

# 厳密な熱弾性雑音の計算方法

宗宮健太郎, 苔山圭以子, 山元一広

平成 2 2 年 5 月 2 8 日

## 1 概要

基材の熱弾性雑音を計算するのに、これまでは低温低周波近似を使っていましたが、ここでは厳密解を簡単に計算する方法を載せておきます。Cerdonio の論文に載っている厳密解は数値積分を必要とし、めんどくさいと言われていましたが、ちゃんと解析的に表す方法があります。LCGT の場合、数百ヘルツ以下では山元さんの近似解と合います。CLIO の場合はほぼ全帯域で常温近似も山元さんの低温近似も合います。LCGT の高周波や CLIO の中間温度での雑音レベルを知りたい場合に使ってください。

## 2 熱弾性雑音 (近似式)

鏡の内部の温度分布が揺らぐと、熱膨張率を経由して鏡が変形します。常温では以下の式で表されます [1]。

$$S_x(\Omega) = \frac{16k_B T^2 (1 + \nu_s)^2 \kappa_s \alpha^2}{\sqrt{\pi} C_s^2 w_0^3 \Omega^2} \quad (1)$$

ここで  $\alpha_s$  は熱膨張率、 $C_s$  は定積比熱容量です。サファイアはシリカと比べて熱伝導率が高いので、常温では基材の熱弾性雑音が大きくなります。しかしブラウン熱雑音が  $S_x$  が温度に比例するのに対して、熱弾性雑音は温度の 2 乗に比例するので、低温にすることで雑音レベルはぐっと下がります。

山元さんが LCGT ドキュメントで書いているように [2]、低温では平均自由時間が下がり、熱弾性雑音の式が次のように変わります。

$$S_x(\Omega) = \frac{2k_B T^2 (1 + \nu_s)^2 \alpha^2}{\sqrt{\pi} \kappa_s C_s \Omega} \quad (2)$$

熱伝導率、熱膨張率、比熱は強い温度依存性があるので、注意しなければなりません。

## 3 熱弾性雑音 (厳密式)

文献 [1] に載っている低温・常温どちらでも成り立つ熱弾性雑音の式を使います。

$$S_x = \frac{4k_B T^2 \alpha^2 (1 + \nu_s)^2 w_0}{\sqrt{\pi} \kappa_s} J(\Omega_c) \quad (3)$$

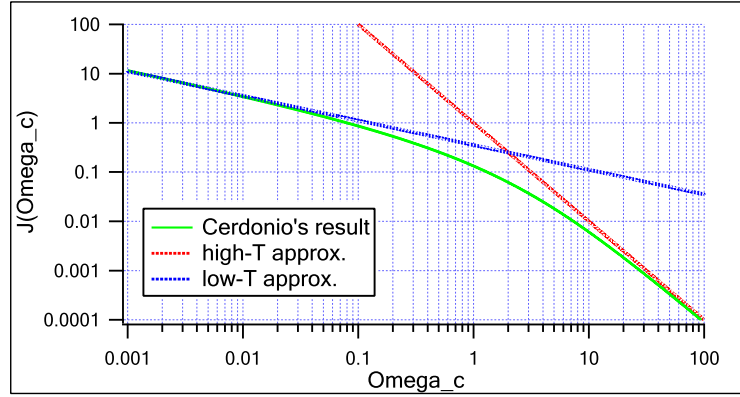


Figure 1: 厳密解で用いられる関数  $J(\Omega_c)$ 、およびその低温近似と高温近似。

$$J(\Omega_c) = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{u^3 e^{-u^2/2}}{(u^2 + v^2)[(u^2 + v^2)^2 + \Omega_c^2]} dv du \quad (4)$$

$$\Omega_c = \frac{\pi C_s w_0^2}{\kappa_s} f \quad (5)$$

文献では式 (5) の  $\pi$  に 3 乗はついてませんが、それはタイポなので注意しましょう。さて、式 (5) は以下のような形に書きなおせます。

$$J(\Omega_c) = \frac{1}{\Omega_c^2} \left\{ 1 - \text{Re} \left[ e^{i\Omega_c} (1 - i\Omega_c) \left( 1 - \text{Erf} \left[ \frac{\sqrt{\Omega_c}(1+i)}{2} \right] \right) \right] \right\} - \sqrt{\frac{1}{\pi\Omega_c^3}} \quad (6)$$

この形の方が実際の計算には使いやすいでしょう。式 (3) は  $\Omega_c \ll 1$  でよく使われている室温の式になり、 $\Omega_c \gg 1$  で山元さんの低温近似式になります [2]。それらはこの  $J(\Omega_c)$  を近似的に求めることで与えられる式です：

$$J(\Omega_c) \rightarrow J_H(\Omega_c) = 1/\Omega_c^2 \quad (\Omega_c \ll 1) \quad (7)$$

$$J(\Omega_c) \rightarrow J_L(\Omega_c) = 1/\sqrt{8\Omega_c} \quad (\Omega_c \gg 1) \quad (8)$$

図 1 に結果を示します。だいたい  $\Omega_c < 0.1$  で低温近似、 $\Omega_c > 10$  で高温近似に近づきます。サファイアで言えば 20K で  $C_s = 2760 \text{ J/m}^3/\text{K}$ 、 $\kappa = 15700 \text{ W/m/K}$  だから、LCGT のビーム径を 3cm として、低温近似が成り立つといえるのは 200 ~ 300Hz 以下、というわけです。CLIO の場合はビーム径が小さいので、低温近似はもっとよく成り立ちます。ビーム径を 5mm として 10 kHz 程度まで成立します。室温では熱パラメタが変わるので、こちらもほぼ全帯域で成立します。

#### 4 LCGT と CLIO における熱弾性雑音

図 2(左パネル) に、LCGT における熱弾性雑音の厳密式と近似式の違いを示します。熱弾性雑音だけ見れば数百ヘルツ以上で違いがありますが、他の雑音の方が大きいので、近似式のままで問題ないとも言えるでしょう。

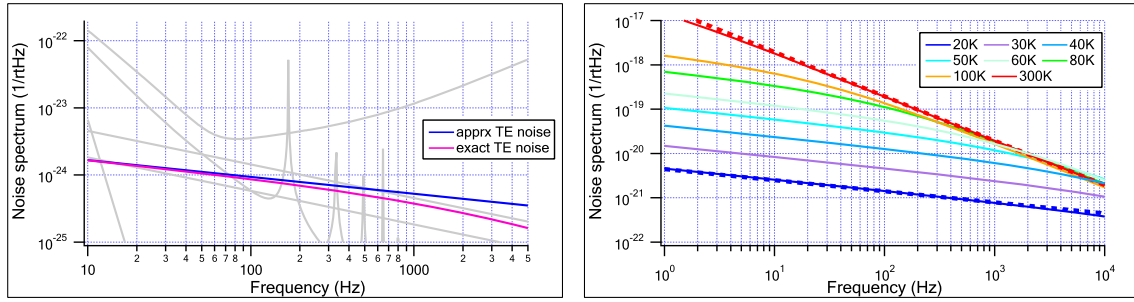


Figure 2: *Left*: LCGT における熱弾性雑音の厳密式と近似式の違い, *Right*: CLIO における熱弾性雑音を異なる温度で計算したもの。

CLIO の場合、常温と 20K では近似式とほぼ違いは見られませんが、今回導出した式 (6) を用いると中間温度の熱弾性雑音のスペクトルも簡単に求められます。比熱、熱伝導率、熱膨張率が下表のように与えられたとき<sup>1</sup>、温度ごとの熱弾性雑音の様子は図 2(右パネル) のようになります。破線は 20K と 300K の近似値です。

	20K	30K	40K	50K	60K	80K	100K	300K
比熱 (J/kg/K)	0.69	2.9	7.1	14	25	62	125	790
熱伝導率 (W/m/K)	1.6e+4	2.0e+4	1.2e+4	5.0e+3	2.5e+3	9.0e+2	4.0e+2	4.0e+1
熱膨張率 (1/K)	5.6e-9	1.8e-8	4.4e-8	8.5e-8	1.5e-7	3.5e-7	6.8e-7	5.0e-6

## 5 まとめ

熱弾性雑音をめんどくさい数値積分なしに、かつ近似を使わずに求めることができるようになりました。もし必要なことがあれば使ってください。

## References

- [1] M. Cerdonio *et al*, Phys. Rev. D, **63**, 082003 (2001)
- [2] K. Yamamoto, "LCGT design document," Sec. 3, (2007)

<sup>1</sup>内山さんと鈴木さんからもらったデータを元にしてます。