

# Thermal Noise of Coil-Magnet Actuator

我妻 一博

2008 年 9 月 14 日

## 概要

CLIO で使用している Coil-Magnet Actuator の熱雑音について評価した。今回評価した Actuator の熱雑音とは、Coil の熱雑音とコイルを支持する Holder の熱雑音を指し、鏡に接着された磁石が動くことによって生じる渦電流がその起源である。080515 (Holder の熱雑音が支配的であったと考えられる時期) のデータを用いて熱雑音を評価し、感度と比べることによって計算の妥当性を検証した。さらに、080821 (現在の Actuator 環境) での見積もりを出したところ、Coil の熱雑音は  $1.6 \times 10^{-20} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]@100\text{Hz}$ 、Holder の熱雑音は上限値で  $7.8 \times 10^{-20} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]@100\text{Hz}$  となり、現在はこれらの熱雑音は感度を制限していないことが分かった。

## 1 目的

2008 年 6 月、川村静児氏の神がかり的なノイズハンティングによって CLIO の感度が改善された。アルミ製の Holder の熱雑音によるノイズが干渉計で見えていた可能性が高いが、Holder の改善前である 5 月の時点でのパラメータで計算してみても、当時の 200Hz 以下の直線が説明できるか検証する。また、現在の Actuator 環境で予想される eddy current damping によるノイズカーブの見積もりを行う。

## 2 計算方法

以下、Coil の熱雑音とコイルを支持する Holder の熱雑音について計算方法を述べる。Coil の熱雑音に関しては、7 月の交流会でサブリメントファイルとして書かれた山元一広氏のレポートを踏襲した。Holder の熱雑音に関しては、「G. Cagnoli et al., Rev. Sci. Instrum. 69 (1998) 2777.」の論文をもとに Q 値を計算した。

パワースペクトルを求める際に共通して用いたのは、揺動散逸定理から導き出される振り子の熱雑音である。渦電流は Viscous damping なので、共振周波数より高い領域では

$$G = \frac{4k_B T \omega_0}{m \omega^4 Q} \quad (1)$$

と表される。感度と比較するときは、 $\sqrt{G} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$  を用いる。

## 2.1 Coil の熱雑音

熱平衡状態において、Coil がつながれた回路の抵抗で生じた雑音電流が鏡を揺らす現象と、鏡に接着された磁石が動くことによって Coil に生じる誘導起電力が抵抗で散逸を生じるのは同じ現象である。これらを定式化すると、

$$F = \alpha I \quad (2)$$

$$V = \alpha v \quad (3)$$

となり、これら二つの式が同じ  $\alpha$  で結合される。 $\alpha$  は Coil-magnet actuator の Coupling 率 [N/A] である。 $F, v$  は Actuator が鏡を押す力と鏡の速度で、 $I, V$  はコイルの回路に流れる電流、電圧である。

$N$  個の Coil-magnet actuator が取り付けられた質量  $m$  の鏡の振り子を考えたとき、(2) 式を用いた振り子の運動方程式は、

$$m(-\omega^2 + \omega_0^2)\tilde{x} = N\alpha\tilde{I} \quad (4)$$

となる。さらに、(3) 式を用いた回路の運動方程式は、

$$Z\tilde{I} + i\omega\alpha\tilde{x} = 0 \quad (5)$$

となる。 $Z$  はコイルにつながれた回路の impedance とコイル自身の impedance の和である。これらをまとめると、

$$m(-\omega^2 + \omega_0^2)\tilde{x} + i\frac{N\alpha^2\omega}{Z}\tilde{x} = 0 \quad (6)$$

であり、コイルのインダクタンス  $L$  が回路の抵抗  $R$  に比べて十分小さいとして  $Z = R$  とすると、散逸の項からこの系の Q 値は

$$Q = \frac{m\omega_0 R}{N\alpha^2} \quad (7)$$

ということが分かる。したがって、パワースペクトル密度は (1) 式より、

$$G = \frac{4k_B T N \alpha^2}{m^2 \omega^4 R} \quad (8)$$

を計算すれば求まる。

## 2.2 Holder の熱雑音

鏡に付けられた磁石が運動するとき、Holder には渦電流が生じる。これが散逸となって振り子の Q 値を下げ、したがって振り子の熱雑音を増加させる。この現象の近似解として、磁石を点状

の磁気双極子モーメントとみなし、この磁場が軸対象な円筒形の Holder に対して生じる渦電流の散逸から Q 値を求める。

点状の磁気双極子モーメント  $\mu$  が点  $\rho$  に作る磁場  $B$  は、 $\mu = jan$  と定義すると ( $j, a$  は円電流とそれが囲む面積)、

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi\rho^3} \left\{ \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} - \boldsymbol{\mu} \right\} \quad (9)$$

なので、 $\mu$  と  $\rho$  のなす角を  $\theta$  とすれば、 $\rho$  の点での  $\mu$  方向の磁場  $B_n$  は

$$B_n = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi\rho^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (10)$$

$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (11)$$

となる。ここで、磁気双極子モーメントは  $z$  軸上の原点に軸方向に置き、 $z$  軸が中心を通る半径  $r$  の円周上の点に  $\rho$  を置いた。(つまり  $\rho^2 = r^2 + z^2$ )

これを用いると、半径  $r$  の円内の  $\mu$  方向の磁場は、

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^r B_n \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (12)$$

となるので、 $z = A \sin(\omega t)$  とすると、半径  $r$  の円周上の微小区間で生じる起電力  $E'$  は、

$$E' = \frac{1}{2\pi r} \int \mathbf{E} dl \quad (13)$$

$$= -\frac{1}{2\pi r} \left( \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (14)$$

$$= \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{zr}{(r^2 + z^2)^{5/2}} A\omega \cos(\omega t) \quad (15)$$

となる。ゆえに、Ohm の法則  $E = \sigma J$  より電気伝導度  $\sigma$  (アルミニウムの場合 293K で  $3.6 \times 10^7 [\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}]$ ) を用いて、円周上で生じた渦電流によって消費される電力は、1 周期 ( $2\pi/\omega$ ) あたりの平均で、

$$dP = \frac{\omega}{2\pi} \int_{1\text{cycle}} E' J' 2\pi r dr dz dt \quad (16)$$

$$= 2\pi\sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \frac{r^3 z^2}{(r^2 + z^2)^5} A^2 \omega^2 \frac{\omega}{2\pi} dr dz \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt \quad (17)$$

$$= 2\pi\sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \frac{r^3 z^2}{(r^2 + z^2)^5} \frac{A^2 \omega^2}{2} dr dz \quad (18)$$

となる。ゆえに、円筒形の Holder を考えたとき、Holder 全体で生じる散逸  $P$  は、

$$P = \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} dP = 2\pi\sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \frac{A^2 \omega^2}{2} \mathcal{J} \quad (19)$$

ここで  $\mathcal{J}[\text{m}^{-3}]$  は Geometrical factor で、

$$\mathcal{J} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3 z^2}{(r^2 + z^2)^5} dr dz \quad (20)$$

と表される Holder の形状に依存した量である。

エネルギー  $E$  が蓄積された系に、単位時間当たり  $P$  の散逸が存在するとき、この系の  $Q$  値は、

$$Q = \frac{\omega_0 E}{P} \quad (21)$$

と表される。これを用いて  $Q$  を求める。振り子に蓄えられたエネルギー  $E$  は、

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2 \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \quad (23)$$

なので、これと (19)、(21) 式より振り子の  $Q$  値は、

$$Q = \frac{m \omega_0}{2\pi\sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \mathcal{J}} \quad (24)$$

となる。この  $Q$  はコイル 1 個あたりの値なので、 $N$  個のコイルがあれば  $N$  で割る。したがって、パワースペクトル密度は (1) 式より、

$$G = \frac{4k_B T N}{m^2 \omega^4} 2\pi\sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \mathcal{J} \quad (25)$$

を計算すればよい。

### 2.3 Coupling 率 $\alpha$ と磁気双極子モーメント $\mathcal{M}$

Coil の熱雑音 (式 (7)、(8)) と Holder の熱雑音 (式 (24)、(25)) を計算する上で、Coupling 率  $\alpha$  と磁気双極子モーメント  $\mathcal{M}$  の値を知る必要がある。これらは共に、Actuator 効率を測定することによって求めることができる。

Actuator 効率は、感度を求める際に行う通常の Michelson での Calibration を用いて測定する。測定された Actuator 効率の 100Hz での値を  $A_{100}[\text{m/V}]$  とすると、100Hz では振り子は自由質点とみなせるので、伝達関数  $H[\text{m/N}]$  は  $1/m\omega^2$  と近似できる。ドライバの抵抗  $R_c[\Omega]$  (CLIO の場合、 $R_c = 50\Omega$ ) によって電圧電流変換されているので、Coupling 率  $\alpha[\text{N/A}]$  は

$$\alpha = \frac{A_{100} R_c}{H_{100}} \quad (26)$$

$$= A_{100} R_c \cdot m (2\pi \cdot 100)^2 \quad (27)$$

から求まる。また、力の吊り合いを考えれば、アクチュエータ効率  $A[\text{m/V}]$  の DC 成分を  $A_{dc}$  として、

$$\alpha = A_{dc} R_c k \quad (28)$$

から求めることもできる。ここで、 $k$  は振り子のバネ定数に相当するもので、 $k = m\omega^2$ ,  $\omega = 2\pi f_0$  であり、 $f_0$  は振り子の共振周波数で、多段振り子の全体が動く primary mode の共振周波数である。

続いて、磁気双極子モーメント  $\mathcal{M}$  を求める<sup>\*1</sup>。まず、単純な1周のリングと、リング中心軸 ( $z$  軸) 上に磁石がある系を考える。このリングに  $I$  [A] 流れるときに、リング上の法線方向の磁場  $B_t$  によってリングに生じる力は  $z$  軸方向に

$$F = I B_t \cdot 2\pi r \quad (30)$$

である。ゆえに、 $I = 1$  [A] 流したときに生じる力が Coupling 率  $\alpha$  なので、

$$\alpha = B_t \cdot 2\pi r \quad (31)$$

という関係が成り立つ。加えて、式 (9) より、 $\rho$  の点において円周の法線方向の磁場  $B_t$  は、

$$B_t = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi \rho^3} (3 \cos \theta \sin \theta) \quad (32)$$

$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{3zr}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (33)$$

であるから、 $\alpha$  が既知の場合  $\mathcal{M}$  が評価できる。実際には、1周のリングではなく巻き数  $w$  のコイルなので、磁気双極子からの距離が  $z = z_1$  のところに1本目のリングがあり、そこから距離  $d$  の間隔で  $w$  個のリングが並んだものとして近似して ( $z = z_1 + dn$ )

$$\alpha = \sum_{n=0}^{w-1} B_t \cdot 2\pi r \quad (34)$$

よって、式 (33) より、

$$\alpha = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \sum_{n=0}^{w-1} \frac{3(z_1 + dn)r}{(r^2 + (z_1 + dn)^2)^{5/2}} 2\pi r \quad (35)$$

これにより  $\mathcal{M}$  が求まる。コイルが2重巻きของときは近似的には右辺に2を掛ければよい。重ね巻きが増えて半径の変化が大きくなる場合には、重ねる回数を  $u$  として、 $r = r_1 + ds$  と置くことで、

$$\alpha = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \sum_{s=0}^{u-1} \sum_{n=0}^{w-1} \frac{3(z_1 + dn)(r_1 + ds)}{((r_1 + ds)^2 + (z_1 + dn)^2)^{5/2}} 2\pi(r_1 + ds) \quad (36)$$

とすれば良い。

<sup>\*1</sup> 磁石の物性値が正確に分かる場合には、磁石の残留磁束密度を  $B_r$ 、体積を  $V$  として、

$$\mathcal{M} = \frac{B_r V}{\mu_0} \quad (29)$$

から知ることもできるが、このレポートでは Coupling 率から算出した。

### 3 計算結果

前節の計算を用いて、実際の CLIO の parameter を代入し評価した。使用したのは 2008 年 5 月 15 日 (Holder の熱雑音が支配的であったと考えられる時期) のデータと、2008 年 8 月 21 日 (現在の Actuator 環境) のデータである。両日の代表的な計算値および parameter を下に記す。

Parameter		
Date	080515	080821
$Q_{coil}$	$1.2 \times 10^7$	$6.7 \times 10^8$
$\sqrt{G_{100coil}}$	$3.6 \times 10^{-19} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$	$1.6 \times 10^{-20} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$
$Q_{holder}$	$5.3 \times 10^4$	$2.9 \times 10^7$
$\sqrt{G_{100holder}}$	$1.8 \times 10^{-18} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$	$7.8 \times 10^{-20} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$
$\alpha$	$3.5 \times 10^{-3}$	$4.6 \times 10^{-4}$
$\mathcal{M}$	0.015 [J/T]	0.0028 [J/T]
Coil	$\phi$ 10mm, 22turns	$\phi$ 16mm, 15turns, dual
Magnet	$\phi$ 2mm $\times$ 10mm, Nd-Fe-B	$\phi$ 1mm $\times$ 10mm, Sm-Co
Holder	$\phi_{in}$ 24mm - $\phi_{out}$ 30mm $\times$ 20mm	$\phi_{in}$ 40mm - $\phi_{out}$ 60mm $\times$ 5mm
$\mathcal{J}$	5585 [1/m <sup>3</sup> ]	288 [1/m <sup>3</sup> ]

#### 3.1 2008 年 5 月 15 日の評価

図 1 は、2008 年 5 月 15 日の感度と計算で求めた Actuator の熱雑音を比較したものである。緑色のラインが Coil の熱雑音であり、青色のラインが Holder の熱雑音である。Holder の熱雑音のうち、実線は前節の計算を忠実に実行したものであり、点線は補正を加えたものである。

青の実線は、測定された感度曲線にはやや及ばず、約 1.5 倍足りない。この理由として、080808 の感度 (Current Best) で存在するノイズを加えていないことが挙げられる。その他に考えられるのが、磁気双極子モーメントの大きさ  $\mathcal{M}$  と Geometrical factor  $\mathcal{J}$  の見積もりの甘さである。点線で描いた方には、これらの補正を加えた。具体的には、080808 の感度 (Current Best) で存在する  $1 \times 10^{-18} \times (100\text{Hz}/f)^2 [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$  のノイズを加え、さらに磁気双極子モーメントを 1 割程度増やし、Geometrical factor を 5600 から 9000 に増やした。Actuator 効率を測定したとき、Yaw 押しだけで測った値と Pitch 押しだけで測った値を足したものより全押しで測った値の方が 1 割程度大きな値になるという現象がみられる。まだよく原因は分かっていないが、青の実線を計算したときには Yaw 押しと Pitch 押しそれぞれで測ったときの値を使っているため、全押しにした場合にはコイルの Coupling 率  $\alpha$  が 1 割程度大きくなることが予想される。それに伴い、磁気双極子モーメントの大きさも 1 割程度大きくなるとして  $\mathcal{M} = 0.017$  で計算した。また、Geometrical factor は円筒形だけを計算しているため、実物の Holder のコイルの周囲は四角形になっていることや、鏡の落下防止に付けてある細いアルミについては省いており実際より過小評価している。四角形の

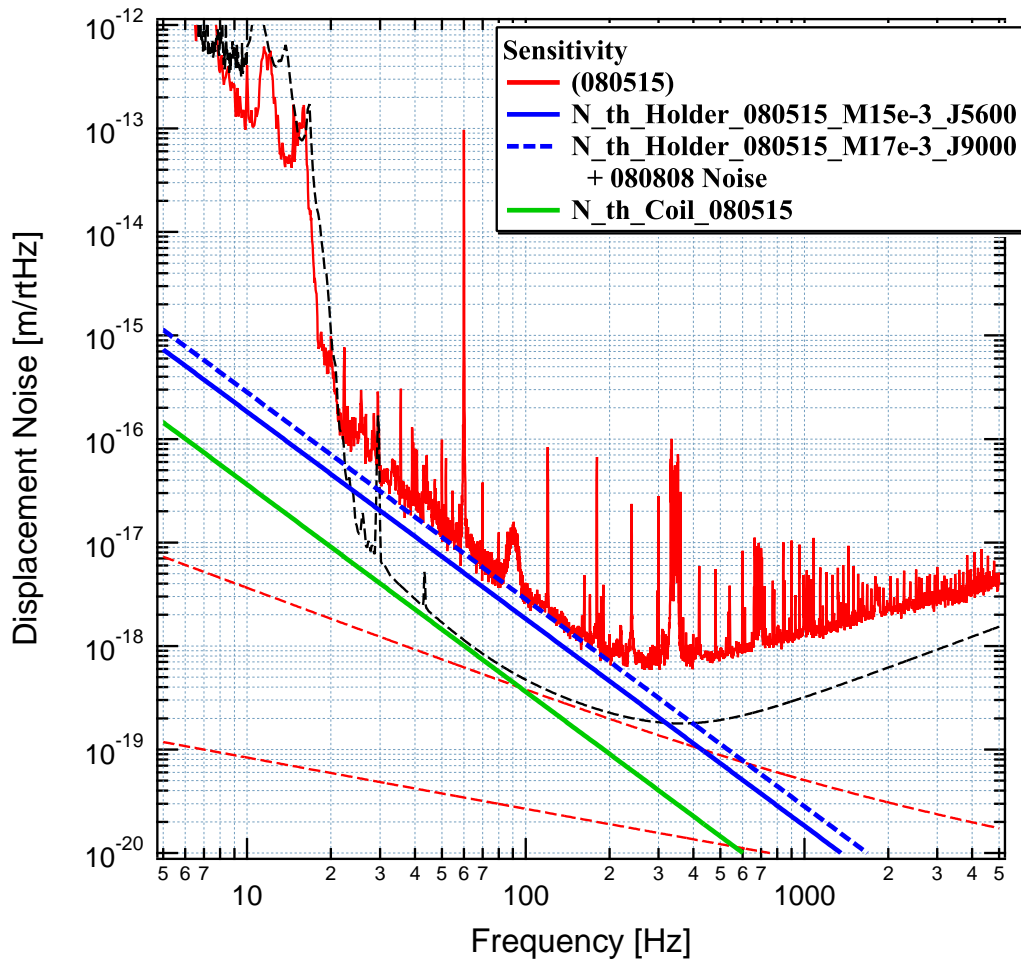


図1 2008年5月15日の感度と計算で求めた Actuator の熱雑音の比較

対角線の長さは 42mm であり、 $\phi$  が 42mm の円筒形の Geometrical factor が 9000 である。これらの補正を加えると、080515 の感度スペクトルとの一致が良くなる。補正の効果を除いても極めて近いレベルに存在するので、200Hz 以下が Holder の熱雑音で制限されていたことは明らかであり、前節のノイズ評価の計算方法は有用であると言える。

Coil の熱雑音については、Holder の熱雑音よりは下にあるものの目標感度のすぐ下にあり望ましい状況ではなかった。このときの Coil は Pitch 方向はバイパスを入れて効率を落とし、Yaw 方向はバイパス無しで全押ししていた。

### 3.2 2008年8月21日の評価

6月以降、新しいコイル Holder を導入した。具体的には、アルミニウム枠にコイルを入れスタイクキャストで固定していたのをマコール製のコイルボビンに変更した。また、磁石も  $\phi$ 2mm のネオジウム磁石から  $\phi$ 1mm のサマリウムコバルト磁石に変更し、Coupling 率も  $3.5 \times 10^{-3}$  から

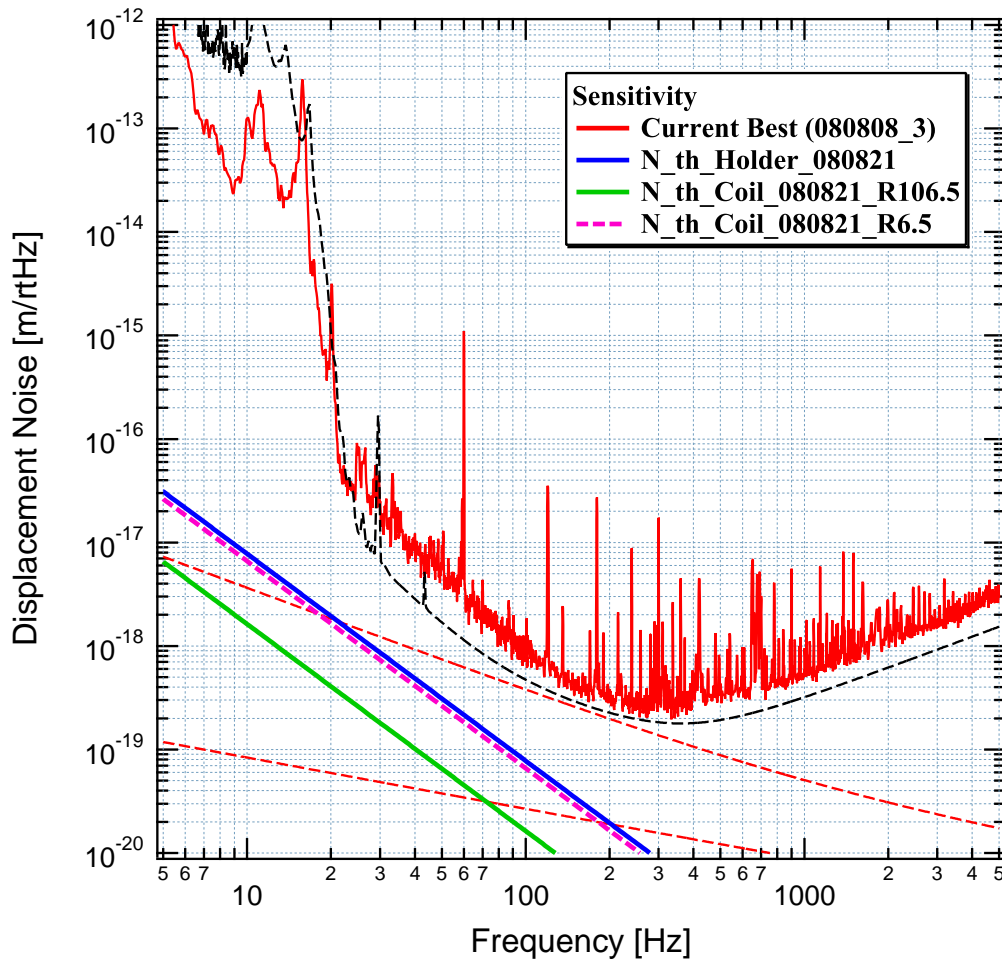


図2 2008年8月21日のデータで計算した Actuator の熱雑音

$4.6 \times 10^{-4}$  となり約 1/8 になった。これによって Actuator の熱雑音が軒並み下がった。

図2は、2008年8月8日の感度と8月21日の Actuator 環境で計算した Actuator の熱雑音を比較したものである。緑色のラインが Coil の熱雑音であり、青色のラインが Holder の熱雑音である。桃色の点線はコイルにバイパスを入れて Actuator 効率を落とした場合である。

まず Coil の熱雑音に関して、CLIO ではコイルに  $0.5\Omega$  のバイパスを入れて Actuator 効率を落とす場合がある。このとき、コイルから見た回路の抵抗は同軸ケーブルの抵抗も合わせて  $6.5\Omega$  になる。バイパスを切ったときは電圧電流変換の抵抗  $R_c$  に加えて回路内の抵抗  $50\Omega$  が加わり、約  $106\Omega$  となる。式(8)から分かるように、スペクトルは抵抗のルートに反比例する。この抵抗値の違いが緑色のラインと桃色の点線の差である。熱雑音の観点からいうと、バイパスを入れる方法は余り好ましくはない。現状では、Coil の熱雑音はバイパスを入れない場合で  $1.6 \times 10^{-20} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] @ 100\text{Hz}$ 、入れた場合でも  $6.6 \times 10^{-20} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] @ 100\text{Hz}$  となり、現在の感度を制限することはない。



次に Holder の熱雑音に関してであるが、コイルを直に支持する部分はマコール製に替えているので渦電流はほとんど生じないと考えられる。よって、問題になるとしたらアルミで作られた部分に限られる。現在もアルミで作られているのはマコールの筒を支持する枠と、枠に付けられた鏡の落下防止用の細いアルミ棒である。特にアルミ棒は鏡ぎりぎりまで近づけてあるため、磁石からも近い位置にある。枠の部分を含めたアルミ棒の経路は閉じておらず、磁石から見て C の形になっているので渦電流があるとは考えにくい。経路上に切れ目を入れてループが閉じない状態でも、渦電流による Q 値が余り変化しなかったという報告もある [2] ので、変位電流のようなものを仮定して、仮にこのアルミ棒の経路を渦電流が流れた場合について見積もった。あくまで過大な上限値として評価したものであることを断っておく。磁石にもっとも接近する半径を取り、 $\phi_{in}$  40mm -  $\phi_{out}$  60mm  $\times$  5mm という円筒形を考え、C の形状を考慮して 3/4 倍した Geometrical factor は 288 となった。感度にして  $7.8 \times 10^{-20}$  [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ] となり、バイパスを入れた場合の Coil の熱雑音と同等にはなったが、現在の感度を制限する心配はない。

## 4 まとめと考察

2 節での計算方法の有用性が示された。言い換えれば、CLIO ではコイル Holder の熱雑音を感度として直接見ることができたのである。Holder の熱雑音を計算する上で気をつける点として、磁気双極子モーメントを点状とみなしていることが挙げられる。コイルや Holder と磁石の径が極端に近い場合に磁場の近似式が合わないことも考えられる。磁気双極子モーメントを正確に見積もるには、コイルの径は大きく、磁石は離れた方が良い。また、Geometrical factor も円筒形に限って計算しているので、複雑な形状については簡単な見積もりはできない。逆に言うと、これら 2 つの factor ( $M$ ,  $\mathcal{J}$ ) が正確に求められれば、Holder の熱雑音を正確に見積もることが可能である。

さらに、現在のアクチュエータ環境での熱雑音の見積もりを出した。これらの見積もりは室温での評価なので、低温に冷やす場合には再考が必要である。低温の場合、Coil の熱雑音については抵抗が小さくなりコイルのインダクタンスを考慮する必要がある。これについては山元氏のレポート [1] を参照されたい。Holder の熱雑音については電気伝導度  $\sigma$  を低温での値に変更すればそのまま適用できる。

## 5 参考文献

- [1] 山元一広 第 9 回重力波研究交流会サプリメントファイル「coil-magnet actuator の熱雑音」
- [2] G. Cagnoli et al., Rev. Sci. Instrum. 69 (1998) 2777.
- [3] 山元一広 修士論文 (1997)
- [4] S. Frasca et al., Phys. Lett. A 252 (1999) 11.