LCGTの非定常散射雑音について

内部資料 ver. 0.1

宗宮健太郎

平成 17 年 7 月 18 日

AdLIGO が新しい技術である DC readout を採用し、LCGT は経験豊富な RF readout を採用することがデフォルト案として決まっている。実際、Detuned RSE である AdLIGO は RF readout だと変調系雑音が感度を制限しかねない一方で、LCGT は Broadband RSE であるため上下 RF sideband に imbalance は生じず変調系雑音は低いことが期待されており、DC readout にする必然的な理由はないとも言える。ただし、復調時に高調波の真空場が運ぶショットノイズが感度を少しだけ低下させてしまう。この付加的なショットノイズは復調位相に応じて大きさを変えることから非定常散射雑音と呼ばれている。LCGT のデザイン会議などで非定常散射雑音の影響でショットノイズレベルは $\sqrt{1.5}$ 倍悪化すると言われてきた (言ったのは何を隠そう私です) が、参考文献 [1] をよく読むと実際そこまでは悪化しないことが分かったので、その内容をかいつまんで説明する。

まず参考文献 [2] や [3] では復調関数として $\sin\omega_{\rm m}t$ を仮定していたが、実際の実験ではスイッチング回路を用いた復調がメイン、というかこれ以外は使われていない。スイッチング回路を用いた場合の復調関数は矩形波であり、結論から言うと矩形波で復調した方が非定常散射雑音は小さくなる。参考文献 [1] では一般化した復調関数で議論が展開されていて、結論としては「最適な復調関数を用いても broadband QND は不可能」と書いてある。ところがこれは非定常散射雑音がまったく除去できないということではなく、readout phase を固定すれば除去できるということなのである (つまり参考文献 [2] で提案された multi-phase detection のみが否定されていたのである)。この文献は一般化してある分だけイメージがつかみにくいと思うので、以下では実際の装置に即して説明しよう。

Readout phase というのは調整することで標準量子限界以下の感度を実現できる (QND) のだが、ここでは LCGT をふまえて信号が最大となる readout phase のみを仮定する。Dark port に現れる sideband を強度変調成分と位相変調成分に分けてそれぞれ $A(t)$, $P(t)$ とすると復調時に発生するショットノイズ (パワースペクトラム) は以下の式で表される：

$$S^{\rm add}=\frac{1}{T}\int_0^T D^2(A^2+P^2)dt-1 \tag{1}$$

ここで $D(t)$ は復調関数である。規格化条件として

$$\left(\sum_{\rm k} D_{\rm k}^* A_{\rm k}\right)^2+\left(\sum_{\rm k} D_{\rm k}^* P_{\rm k}\right)^2=1 \tag{2}$$

を加えておく。添え字 k がついているのは周波数分解したときの k 次高調波を表している。Carrier 光に位相変調をかけると 2 次の高調波などは carrier 光に対して強度変調となるが、LCGT の制御法を念頭に置くと強度変調成分はほぼ dark port にはもれ出てこないので、$A(t)=0$ とおいてしまってかまわないだろう [4]。式 (1) を見て分かるように強度変調成分は非定常散射雑音を増やすだけで無用の長物である。これは位相変調成分の高調波が重力波信号を運ぶのに寄与する一方で強度変調がその働きをしないことに起因している。

実際このあたりの議論は参考文献 [5][6][7] にすでに書いてある話である。Readout phase を変えるということになればさらに複雑な考察が要求されるのだが、固定した時点で矩形波で非定常散射雑音を減らすなどの従来のアイデアがそのまま通用する、といういたって当たり前の話になる。

さて、まず $\sin\omega_{\rm m}t$ という変調関数のみが dark port に出てきて、$\sin\omega_{\rm m}t$ で復調する場合を考えてみよう。

$$P(t)=\sqrt{2}\sin\omega_{\rm m}t \quad , \ D(t)=\sqrt{2}\sin\omega_{\rm m}t \ , \tag{3}$$

すなわち

$$P_{\pm 1}=\frac{\pm i}{\sqrt{2}} \quad , \ D_{\pm 1}=\frac{\pm i}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

である。式 (2) の規格化条件を満たしている。このとき

$$\begin{aligned} S^{\rm add} &= \frac{1}{T}\int_0^T 4\sin^4\omega_{\rm m}t dt - 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

となり、非定常散射雑音の影響でショットノイズが $\sqrt{1.5}$ 倍になることが示される。

では $\sin\omega_{\rm m}t$ という変調関数を、矩形波で復調する場合を考えてみよう。矩形波は以下の式で表される：

$$D(t)=\frac{\pi}{4}\left(\sin\omega_{\rm m}t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_{\rm m}t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_{\rm m}t+\cdots\right) \ . \tag{6}$$

一方で、規格化した変調関数は

$$P(t)=\frac{8}{\pi}\sin\omega_{\rm m}t \tag{7}$$

となる。式 (1) に代入すると計算は少し大変で、結果だけ書くと

$$S^{\rm add}=\frac{\pi^2}{8}-1\simeq 0.2337 \tag{8}$$

となる。導出する際にはゼータ関数を用いることになる。この数字が LCGT における非定常散射雑音のデフォルト値である。これまでの計算では $\sqrt{1.5}$ 倍、すなわち約 22.5%の感度悪化で、DC readout では連星からの重力波が 200Mpc まで見える configuration でも RF だと 160Mpc 程度にまで落ち込んでしまっていたが、この正しい計算結果から推定すると約 11%の悪化で 180Mpc まで見えることになる (これは大雑把な推測であり、本当は SN をちゃんと計算しなければいけません)。

さて、参考文献 [1] によれば変調関数と復調関数の組み合わせ次第では非定常散射雑音は完全に除去することも可能であると書いてある。強度変調成分のない状況では復調関数が変調関数の逆数のような形になるときに完全な除去が可能となる。そして復調関数が矩形波のときは変調関数も矩形波だとその状況になるのである。矩形波は奇数倍高調波の組み合わせで書けるので、それらを付加することで感度が向上することになる。

ここで注意したいのは、LCGT の制御法として第一対角化法 ($f_1 : f_2 = 6 : 1$) を用いた場合は、3 次高調波はおそらく大丈夫だが 5 次高調波を入れると他自由度の制御信号に影響が及ぶ可能性があるということである (LCGT の制御法については参考文献 [4] を参照されたし)。第二対角化法もしくは低周波法を用いることにするか、3 次までしか付加しないことにするか、どちらかである。まあ 3 次までで十分な気もする。

それでは 3 次高調波を基本波の x 倍だけ加えてみる。規格化すると

$$P(t) = \frac{8/\pi}{1+x/3}\left(\sin\omega_{\mathrm{m}}t + x\sin 3\omega_{\mathrm{m}}t\right) \tag{9}$$

となる。計算はややこしくなるが、結果的には DC 成分の自乗項以外は消えてしまう。これは矩形波の自乗関数がただの平坦な定数であることによる。非定常散射雑音の大きさは

$$S^{\mathrm{add}} = \frac{3\pi^2}{8}\frac{1+x^2}{(3+x)^2} - 1 > 0.1103 \ (x = 1/3) \tag{10}$$

となる。SN で言うと 190Mpc まで回復する。

参考文献

[1] A. Buonanno, Y. Chen, and N. Mavalvala, Phys. Rev. D **67** 122005 (2003)

[2] K. Somiya, Phys. Rev. D **67** 122001 (2003)

[3] "Investigation of radiation pressure effect in a frequency-detuned interferometer and development of the readout scheme for a gravitational-wave detector", K. Somiya (Doctor Thesis), 2004

[4] LCGT 制御法検証レポート (2005); http://tamago.mtk.nao.ac.jp/somiya/Somiya1/Document/lcgtrse.pdf

[5] T. M. Niebauer, R. Schilling, K. Danzmann, A. Rüdiger, and W. Winkler, Phys. Rev. A **43**, 5022 (1991)

[6] B. J. Meers and K. A. Strain, Phys. Rev. A **44**, 4693 (1991)

[7] N. Mio and K. Tsubono, Phys. Let. A **164**, 255 (1992)