
干渉計設計のための光線追跡技法

東大新領域 森脇 成典

内容

- 目的
- 光学素子の形状の記述
- 交点の算出
- Gauss ビームパラメータの算出
- まとめ・今後の課題

目的

干渉計型重力波検出器の光学系のように，レーザー光を用い，光共振器を多用する精密計測用干渉計では，

- 減反射面での残留反射光をビームストップかディテクタに導きたい
- 鏡面の曲率，その熱変形によるずれなどで波面不整合の量を見積もりたい
- Gauss ビームの半径の推移を追いかけて，光学素子の開口が十分かどうか確認したい

設計の段階で**光線追跡**による光軸・光路長の予測ができると便利．

市販の光学設計 CAD を使用する？

- 我々が必要としている機能（ツールの仕様）がはっきりしていない．
- 設計が進むにつれ必要となる機能が増えてゆく．

汎用の行列演算ツールを用いて，機能のたたき台を作ってみる．

円錐曲面

光学素子の表面形状:

ほとんどの場合，平面と球面の組み合わせ．

まれに，円筒面，放物面，回転楕円面などがあらわれる．

点 (x, y, z) に対する面の方程式:

$$\text{平面: } n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

$$\text{球面: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

一般の円錐曲面: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$

$$a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

平面，球面，円筒面，放物面，回転楕円面はすべて表現可能．

表面深度関数

物体の表面で同じ値をもつスカラーポテンシャルのようなものを使う．アイコナル関数の類似物．

与えられた点が光学媒質の内側か外側かの判定に用いる．

- 扱いたい円錐曲面が方程式 $f = 0$ で表されるよう係数の比を選ぶ．
- $f > 0$ が媒質の内部を表すよう f の符号を選ぶ．
- f の x, y, z に関する線形項の大きさが 1 となるよう f の定数スケールを選ぶ．

表面深度関数の例

原点を含み，外向き法線 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ を持つ平面

$$f = -n_x x - n_y y - n_z z \quad (1)$$

点 $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を含み，外向き法線 \vec{n} を持つ平面

$$f = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0 - n_x x - n_y y - n_z z \quad (2)$$

原点を含み，外向き法線 \vec{n} を持つ曲率半径 R の凸球面

$$f = -n_x x - n_y y - n_z z + (x^2 + y^2 + z^2)/(2R) \quad (3)$$

z 軸を回転対称軸に持つ半径 R の円筒

$$f = R/2 - (x^2 + y^2)/(2R) \quad (4)$$

同次座標の二次形式

同次座標 (homogeneous coordinate): Euclid 座標 $\vec{p} = (x, y, z)$ に一要素を加え $\vec{q} = (x, y, z, w)$ で 3次元内の一点を表す . 4×4 の行列変換で Affine 変換 (回転と平行移動) が統一的に扱える .

(OpenGL や PostScript の座標変換で用いられている)

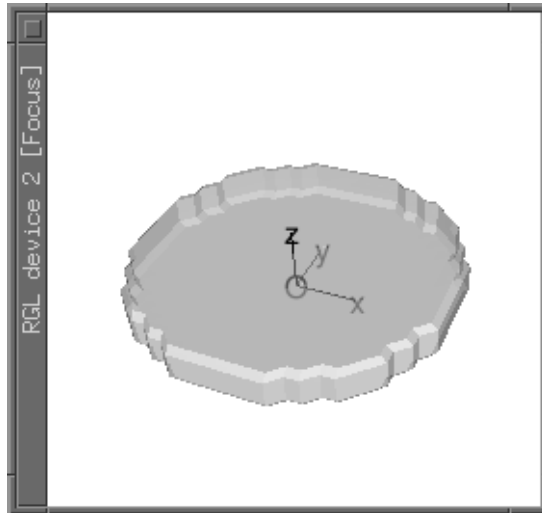
$$f = \vec{p}' A \vec{p} + \vec{b}' \vec{p} + c \quad (5)$$

↓

$$f = \vec{q}' Q \vec{q} \quad (6)$$

ひとつの面が 4×4 行列 Q ひとつで表され , 回転や平行移動の操作が著しく単純になる .

媒質領域の表示



左の例は平行平板 .R の rgl パッケージを用いて描画 .
媒質内は「平面 1 の内側」「平面 2 の内側」「円筒の内側」の and 領域として扱われる .

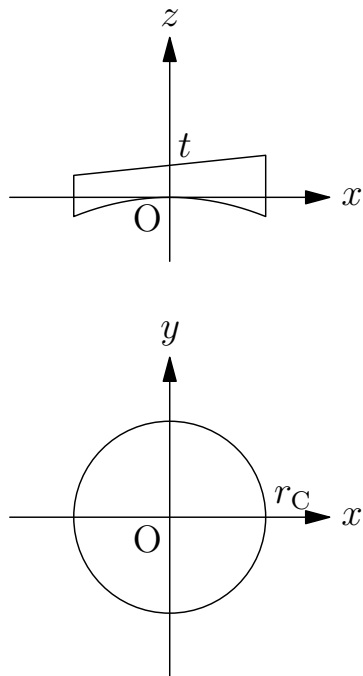
```
library(rgl)
library(misc3d)
r1 <- 0.200; # ROC for surface 1
r2 <- 0.300; # ROC for surface 2
rS <- 0.0254; # radius of side face
lT <- 0.00635; # thickness
s1 <- mz;
s2 <- -mz+mww*lT;
s3 <- -(mxx+myy)/rS+mww*rS;
pot1 <- function(x, y, z){
  astep(dSurf(s1, x, y, z))*
  astep(dSurf(s2, x, y, z))*
  astep(dSurf(s3, x, y, z))}
seq1 <- seq(-0.03, 0.03, len=30)
contour3d(pot1, 0.5, seq1, seq1, seq1, alpha=0.5)
```

(前ページのスクリプトの補足)

4×4 基底行列の定義と表面深度関数

```
for(i in 1:4){assign(c("ex", "ey", "ez", "ew")[i],
  diag(1, 4)[i,])}
msym <- function(e1, e2){(outer(e1, e2)+outer(e2, e1))/2};
mxx <- msym(ex, ex); mx <- msym(ex, ew);
myy <- msym(ey, ey); my <- msym(ey, ew);
mzz <- msym(ez, ez); mz <- msym(ez, ew);
mww <- msym(ew, ew);
dSurf <- function(mh, x, y, z){# surface depth function
  x*(mh[1,1]*x+mh[1,2]*y+mh[1,3]*z+mh[1,4])+
  y*(mh[2,1]*x+mh[2,2]*y+mh[2,3]*z+mh[2,4])+
  z*(mh[3,1]*x+mh[3,2]*y+mh[3,3]*z+mh[3,4])+
  (mh[4,1]*x+mh[4,2]*y+mh[4,3]*z+mh[4,4])
}
```


凹面鏡の場合の注意点



左の例はウエッジ付き凹面鏡．媒質内は「平面の内側」「球の外側」「円筒の内側」の and 領域として扱われる．

凹面鏡の場合には球の外側が媒質内とみなされるので，例では z 負の領域の半無限にのびる偽の媒質内領域が現れてしまう．

→ 実在しない平面を一枚追加して偽の領域を除去する必要あり．

面と光線の交点の算出

点 \vec{q}_0 から出発して方向余弦 \vec{d} をもつ光線 $\vec{q} = \vec{q}_0 + t\vec{d}$ を f の式に代入すると、媒介パラメータ t の二次方程式となる。

$$\vec{d}'Q\vec{d} \cdot t^2 + (\vec{q}_0'Q\vec{d} + \vec{d}'Q\vec{q}_0)t + \vec{q}_0'Q\vec{q}_0 = 0$$

丸め誤差に注意して $t > 0$ で小さい方の解を選べば良い。

虚数解の場合は交点なし。

光学素子内の一面を決め打ちして光線との交点を返す関数を作成すればよさそう（未実装）。どの面に最初に当たるかを自動算出させるのはたいへんそう。

光線伝搬行列

光学素子と光線の交点算出の関数を用いて光軸の幾何的な座標が決まれば，鏡の形状と入射角を拾いだし，任意の 2 点間での**光線伝搬行列** (ray transfer matrix, $ABCD$ 行列) を求めることができる．Gauss ビームの幾何を扱うのにとりわけ重要．

$$M_{\text{space}} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{lens}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{mirror}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R & 1 \end{bmatrix}$$

屈折力の加法性球面鏡の等価レンズ分解・Siegman 1986 の sect. 20.7 “self-cancelling lens pair” 等の手法を用いると境界条件のとり方が簡便になる．行列が求まると Gouy 位相も算出できる [Siegman 1986] ．

cf. 市販の CAD の Paraxia(R) の得意分野

練習課題

- NPRO (像回転・偏光・斜入射リング/斜入射取り出しに伴う非点収差,...)
- CPFS スラブ共振器
- リング共振器の Sagnac 効果の算出
- LCGT 主干涉計・入射光学系 (凹面斜入射)

まとめ

汎用の行列演算ツールを用い、光線追跡計算の枠組みを検討した。利点/欠点:

- 数値で評価するにとどめ、3D描画を凝らないなら、案外容易に計算できる。
- 定義ミスを防ぐために 3D描画は大切だが、難易度はやや高い。
- GUI によるオブジェクト（光学素子）の操作のしくみを自前で組む方法は見当もつかない。
- 光線の折れ線の節点に、テキストエディタで名前をつける必要があり、光学系の規模が大きくなると大変。

現時点で予想される、欲しくなるであろう機能:

- 反射・屈折による光路追跡
- 共振器のモード形成のための鏡のアライン
- 共振器モードの Gauss ビームパラメータの算出、球面鏡斜入射時の非点収差の見積り
- リング光路の Jones 行列、像回転、Sagnac 感度の計算