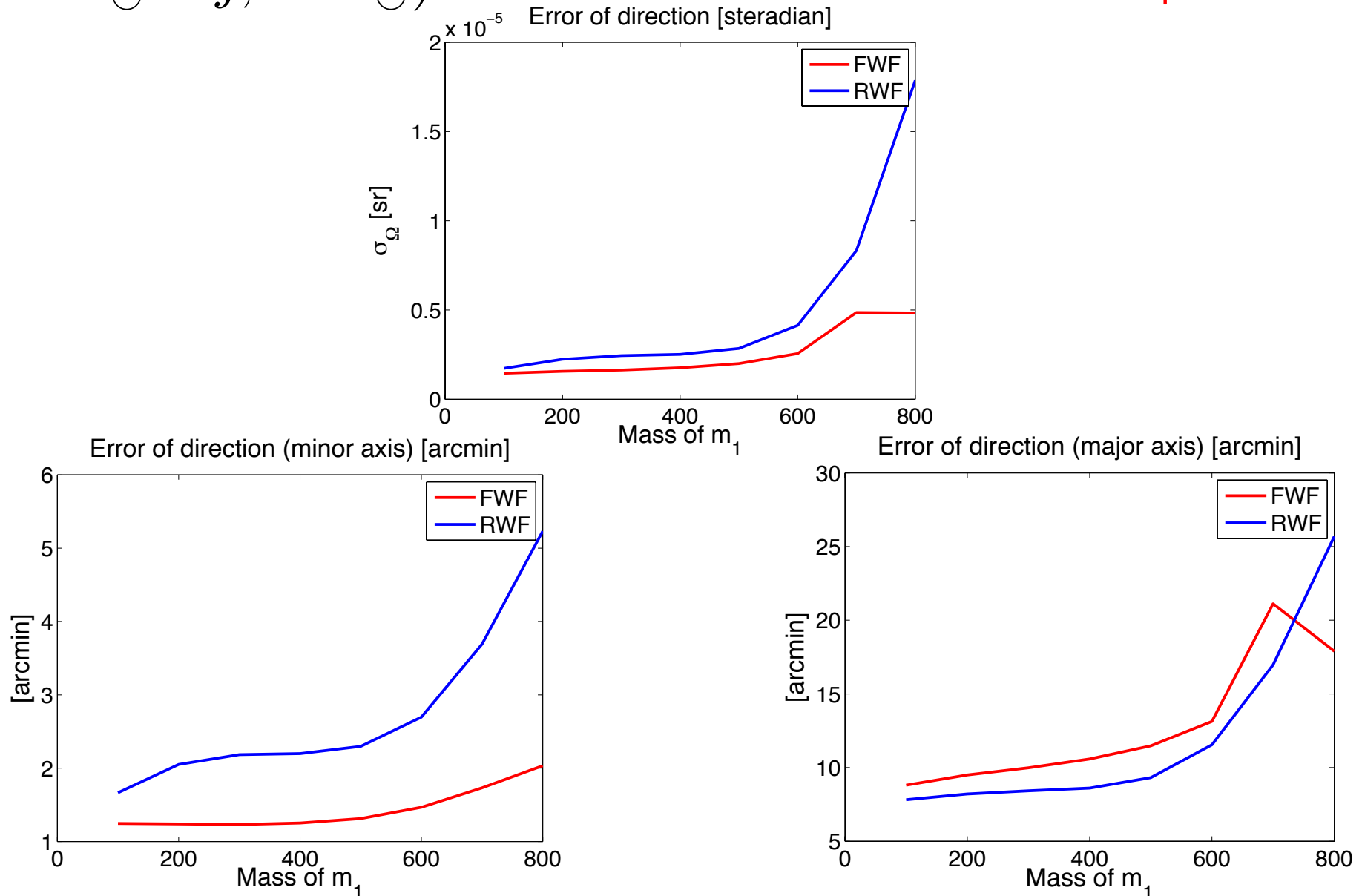
		$\ln(r)$	$\ln(Mc)$	$\ln(\eta)$	tc [msec]	theta [min]	phi [min]	Omega [sr]	minor axis [min]	Major axis [min]
RWF	LHVK	0.23	2.2×10^{-4}	4.7×10^{-3}	0.32	18	40	1.2×10^{-4}	11	79
	LVK	0.24	2.6×10^{-4}	5.6×10^{-3}	0.39	18	50	1.6×10^{-4}	12	99

		$\ln(r)$	$\ln(Mc)$	delta	tc [msec]	theta [min]	phi [min]	Omega [sr]	minor axis [min]	Major axis [min]
FWF	LHVK	0.18	2.0×10^{-4}	1.4×10^{-3}	0.37	17	41	1.3×10^{-4}	11	83
	LVK	0.21	2.4×10^{-4}	1.7×10^{-3}	0.44	17	52	1.6×10^{-4}	12	104

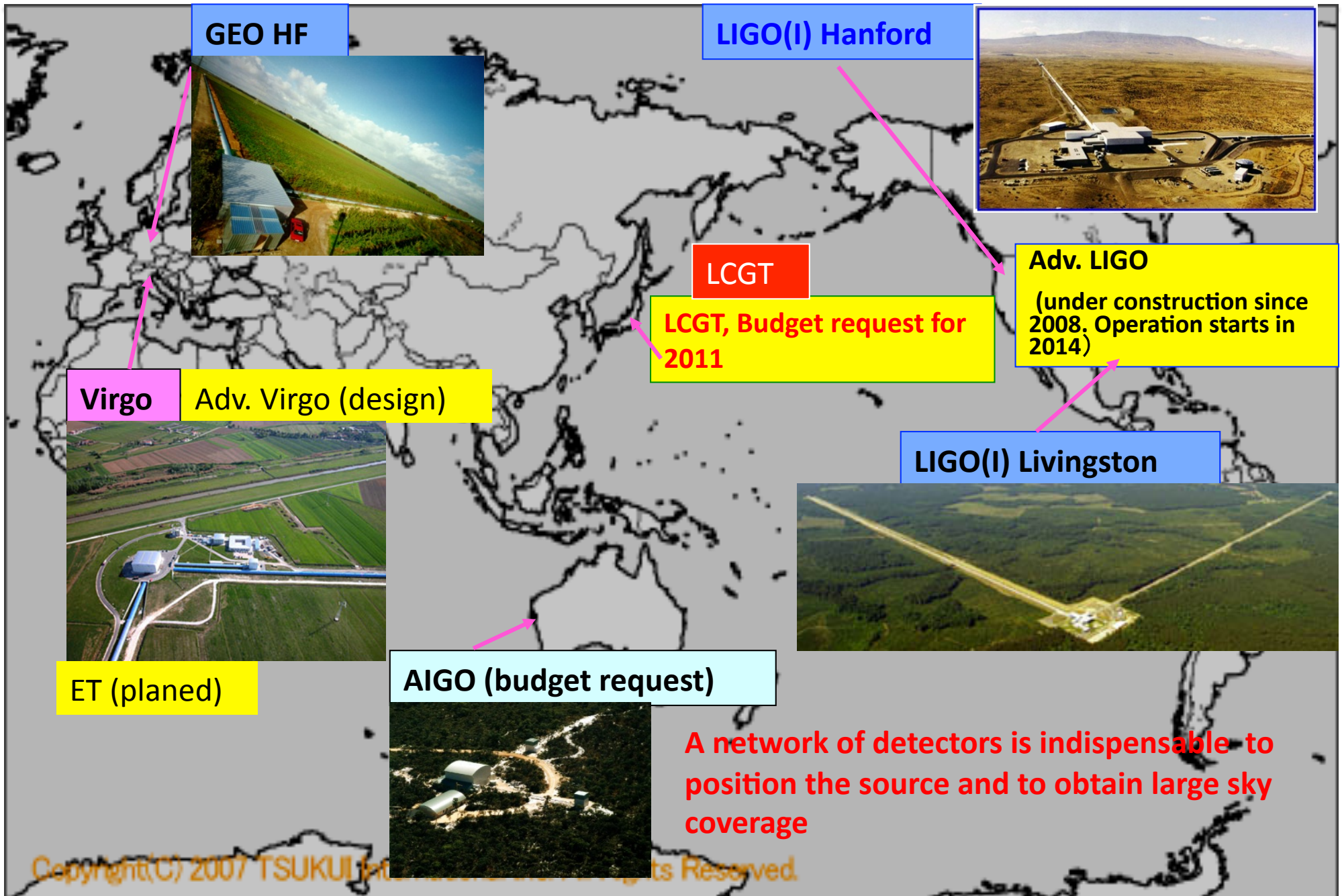
Parameter estimation error (4)

$(100M_{\odot} \times j, 10M_{\odot})$

ET-C noise spectrum



World wide network for GW astronomy



コンパクト連星合体

コンパクト連星合体レート

TABLE 1
ESTIMATES FOR GALACTIC IN-SPIRAL RATES AND PREDICTED LIGO DETECTION RATES (AT 95% CONFIDENCE) FOR DIFFERENT POPULATION MODELS Kalogera et al. ('04)

MODEL ^a	\mathcal{R}_{tot} (Myr ⁻¹)	IRF	\mathcal{R}_{det} of LIGO ^b	
			Initial (kyr ⁻¹)	Advanced (yr ⁻¹)
1	23.2 ^{+59.4} _{-18.5}	6.4	9.7 ^{+24.9} _{-7.7}	52.2 ^{+133.6} _{-41.6}
6	83.0 ^{+209.1} _{-66.1}	6.3	34.8 ^{+87.6} _{-27.7}	186.8 ^{+470.5} _{-148.7}
9	7.9 ^{+20.2} _{-6.3}	6.6	3.3 ^{+8.4} _{-2.6}	17.7 ^{+45.4} _{-14.1}
10	23.3 ^{+57.0} _{-18.4}	5.8	9.8 ^{+23.9} _{-7.7}	52.4 ^{+128.2} _{-41.3}
12	9.0 ^{+21.9} _{-7.1}	6.0	3.8 ^{+9.2} _{-3.0}	20.2 ^{+49.4} _{-15.9}
14	3.8 ^{+9.4} _{-2.8}	5.8	1.6 ^{+3.9} _{-1.2}	8.5 ^{+21.1} _{-6.2}
15	223.7 ^{+593.8} _{-180.6}	7.1	93.7 ^{+248.6} _{-75.6}	503.2 ^{+1336.0} _{-406.3}
17	51.6 ^{+135.3} _{-41.5}	6.9	21.6 ^{+56.7} _{-17.4}	116.1 ^{+304.4} _{-93.4}
19	14.6 ^{+38.2} _{-11.7}	7.0	6.1 ^{+16.0} _{-4.9}	32.8 ^{+86.0} _{-26.3}
20	89.0 ^{+217.9} _{-70.8}	6.2	37.3 ^{+91.2} _{-29.6}	200.3 ^{+490.3} _{-159.3}

^a Model numbers correspond to KKL. Model 1 was used as a reference model in KKL. Model 6 is our reference model in this study.

^b Increase rate factor compared to previous rates reported in KKL.

	NS-NS	BH-NS	BH-BH
IRF ²⁰⁰⁹ $\mathcal{R}_{\text{det}}^{\text{new}} / \mathcal{R}_{\text{det}}^{\text{old}}$ (95%)	$10^{-7} - 10^{-4}$	$10^{-7} - 10^{-5}$	
LCGT(BRSE) での最大観測可能範囲	231Mpc(z=0.0522)	475Mpc(z=0.103)	1.10Gpc(z=0.222)
LCGT でのイベントレート [1/yr]	3.9 ^{+9.90} _{-3.13}	0.036 - 36	0.32 - 32
LCGT(DRSE) での最大観測可能範囲	312Mpc(z=0.0697)	662Mpc(z=0.141)	1.50Gpc(z=0.292)
LCGT でのイベントレート [1/yr]	9.2 ^{+23.2} _{-7.35}	0.087 - 87	0.70 - 70

表 1.1: コンパクト連星系の銀河系での合体率と LCGT で観測可能な範囲内でのイベントレート. NS-NS については, ビーム補正と暗いパルサーからの寄与の補正を取り入れたもの. J1906+0746 の寄与は入っていない. 最大観測可能範囲は, 最適方向・角度の場合に S/N=8 となる距離とした. また, 最適方向・角度からのずれによる観測可能体積の減少率を $(0.44)^3 = 0.0852$ として, LCGT でのイベントレートは計算した. 光度距離と赤方偏移 z の関係は WMAP 5year の結果である, $\Omega_M = 0.274$, $\Omega_\Lambda = 0.726$, $H_0 = 70.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ を用いた.